

Unità didattica 3

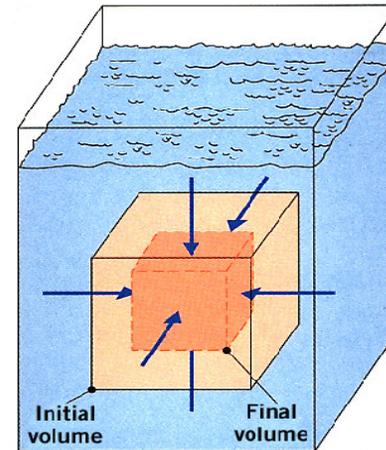
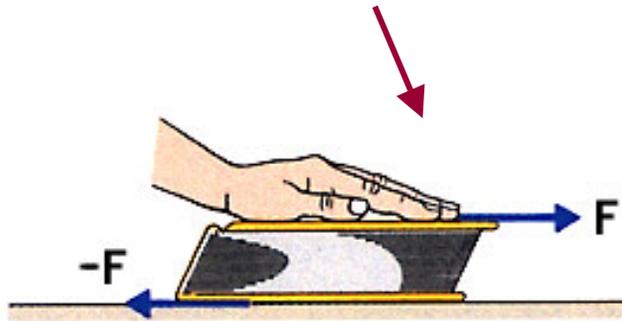
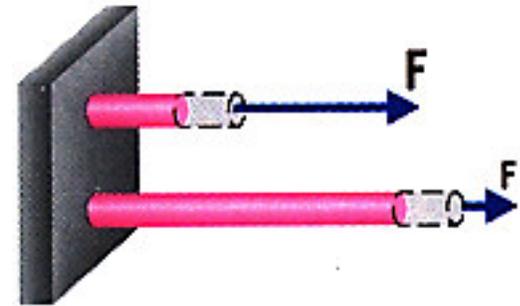
- Elasticità dei materiali
 - Deformazione di un solido.....2
 - Legge di Hooke..... 3
 - Forza elastica.....4
 - Deformazione elastica di una molla..... 5
 - Accumulo di energia attraverso la deformazione elastica..6
 - Resistenza dei materiali..... 7
 - Struttura molecolare ed elasticità..... 8
 - Il moto armonico..... 9
 - Analogia tra oscillazioni armoniche e moto circolare..... 10
 - Oscillazioni smorzate.....12

Deformazione di un solido

Ogni forza che agisce sulla materia porta ad una deformazione. Per effetto di tale deformazione il corpo produce delle forze antagoniste uguali e contrarie a quelle esterne.

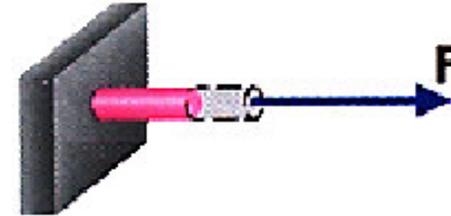
Tipi di deformazioni:

1. Allungamento
2. Compressione uniforme
3. Scorrimento



Legge di Hooke

Se un corpo come quello in figura viene sottoposto all'azione di una forza crescente, tra allungamento e forza applicata esisterà una relazione simile a quella rappresentata nel grafico in basso.



Tratto OH: il grafico è una retta. Viene detta zona campo proporzionale o di Hooke. Cessata la forza il corpo riprende la sua configurazione originaria.

Punto E: limite della zona di elasticità.

Tratto EB: il corpo, anche dopo lo scarico, rimane + lungo che in origine.

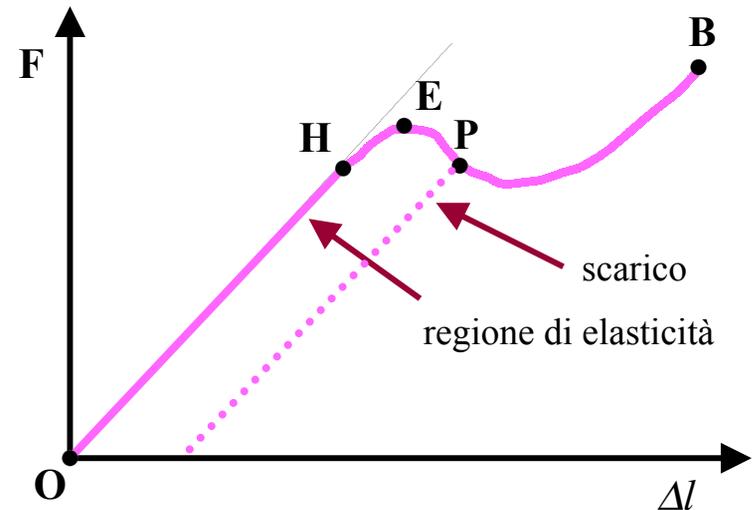
Punto B: il punto in cui si verifica la rottura.

