Precorso di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Economia

Prof. Alessandro Spagnuolo
Università degli Studi di Ferrara

Dipartimento di Economia e Management

11-22 settembre 2017

Indice

Introduzione

Questa dispensa prende spunto da un precedente lavoro realizzato per le matricole del corso di Laurea in Scienze Biologiche dai tutori Pancaldi, Giantesio e Spagnuolo, e poi integrato da quest'ultimo per quanto concerne alcune osservazioni sulle applicazioni matematiche nel campo dell'economia.

Gli argomenti trattati in questo precorso si possono così riassumere:

Gli insiemi, le funzioni, i numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali, i numeri reali, i monomi, i polinomi, la scomposizione in fattori, le frazioni algebriche, le equazioni e le disequazioni lineari, i sistemi lineari, le equazioni e le disequazioni di 2^o *grado, risoluzione di equazioni di ordine superiore al* 2^o*, sistemi vari di equazioni e disequazioni, funzioni esponenziali e logaritmiche, nozioni base di geometria euclidea, piano cartesiano, parabola, ellisse (e circonferenza), iperbole nel piano cartesiano.*

Quanto segue è un riassunto dei contenuti che verranno trattati durante il precorso per gli studenti di Economia e, in quanto tale, presenta solo una parte di quanto visto in aula riguardo ai suddetti argomenti; non deve essere pertanto considerata una fonte esauriente riguardo le conoscenze matematiche di base richieste. È consigliabile integrare lo studio con gli appunti delle lezioni e seguire un qualsiasi testo di Matematica degli istituti superiori. Si segnalano in particolare due libri consultabili nella biblioteca di Economia:

1) Matematica Precorsi. Autori: D'Amico et al. EGEA 2^o *edizione.*

2) Matematica di base. Autore: Tommei. Apogeo Education-Maggioli Ed.

Per quanto riguarda gli esercizi si rimanda a quanto svolto in aula, mentre per la parte di geometria si consiglia di provare a disegnare tutti i concetti mentre si studia.

Per qualsiasi chiarimento sul precorso è possibile scrivere all'indirizzo e-mail: *spglsn@unife.it*.

Capitolo 1

Insiemi

Il termine **insieme** in matematica designa un contenitore in grado di contenere oggetti, di diverse tipologie, che vengono chiamati **elementi** dell'insieme; se un oggetto fa parte dell'insieme si dice che gli **appartiene**. Generalmente indichiamo con le lettere maiuscole gli insiemi, mentre con quelle minuscole gli elementi. Se a fa parte di un insieme A, scriviamo quindi che $a \in A$ e leggiamo: *l'elemento a appartiene all'insieme A*.

Nella teoria degli insiemi **l'insieme vuoto** è l'insieme che non ha elementi e si indica con il simbolo $\emptyset$. Si indica invece con **insieme universo** (indicato con U) quel particolare insieme che contiene tutti gli elementi e tutti gli insiemi in quel momento presi in considerazione, compreso quindi anche se stesso e l'insieme vuoto.
Se tutti gli elementi dell'insieme B stanno anche in A, allora l'insieme B è un **sottoinsieme** di A ($B \subseteq A$).
Se A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A, allora $A = B$.
Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ e $B \neq \emptyset$, allora B è un sottoinsieme **proprio** di A ($B \subset A$). I sottoinsiemi **impropri** di un insieme sono solo l'insieme stesso e l'insieme vuoto.

L'intersezione di A e B ($A \cap B$) è l'insieme degli elementi comuni ad A e B Due insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune.

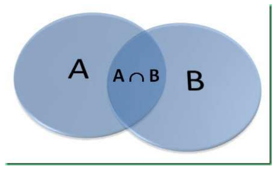


Figura 1.1: Intersezione di insiemi.

L'unione di A e B ($A \cup B$) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B.

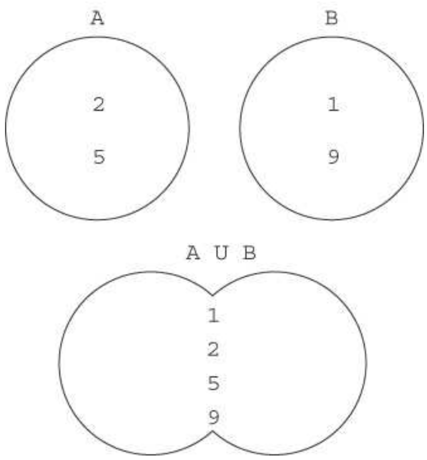


Figura 1.2: $A \cup B$

La differenza fra B e A ($B - A$) è l'insieme formato dagli elementi di B che non sono elementi di A.

