Unità didattica 2

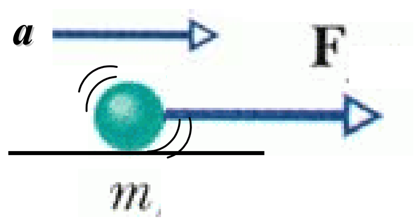
- Dinamica

Leggi di Newton

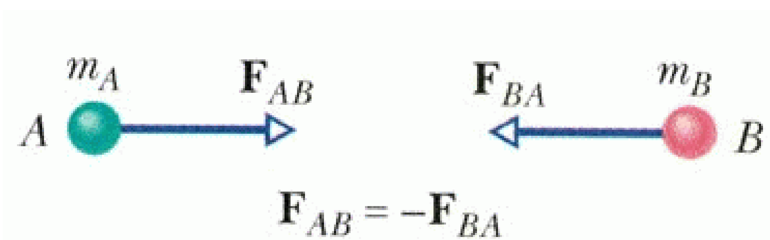
1. Principio di inerzia: un corpo libero (cioè un corpo che non interagisce con alcun altro corpo) permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

2. Quando su un corpo agisce una forza (interazione con un altro corpo) si ha una variazione della sua velocità e quindi un'accelerazione. Tale forza è proporzionale all'accelerazione ed il fattore di proporzionalità è detto massa *m*.

$$F = m\,a$$



3. Principio di azione e reazione: se un corpo *A* esercita su un corpo *B* una forza, allora anche il corpo *B* esercita una forza uguale ma contraria sul corpo *A*.



Le forze

L'equazione $F = m\,a$ significa che F è la forza necessaria per imprimere ad un corpo di massa m un'accelerazione a. Pertanto la sua unità di misura, il Newton,

$$1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-1}$$

è definito come la forza necessaria per imprimere ad una massa unitaria un'accelerazione unitaria.

Tipi di forze

Forze di contatto.
Hanno un raggio di azione molto limitato dovuto all'interazione delle singole molecole (10^{-11}-10^{-10} m).
Es.: forze di compressione, d'urto, di coesione e di attrito.

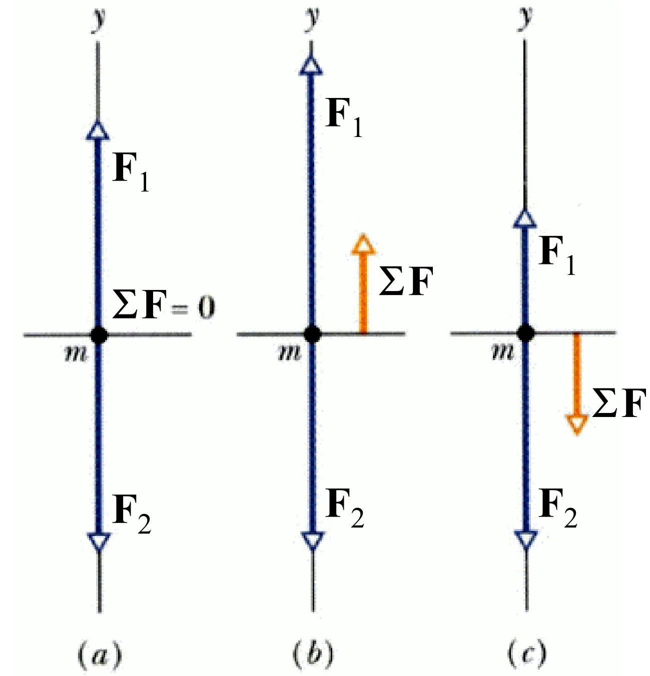
Forze ad effetto a distanza.
Hanno un raggio di azione infinito (anche se la loro azione diminuisce all'aumentare della distanza).
Es.: forze gravitazionali, elettriche e magnetiche.

Composizione di forze

Le forze sono grandezze vettoriali. Pertanto se su un punto agiscono una o più forze, esse vanno sommate secondo le regole vettoriali.

Se la risultante (cioè la somma) di tutte le forze che agiscono su un punto è pari a zero, si ha l'equilibrio (non ha luogo alcun'accelerazione e pertanto nessuna variazione del moto).

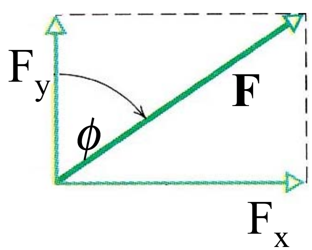
Quando la somma di tutte le forze applicate nel punto è non nulla, allora esiste una forza risultante, che comporta un'accelerazione (e quindi una variazione del moto).



Esempio di somma di forze di verso opposto.

$F_x = F \, sin \, \phi$

$F_y = F \, cos \, \phi$

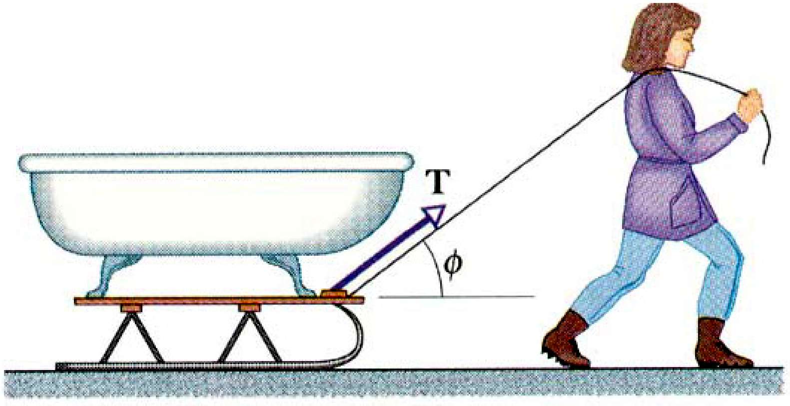


$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \qquad \tan\phi = \frac{F_y}{F_x}$$

Esempio di scomposizione di una forza lungo le direzioni individuate da un sistema di assi cartesiano..