Nel campo proporzionale Δl ed F sono proporzionali e vale

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{legge di Hooke}$$

dove

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{è la forza per unità di area della sezione trasversale}$$



Forza elastica

Esplicitando σ la legge di Hooke si può scrivere:

$$F = \frac{EA}{l} \Delta l$$

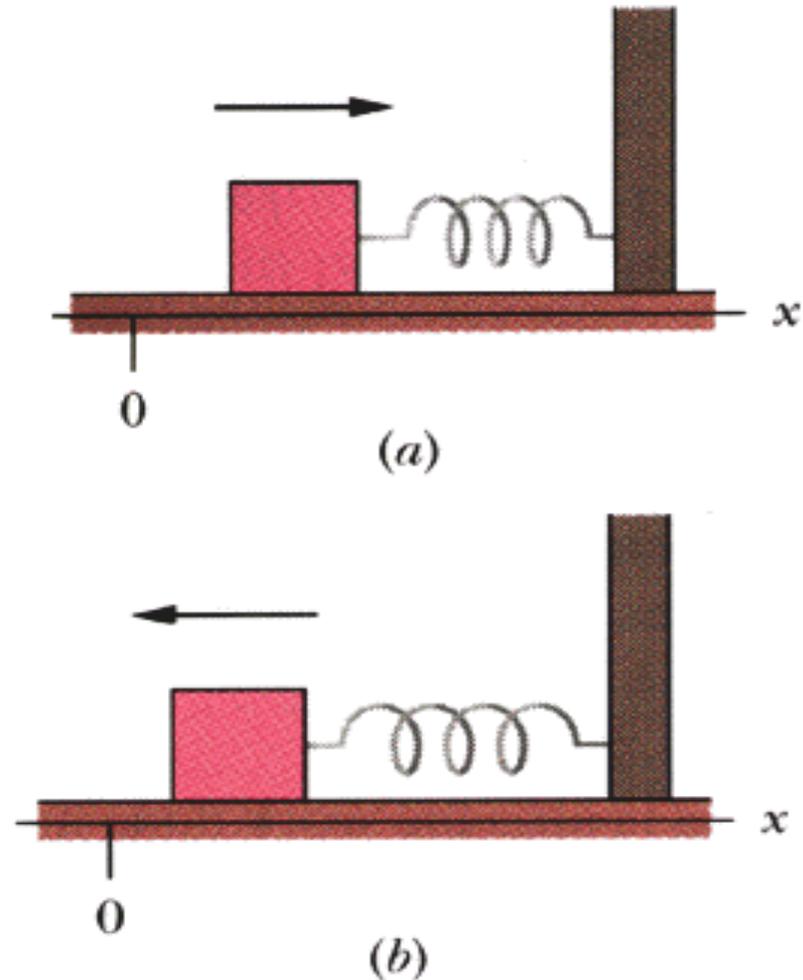
Definiamo $k = EA/l$ (costante che dipende solo dal materiale), per cui la legge di Hooke si può scrivere

$$F = k s$$

($s =$ allungamento del corpo elastico)

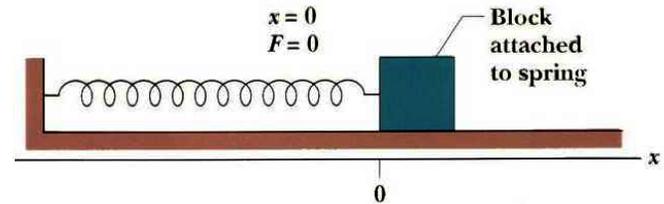
Questa legge può essere applicata a qualsiasi corpo elastico.

Il caso più semplice è quello di una molla allungata sotto l'azione di una forza esterna.