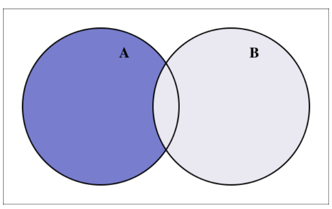


Figura 1.3: $A \setminus B$

Il **complementare** di un insieme A contiene gli elementi che stanno nell'universo ma non nell'insieme A.

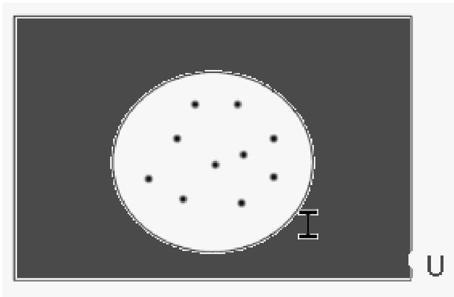


Figura 1.4: La parte in nero rappresenta il complementare di I.

Il **prodotto cartesiano** di A e B si indica $A \times B$ ed è costituito da tutte le coppie ordinate $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$. Il prodotto cartesiano non è commutativo.

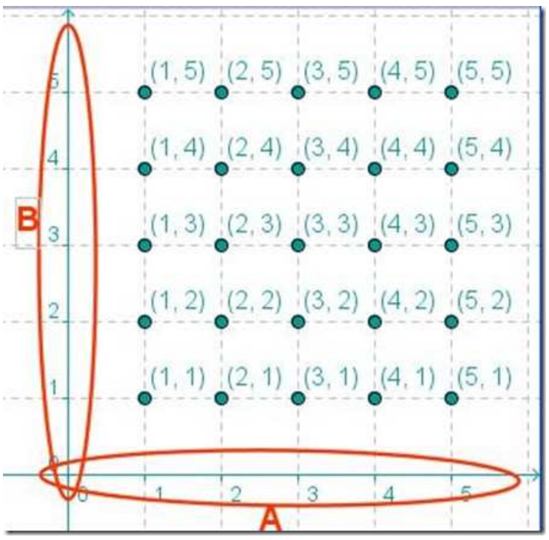


Figura 1.5: $A \times B$

L'insieme delle parti di A, $\wp(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. Una **partizione** di A è un sottoinsieme di $\wp(A)$ che non contiene $\emptyset$ in cui tutti i sottoinsiemi di A sono disgiunti e la loro unione è l'insieme A.

1. Dati i due insiemi A, B definiti per elencazione

$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\},$

dire se sono vere le seguenti affermazioni:

$1 \in A$

$\{2\} \in A$

$2 \notin A$

$\emptyset \subset A$

$2 \in B$

$\{2\} \subset B$

$A \cap B = \{1\}$

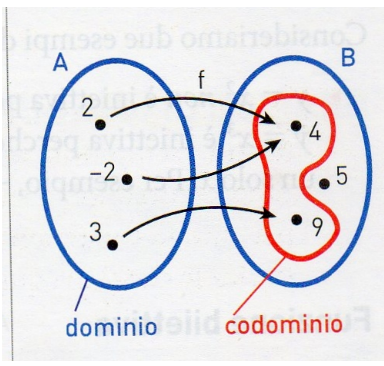
$A \cup B = \{1, 2, 3, \{2\}\}$

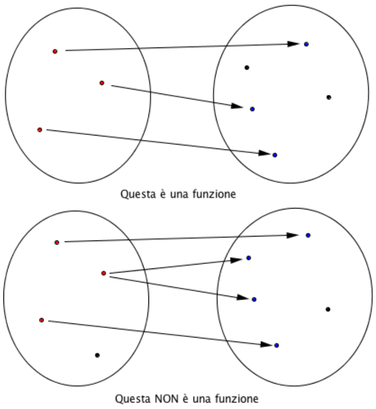
Capitolo 2

Funzioni

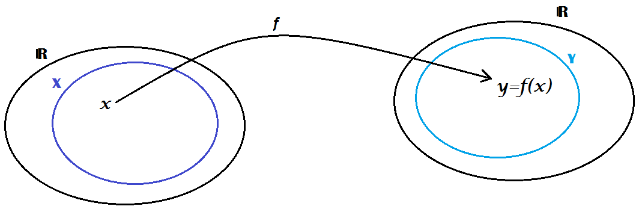
Concetto di funzione:
Parliamo di funzione ogni volta che il valore di una grandezza dipende dal valore di un'altra grandezza. La definizione formale di funzione data nel linguaggio insiemistico è il risultato di una lunga evoluzione.