Esempio di forza applicata

La bambina tira la slitta su cui è posta una vasca di massa *m*, applicando alla fune una tensione ***T***.
A quale accelerazione ***a*** sarà soggetta la slitta?

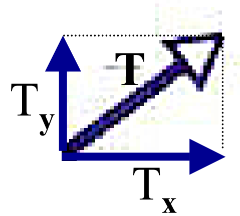


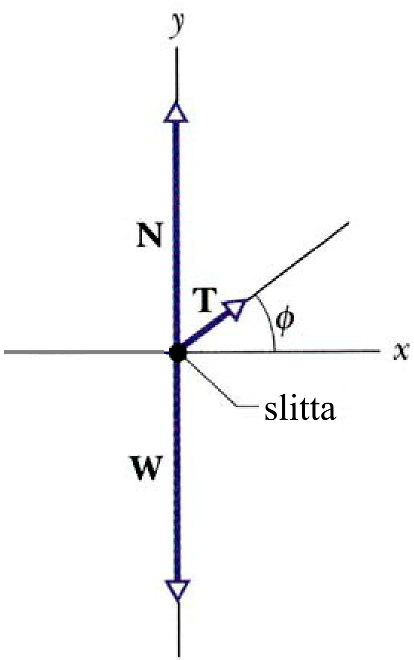
(*a*)

T = tensione della fune
W = forza peso della slitta
N = forza normale al suolo

La tensione può essere scomposta lungo i due assi del sistema di riferimento

$$\begin{cases} T_x = T \cos \phi \\ T_y = T \sin \phi \end{cases}$$





(*b*)

Lungo l'asse y la somma delle forze è nulla:

$N + T_y - W = 0$

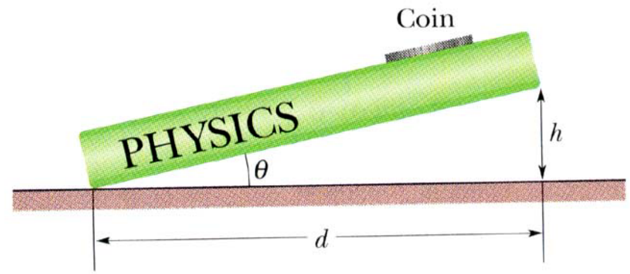
Lungo l'asse orizzontale si ha una forza risultante:

$T_x = m_{slitta}\, a$

$T \cos \phi = m_{slitta}\, a \Rightarrow \boxed{a = T \cos \phi / m_{slitta}}$

Esempio: il piano inclinato

Una moneta di massa *m*, scivola senza attrito da un'altezza *h* su un piano inclinato di un angolo θ con il piano orizzontale.
A quale accelerazione ***a*** sarà soggetta la slitta?

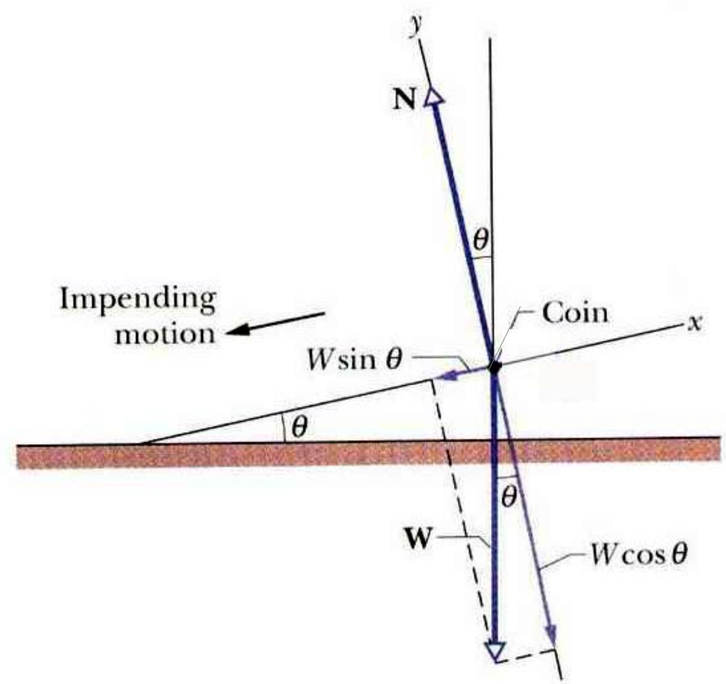


(*a*)

W = forza peso della moneta
N = forza normale esercitata dal piano

È conveniente scegliere un sistema di riferimento in cui l'asse *x* coincida con la direzione del moto.
Scomponendo la forza peso della moneta si ha:

$$\begin{cases} W_{\mathbf{x}} = W \, sin \, \theta \\ W_{\mathbf{y}} = W \, cos \, \theta \end{cases}$$



(*b*)

Lungo l'asse y la somma delle forze è nulla:

$$N - W_{\mathbf{y}} = 0$$

Lungo l'asse orizzontale si ha una forza risultante:

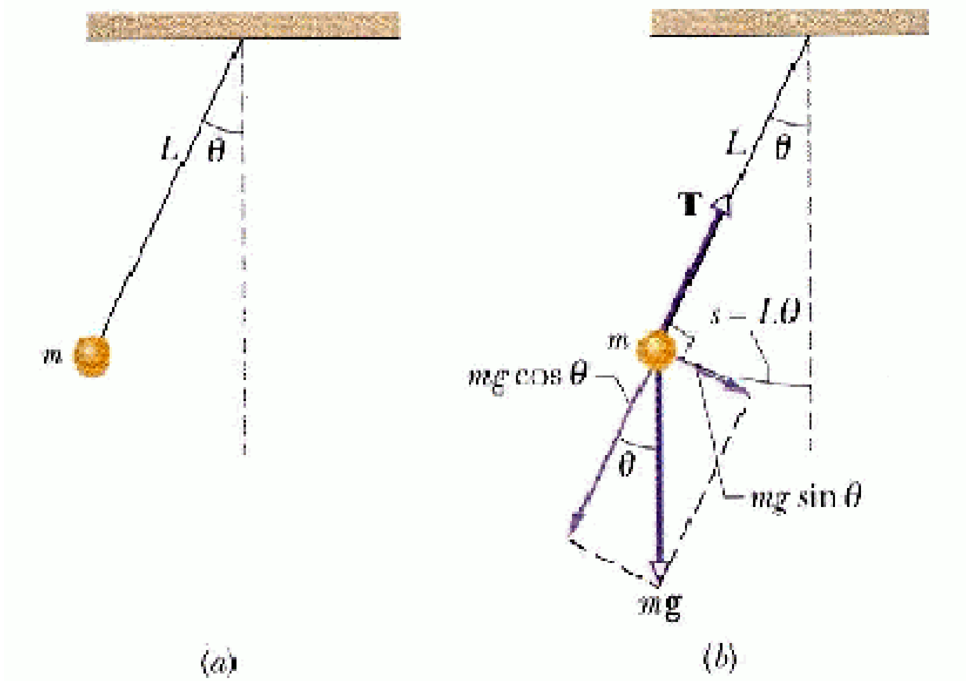
$$W_x = W \, sin \, \theta = m \, a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = W \, sin \, \theta / m}$$

Applicando le equazioni della cinematica è ora possibile dare una completa descrizione del moto della moneta.

Il moto del pendolo (1)

Una massa *m* è sospesa ad un filo senza peso di lunghezza *l*. un piano inclinato di un angolo θ con il piano orizzontale. Sulla massa *m* agisce verticalmente la forza peso ***mg*.**
A quale accelerazione ***a*** sarà soggetta la slitta?

mg = forza peso della moneta; **T** = tensione del filo.



È conveniente scegliere un sistema di riferimento in cui l'asse *x* coincida con la direzione del moto.

Scomponendo la forza peso della moneta si ha:

$$mg_x = mg\,sin\ \theta$$
$$mg_y = mg\,cos\ \theta$$

Lungo l'asse *y* le forze si annullano, mentre lungo la direzione *x* si ha una risultante ***F***:

$$\begin{aligned} F &= -mg\sin\theta \\ &\approx -mg\theta \\ &\approx -mg\frac{s}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)s \end{aligned}$$

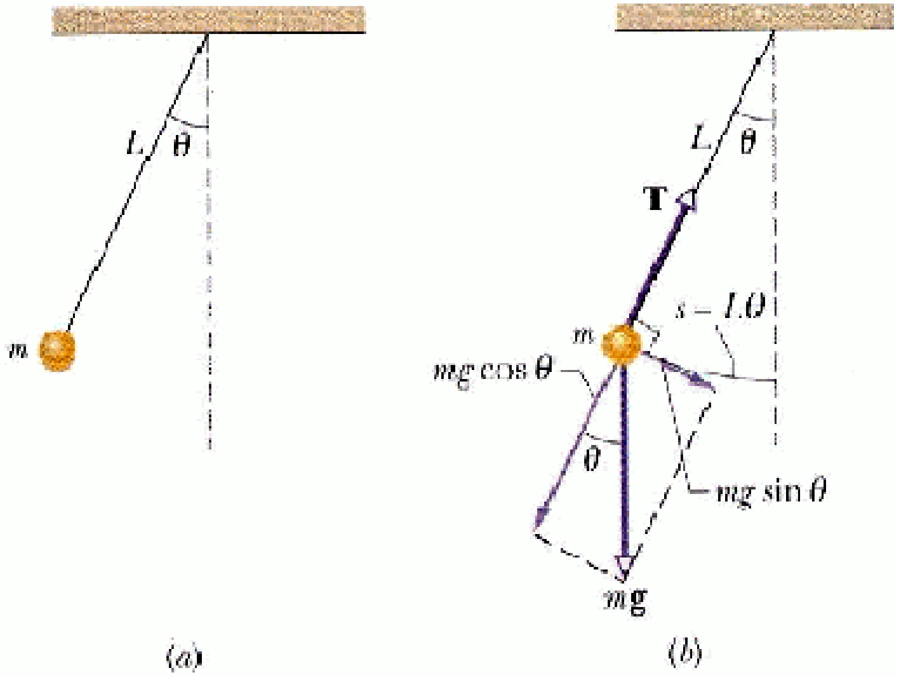
Approssimazione valida per angoli piccoli.

Il moto del pendolo (2)

Si definisce pulsazione ω del moto $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$
Da cui:

$$m \cdot a = -\left(\frac{mg}{L}\right)s$$

$$= -\left(\frac{g}{L}\right)s = -\omega^2 s$$



Si tratta quindi di un moto accelerato con accelerazione variabile proporzionale allo spostamento

$$a = -\left(\frac{\omega^2}{m}\right)s$$

Da questa relazione segue che:
•a è nulla quando s è 0 (quando il filo è verticale il pendolo è in posizione di riposo e rimane fermo);
•a cresce proporzionalmente ad s (ciò mantiene il moto delle oscillazioni).

La forza gravitazionale

La forza gravitazionale, responsabile del moto dei pianeti e dei satelliti, agisce a distanza tra due qualsiasi masse. Ha un raggio di azione infinito (anche se la sua azione diminuisce all'aumentare della distanza $F_G \propto r^{-2}$).