Deformazione elastica di una molla

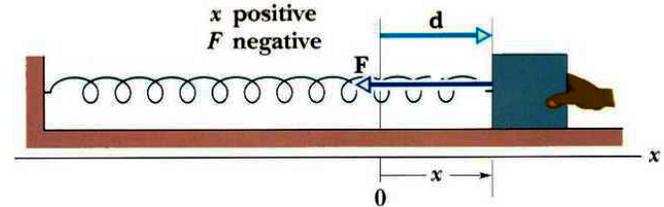
La molla è a riposo in posizione di equilibrio.



(a)

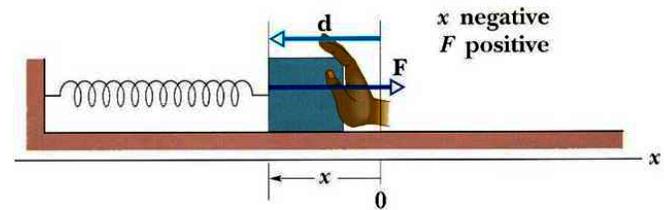
La molla viene allungata di una quantità x . La molla tende a ritornare alla propria posizione di riposo, mediante una forza di richiamo $F = -kx$ (negativa perché opposta allo spostamento).

Per mantenerla allungata occorrerà applicare una forza esterna $F' = kx$.



(b)

Nel caso di una compressione la situazione è la stessa, con i vettori diretti in verso opposto.



(c)

Accumulo di energia attraverso la deformazione elastica

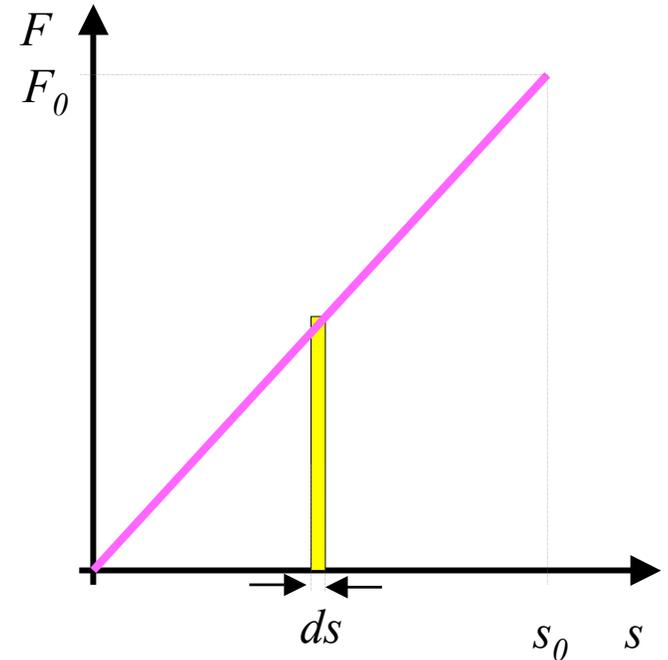
Ogni volta che per effetto di una forza la molla compie uno spostamento, viene accumulato del lavoro che verrà recuperato durante lo scarico.

Poiché la forza dipende dallo spostamento, non è possibile calcolare il lavoro con un semplice prodotto forza-spostamento.

È comunque possibile calcolare l'energia accumulata semplicemente osservando il grafico della forza in funzione dello spostamento.

Suddividiamo lo spostamento in tanti intervalli infinitesimali di lunghezza ds , nei quali la variazione di k può essere considerata trascurabile. Il lavoro in quel tratto risulta essere l'area del sottile rettangolo di base ds e altezza kx . Ripetendo l'operazione per tutti i piccoli allungamenti compresi tra 0 ed s_0 , e sommando tutti i contributi si troverà che il lavoro prodotto sarà l'area del triangolo avente lati s_0 e F_0 . E cioè:

$$W = \frac{s_0 F_0}{2} = k \frac{s_0^2}{2}$$

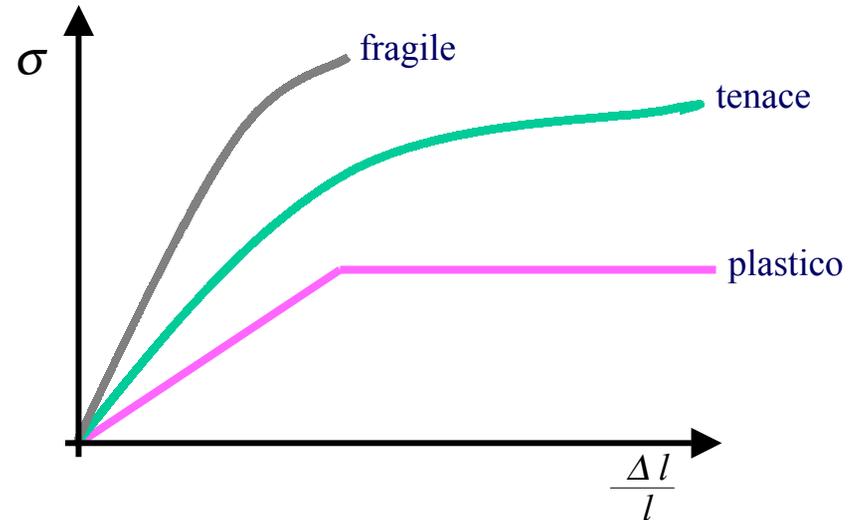


Resistenza dei materiali

Materiali fragili: sopportano solo una breve deformazione prima di giungere alla rottura.

Materiali tenaci: hanno dapprima un campo elastico, seguito da un notevole allungamento plastico, prima di arrivare alla rottura.

Materiali plastici: si allungano raggiungendo una certa tensione senza possibilità di un ulteriore aumento (ad es.: la gomma da masticare).



Materiali che presentano le stesse caratteristiche in tutte le direzioni sono detti **isotropi**. La maggior parte dei materiali utilizzati nella tecnica sono isotropi, mentre la maggior parte dei materiali biologici sono **anisotropi**, in quanto, in natura, vengono sollecitati diversamente nelle due direzioni perpendicolari.

Struttura molecolare ed elasticità

Esiste una relazione precisa tra struttura molecolare ed elasticità dei materiali. Per comprenderla dividiamo i materiali in due vaste categorie:



Ad alto modulo di elasticità.

La modesta capacità di allungamento è dovuta alla loro struttura cristallina. Gli atomi sono disposti regolarmente ed occupano posizioni fisse, mantenute da forze di legame molto intense ma aventi un raggio d'azione molto limitato. Per generare in loro minime deformazioni occorre applicare forze molto elevate. Se però si riesce a provocare un allungamento che superi il raggio d'azione di queste forze i legami vengono meno e il corpo si rompe.



A basso modulo di elasticità.

Si tratta di materiali con alta capacità di allungamento. In prevalenza sono materiali biologici. Hanno lunghe molecole a forme di catena, che non presentano un orientamento fisso. Gli atomi di molecole diverse possono legarsi tra loro formando concatenamenti tra molecole. Durante l'allungamento le catene che si trovano tra i vari punti di connessione si allungano, causando deformazioni molto elevate.

Il moto armonico

Un sistema meccanico in grado di oscillare è costituito da una massa che, deviata dallo stato di equilibrio viene fatta tornare alla posizione originale mediante una forza di richiamo proporzionale allo spostamento.

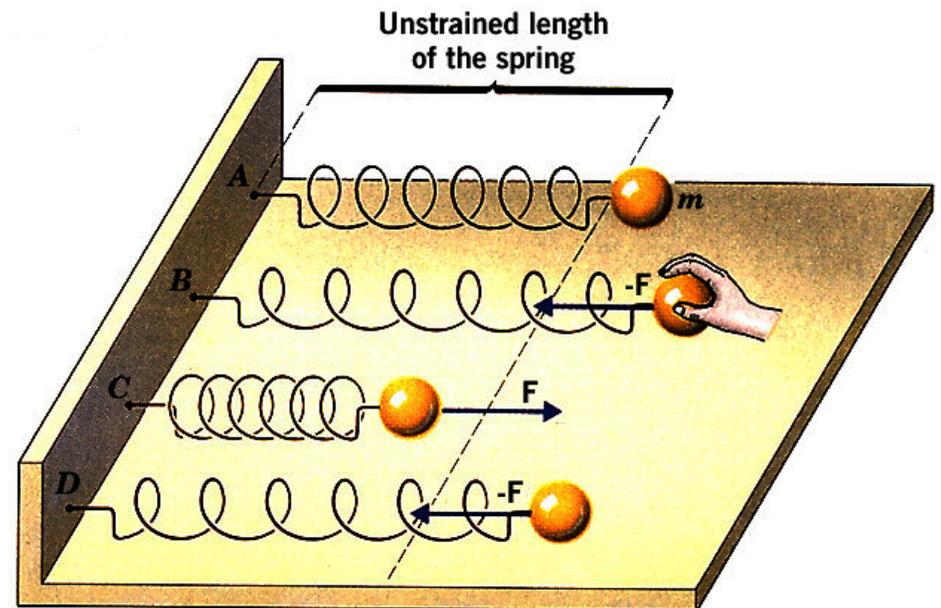
Sia ha moto armonico quando la forza di richiamo e lo spostamento sono direttamente proporzionali.

Esempio.

Una massa posta su una superficie priva di attrito viene mantenuta nella sua posizione originaria da una molla di costante elastica k .

La forza di richiamo è $F = -kx$, con il segno negativo ad indicare che la forza agisce sempre in senso contrario allo spostamento.

Il moto armonico del sistema è descritto in figura. Si noti che quando lo spostamento è massimo, anche la forza raggiunge il suo limite superiore, mentre la velocità è nulla.



Viceversa quando la massa attraversa la posizione di equilibrio si avrà $F = x = 0$, e la sua velocità sarà massima.

Analogia tra oscillazioni armoniche e moto circolare

Consideriamo un moto circolare uniforme mantenuto da una forza centripeta $F_z = m r \omega^2$ e studiamone la proiezione sull'asse verticale disegnato il figura.

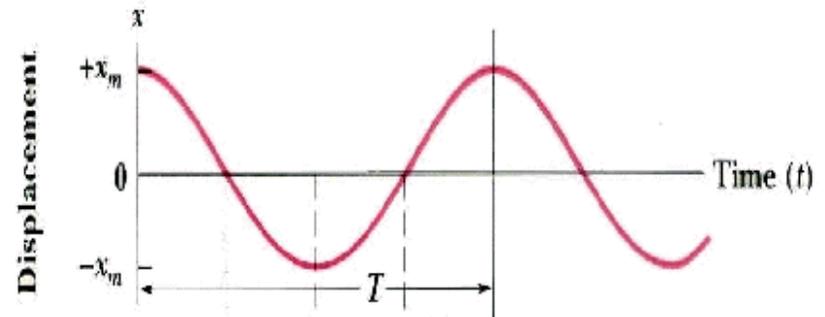
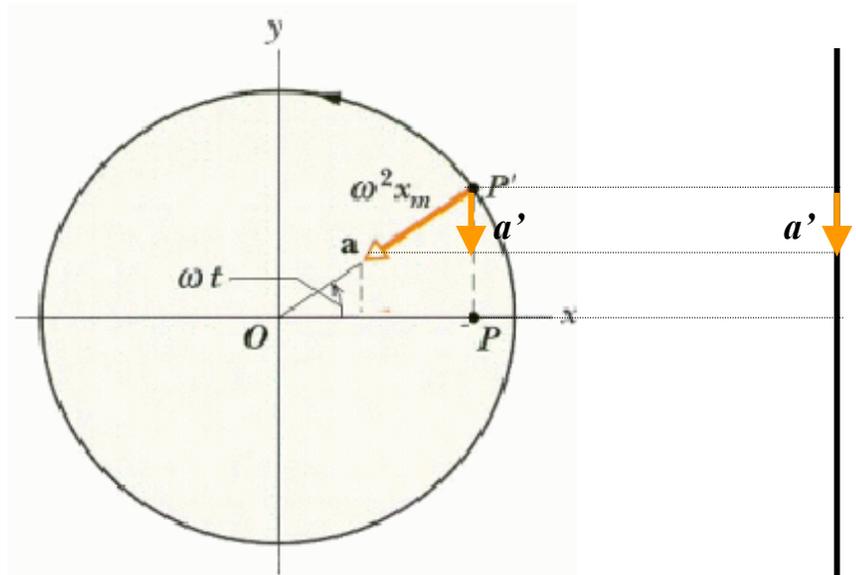
Per il moto proiettato valgono le relazioni:

$$\begin{cases} x = r \sin \omega t \\ F' = -m r \omega^2 \sin \omega t = -m r \omega^2 x \end{cases}$$

che sono simili alle equazioni del moto oscillatorio di una molla di costante $k = m \omega^2$.