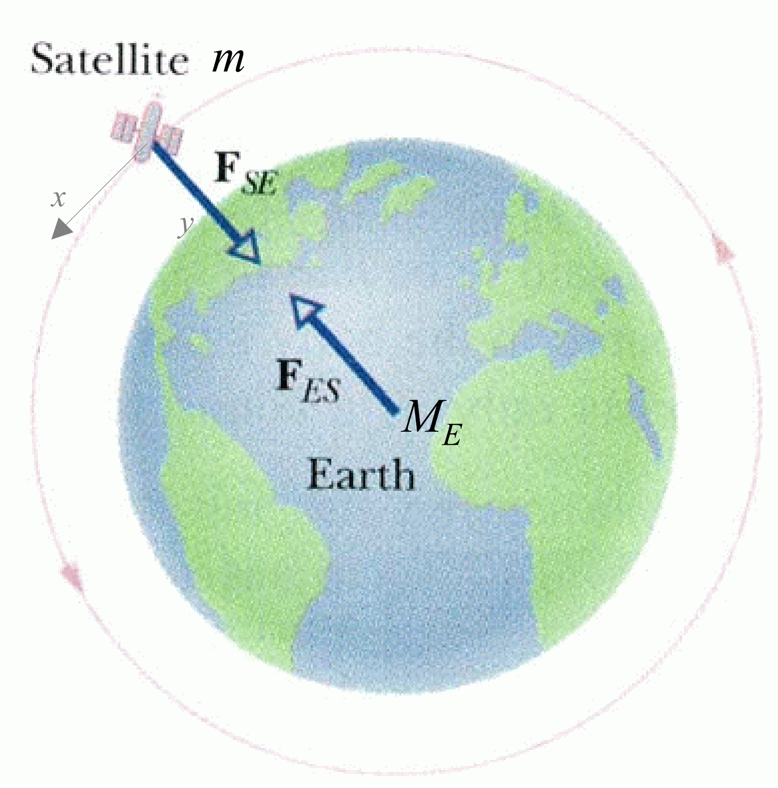
Un qualsiasi oggetto che si trovi ad un distanza r dalla terra risentirà di una forza attrattiva la cui intensità è data dalla relazione

$$F = G\frac{M_E m}{r^2} = m a_g$$

(M_E = massa della terra)

Dove G è detta costante gravitazionale e vale

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$$



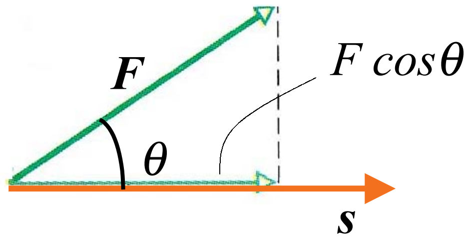
La forza gravitazionale fa si che un oggetto inizialmente fermo precipiterà sulla terra, mentre un oggetto che possiede inizialmente una velocità non nulla subirà una variazione del proprio moto.

In particolare se la componente iniziale della velocità è perpendicolare alla direzione della forza l'oggetto inizierà ad orbitare attorno alla terra compiendo un moto circolare uniforme (moto che avviene su una traiettoria circolare il cui centro coincide con il centro della terra e il cui modulo della velocità istantanea è costante nel tempo).

Lavoro ed energia

Quando una forza applicata ad un oggetto provoca uno spostamento viene compiuto un lavoro (W).
Si definisce lavoro il prodotto scalare della forza per lo spostamento

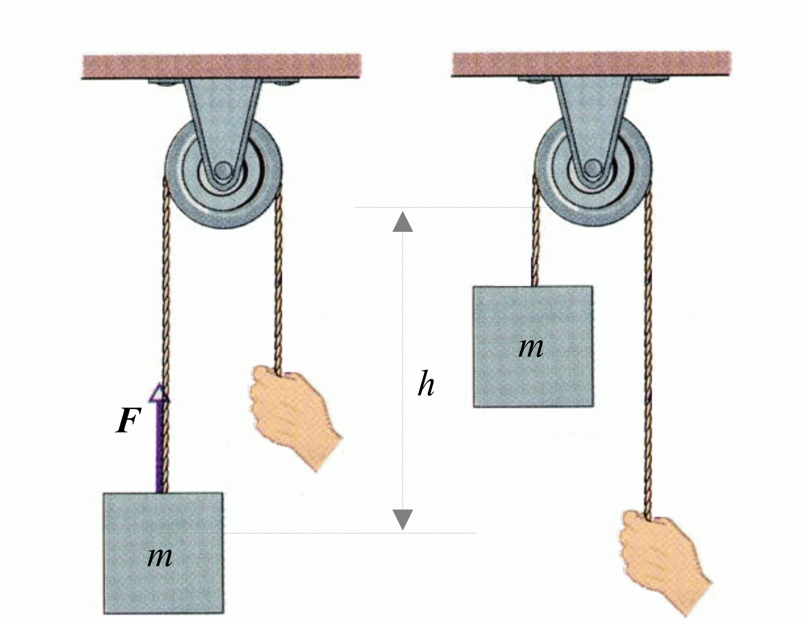
$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = F\, s \cos\theta$$



L'unità di misura del lavoro è il Joule (J), che corrisponde al lavoro effettuato da una forza di 1 N per spostare un corpo di 1 m.

Esempio.
Quanto lavoro occorre compiere per sollevare ad un'altezza h una massa m nel campo di gravità terrestre?

$$W = m\, g\, h$$



Il lavoro accumulato è detto energia.

L'energia accumulata come il lavoro di sollevamento è chiamata energia potenziale (E_p), o energia di posizione.