In generale ogni moto armonico sarà potrà essere descritto con le leggi orarie scritte sopra, nelle quali ω , detta pulsazione del moto, conterrà le informazioni sul sistema esaminato.

(ad es.: $\omega^2 = k/m$ nel caso delle oscillazioni di una massa m vincolata ad una molla di costante k ; ma si ha anche $\omega^2 = g/l$ nel caso delle oscillazioni di un pendolo di lunghezza l .)



Moto armonico: alcune definizioni

Posizione, velocità ed accelerazione di un moto armonico mostrano, nel grafico spazio-tempo, andamenti tipici delle funzioni trigonometriche.

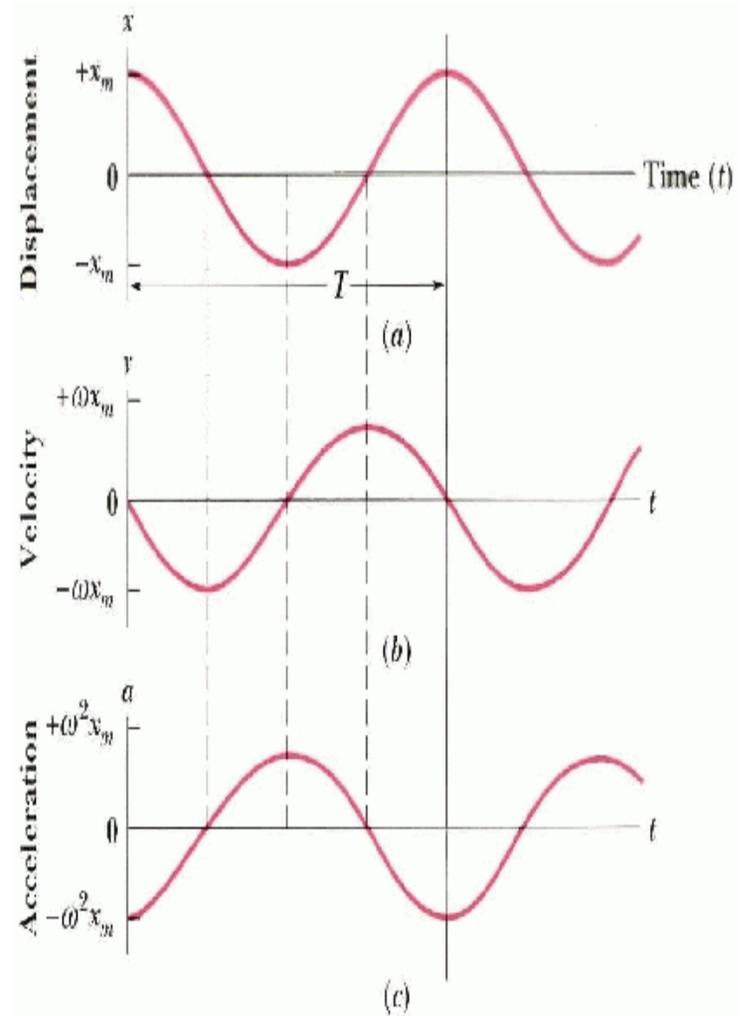
Elongazione: distanza dallo stato di equilibrio. Oscilla tra i valori $-r$ e r . L'elongazione massima viene chiamata **ampiezza**.

L'oscillazione è periodica, cioè dopo un certo intervallo di tempo, detto **periodo di oscillazione** T , l'azione si ripete. L'unità di misura del periodo è il secondo.

Si definisce **frequenza** f il numero delle oscillazioni al secondo. Viene indicata in s^{-1} o in Hertz.

Valgono le relazioni:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$



Oscillazioni smorzate

Nel caso reale la presenza dell'attrito trasforma l'energia delle oscillazioni in calore non più riconvertibile in energia meccanica. Per questo motivo l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce al passare del tempo. In questo caso siamo in presenza di oscillazioni smorzate.

Dalla condizione di equilibrio si ottiene

$$F_{inerzia} + F_{attrito} + F_{elastica} = 0$$

che porta all'equazione differenziale

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

dove si è effettuata la sostituzione $F_{attrito} = b v$.

L'equazione ha soluzione:

$$x(t) = r e^{-\beta t} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t$$

dove

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La presenza dell'esponenziale nell'equazione del moto causa la diminuzione dell'ampiezza di oscillazione