Il lavoro accumulato da una massa *m* che è stata messa in moto ad una velocità *v* è chiamato energia cinetica (E_k) ed è dato dalla formula

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

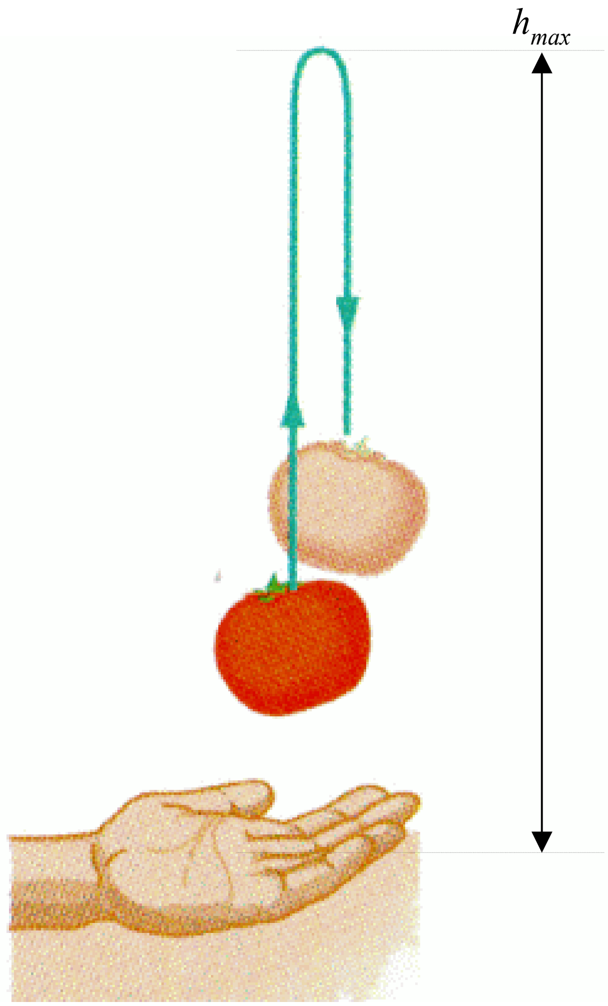
Principio di conservazione dell'energia

Si definisce sistema isolato un sistema in cui l'energia totale è costante.
Per tutti i sistemi isolati vale il principio di conservazione dell'energia:

In un sistema isolato l'energia totale è costante.

$$E_k + E_p = cost$$

L'energia non si crea né si distrugge, sono possibili solo trasformazioni delle diverse forme di energia fra loro.



Esempio: lancio verso l'alto di un oggetto.
All'istante iniziale si ha solamente energia cinetica:

$h = 0 \quad \rightarrow E_p = 0$

$v = v_0$ (vel. massima) $\quad \rightarrow E^k = \frac{1}{2} m v_0^2$

Quando l'oggetto raggiunge la sua massima altezza l'energia è stata tutta trasformata in energia potenziale:

$h = h_{max} \quad \rightarrow E_p = mgh_{max}$

$v = 0 \quad \rightarrow E_k = 0$

All'istante finale tutta l'energia è stata nuovamente trasformata in E. cinetica. Negli istanti intermedi del moto l'energia sarà in parte cinetica ed in parte potenziale, e per il principio di conservazione dell'energia valgono le relazioni:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{inizio}} = \underbrace{mgh_{max}}_{\text{fine}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_h^2 + mgh}_{\text{istante intermedio}}$$

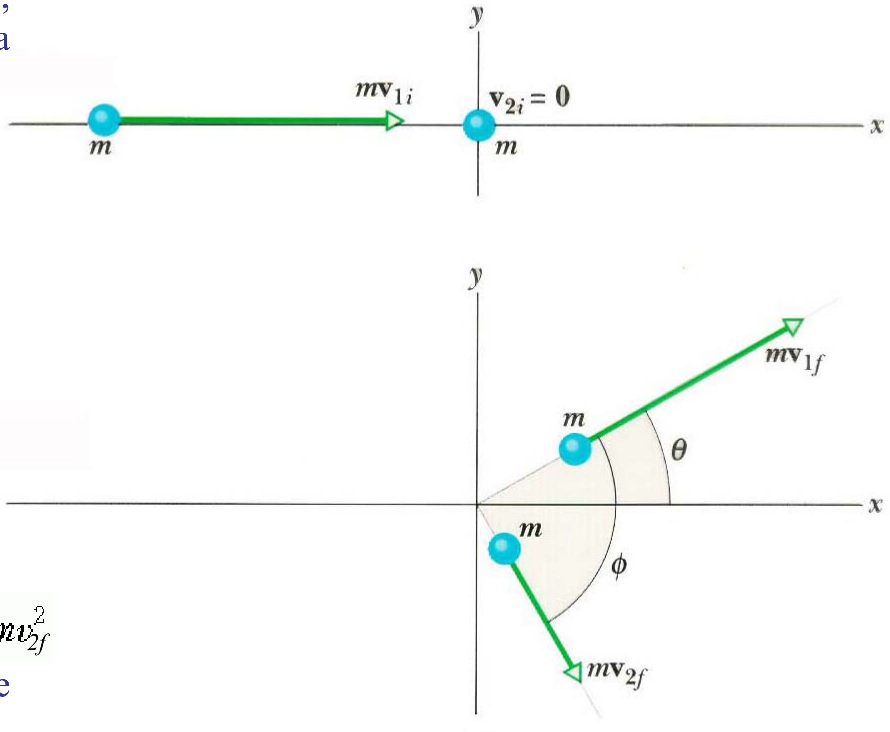
Dove v_h è la velocità dell'oggetto ad un'altezza h.

Quantità di moto

Si definisce quantità di moto ***p*** di un oggetto il prodotto della sua massa per la velocità $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.
In tutti i sistemi isolati in cui la massa si conserva vale il principio di conservazione della quantità di moto:

In un sistema isolato la quantità di moto è costante ($\boldsymbol{p} = cost$)

Esempio: urto di due palle da biliardo (caso di urto elastico, in cui non ci siano deformazioni e quindi sia conservata la massa totale del sistema)



(a)

Prima dell'urto

$$p_{1i} = mv_{1i} \qquad\qquad p_{2i} = 0$$

Dopo l'urto

$$p_{1f} = mv_{1f} \qquad\qquad p_{2f} = mv_{2f}$$

Applicando la conservazione della quantità di moto si ha:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \qquad\qquad mv_{1i} = mv_{1f} + mv_{2f}$$

Applicando anche la conservazione dell'energia si ha:

$$E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \qquad\qquad \frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2$$

Le due equazioni così ottenute caratterizzano completamente il sistema.

Momento di una forza

Se su di un corpo rigido agiscono forze uguali e contrarie si ha, in generale, una rotazione.

L'effetto rotatorio di una forza applicata dipende quindi sia dall'intensità e dalla direzione della forza, sia dalla distanza del suo punto di applicazione dal punto di rotazione.

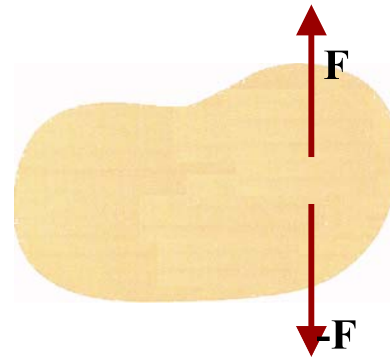
Tale effetto viene quantificato dal momento della forza definito come

$$\boldsymbol{M} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

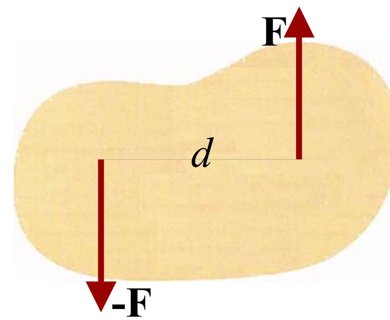
Dove $\boldsymbol{r}$ è il vettore che va dall'asse della rotazione al punto di applicazione della forza e ϕ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{F}$. Il modulo di $\boldsymbol{M}$ vale $r\,F\,sin\phi$.

Un corpo rigido sul quale agiscono più forze è in equilibrio rotazionale se la somma dei momenti di tutte le forze è pari a zero.

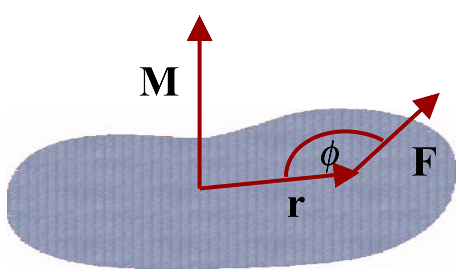
$$(\sum \boldsymbol{M} = 0)$$



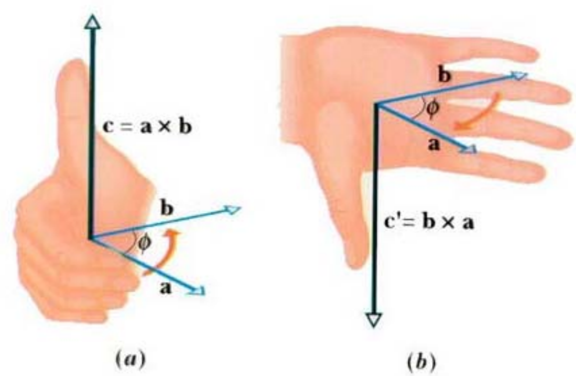
Se le due forze applicate agiscono sulla stessa linea e sono uguali ed opposte, non avviene alcuna rotazione



Se le due forze uguali ed opposte agiscono linee diverse, si avrà la rotazione del corpo.



Momento di una forza rispetto all'asse di rotazione.



La regola della mano destra per ricavare la direzione del prodotto vettoriale.

Il moto rotatorio

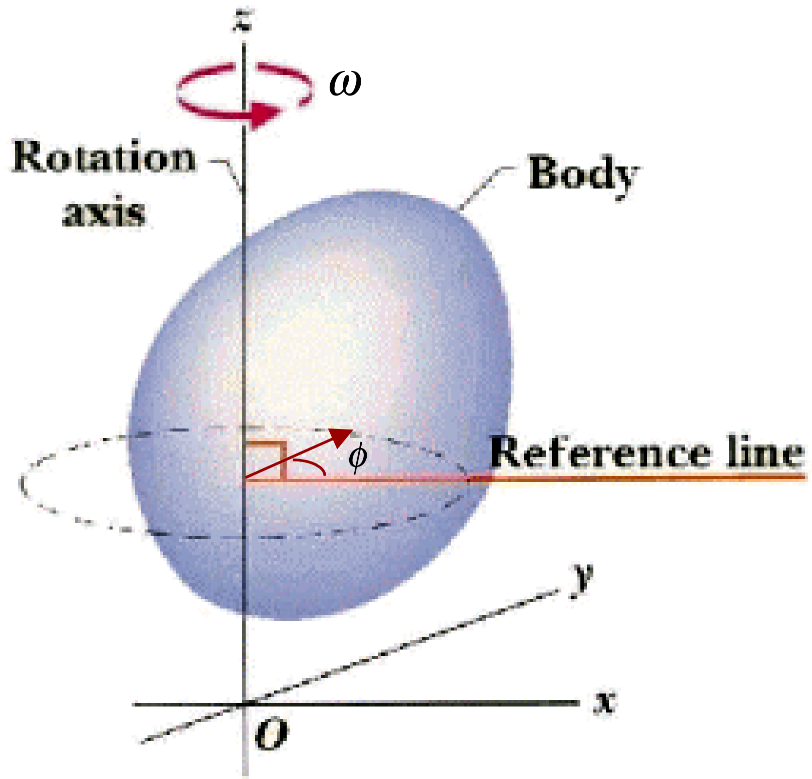
Quando su di un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse agisce un momento delle forze totale non nullo, allora il corpo entra in rotazione.

La posizione istantanea del corpo viene descritta dallo spostamento angolare ϕ, cioè dalla posizione relativa (in radianti) di un punto del corpo esterno all'asse di rotazione, rispetto alla propria posizione iniziale.

In analogia con il moto rettilineo, lo spostamento angolare per unità di tempo è detto velocità angolare ω e la variazione di velocità angolare nel tempo è chiamata accelerazione angolare α.

$$\omega \equiv \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad \alpha \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Nonostante ogni punto del corpo possieda differenti velocità ed accelerazione istantanee, ϕ, ω e α sono le stesse per tutti i suoi punti, pertanto con queste tre sole grandezze è possibile caratterizzare completamente il suo moto di rotazione.



Energia di rotazione

Un corpo in rotazione possiede energia cinetica. Poiché ogni punto del corpo possiede una diversa velocità istantanea l'energia totale è la somma dei contributi energetici di ogni punto.

Considerando solo l'*i*-esimo elemento di massa m_i, velocità v_i e distanza dall'asse di rotazione r_i si ha:

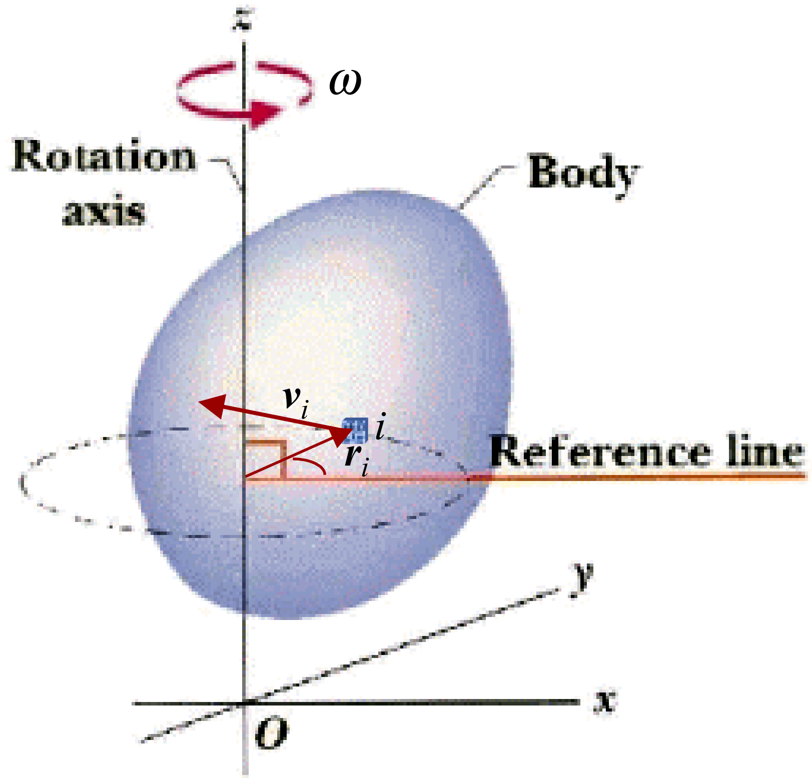
$$E_{ri} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i \ \omega^2}{2}$$

Dove si è usato il fatto che $\omega = v_i / r_i$ per ogni punto. Sommando i contributi di tutti i punti si ottiene l'energia di rotazione del corpo:

$$E_r = \Sigma_i E_{ri} = \Sigma_i \frac{\Delta m_i r_i \ \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma_i \Delta m_i r_i$$

Si definisce momento d'inerzia I la somma $\Sigma_i \Delta m_i r_i$
L'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione si può quindi scrivere

$$\boxed{E_r = \frac{I \omega^2}{2}}$$



Analogia tra moto rotatorio e moto rettilineo

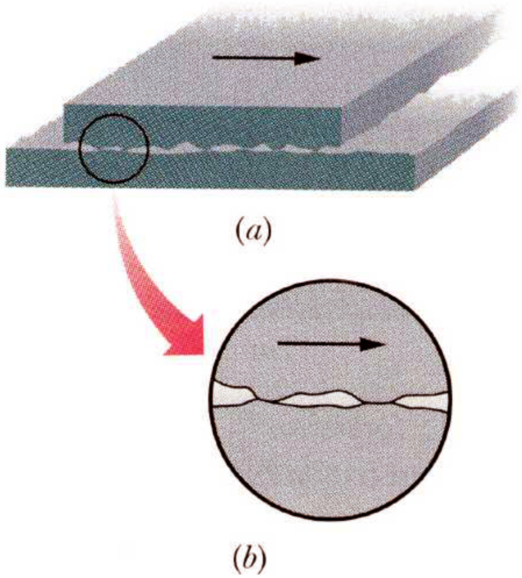
Moto rettilineo		Moto rotatorio	
spostamento	$\boldsymbol{s}$	spostamento angolare	ϕ
velocità	$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{s} / dt$	velocità angolare	$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\phi} / dt$
accelerazione	$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt$	accelerazione angolare	$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega} / dt$
en. cinetica di traslaz.	$E_k = (mv^2) / 2$	en. cinetica di rotazione	$E_r = (m\omega^2) / 2$
massa	m	massa	m
forza	$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$	momento della forza	$\boldsymbol{M} = I\,\boldsymbol{\alpha}$
quantità di moto	$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$	momento della quantità di moto	$\boldsymbol{l} = I\,\boldsymbol{\omega}$

Per ogni i-esimo punto del corpo rigido valgono inoltre le seguenti relazioni tra i moduli dei vettori velocità, accelerazione e raggio:

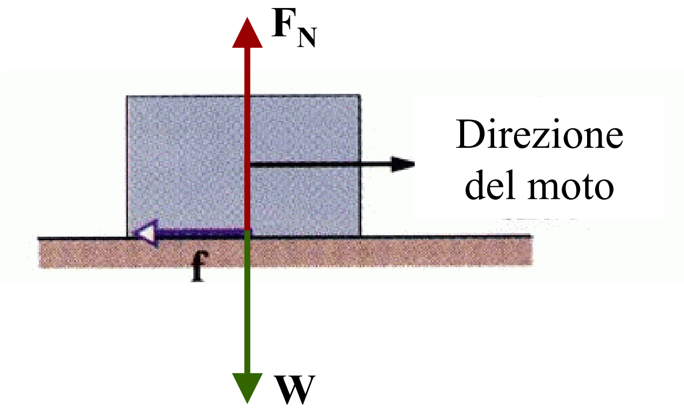
$$\alpha = \frac{a_i}{r_i} \qquad \omega = \frac{v_i}{r_i}$$

Le forze di attrito

Fino ad ora si è sempre supposto che nei moti studiati non avvenissero fenomeni di resistenza. In realtà ad ogni movimento di un corpo intervengono sempre forze di attrito che si oppongono ad esso.



Le forze di attrito sono indispensabili alla nostra vita quotidiana, in quanto ci permettono di camminare, spostarci, accelerare, frenare, ecc. Ad es. senza l'attrito invece di camminare scivoleremmo , muovendoci di moto rettilineo uniforme, senza poter fermarci o curvare.
L'attrito fra due corpi solidi è dovuto alla presenza di microscopiche rugosità sulle superfici, non apprezzabili alla vista.

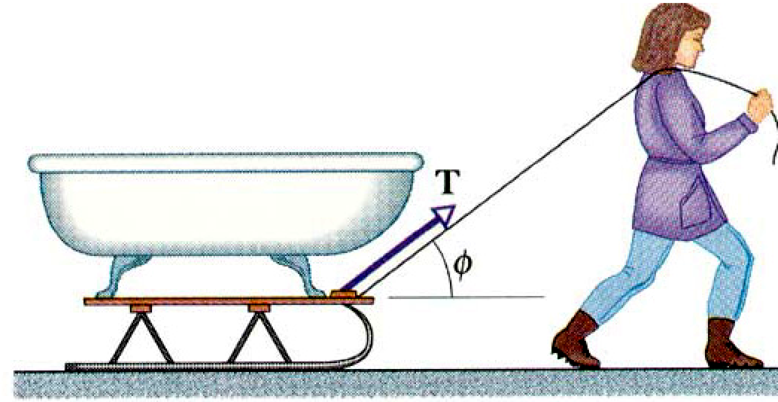


Questo tipo di attrito, detto attrito radente, dipende esclusivamente dalla forza con cui vengono premuti i due corpi (forza normale $\mathbf{F_N}$) e dal materiale di cui essi sono costituiti. Si ha:

$$\mathbf{F_R} = \mu_r \mathbf{F_N}$$

Dove μ_r è il coefficiente di attrito. È un numero adimensionale che dipende solo dal materiale. La forza di attrito è sempre applicata nel punto di contatto tra i due corpi, e ha direzione opposta a quella del moto.

Moto in presenza di attrito



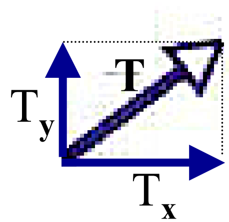
(a)

La bambina tira la slitta su cui è posta una vasca di massa *m*, applicando alla fune una tensione ***T***. Il corfficiente di attrito μ_r tra la slitta ed il suolo è noto.
A quale accelerazione ***a*** sarà soggetta la slitta?

T = tensione della fune
W = forza peso della slitta
N = forza normale al suolo
$\mathbf{F_R}$ **=** forza di attrito

La tensione può essere scomposta lungo i due assi del sistema di riferimento

$$\begin{cases} T_x = T\cos\phi \\ T_y = T\sin\phi \end{cases}$$



La forza di attrito vale $\quad \mathbf{F_R} = \mu_r \mathbf{N}$

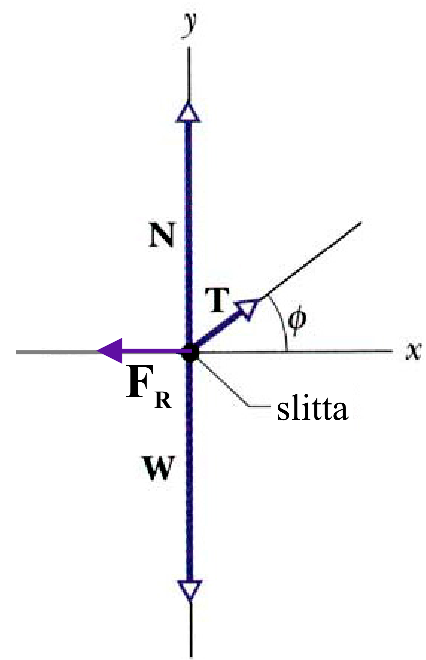
Lungo l'asse y la somma delle forze è nulla:

$$N + T_y - W = 0$$

Lungo l'asse orizzontale si ha una forza risultante:

$$T_x - F_R = m\,a$$

$$T\cos\phi - \mu_r N = m\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T\cos\phi - \mu_r N}{m}$$



(b)