Definizione formale:
Una **funzione** dall'insieme A all'insieme B, che indichiamo con $f : A \longrightarrow B$, è una relazione che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B. Chiamiamo A, **dominio** o **campo di esistenza** della funzione; B, **insieme di arrivo** della funzione e $f(A)$ **codominio** o **immagine** della funzione.
Nota bene: non sempre insieme d'arrivo e immagine coincidono.



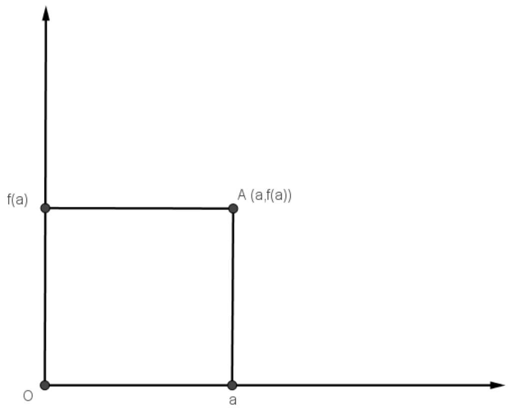


Una **funzione numerica** ha come dominio e come codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Data la funzione numerica $f : x \mapsto y = f(x)$, x si chiama **variabile indipendente** e y si chiama **variabile dipendente**.



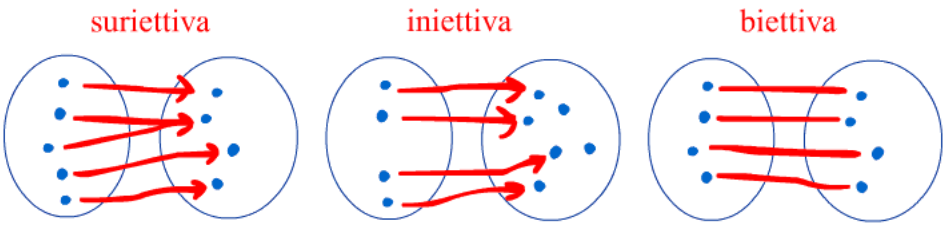
Rappresentazione cartesiana di una funzione

Consideriamo una funzione $f : A \longrightarrow B$; abbiamo detto che ad ogni elemento di A associamo uno ed un solo elemento di B, perciò possiamo innanzitutto considerare il prodotto cartesiano $A \times B$ che è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$, e poi considerare il suo sottoinsieme $\gamma = \{(a, b)|b = f(a), a \in A, b \in B\}$ che prende il nome di **grafico della funzione**.



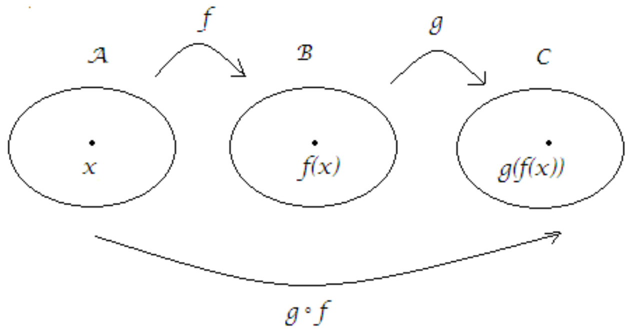
Quindi $P = (a, b) \in \gamma \Leftrightarrow b = f(a)$.

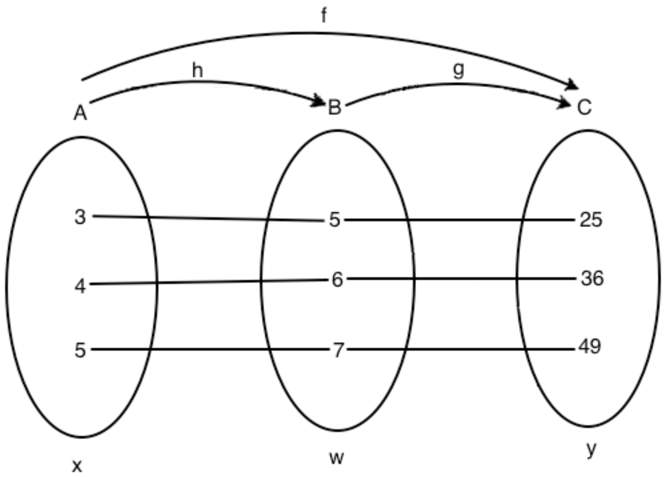
Una funzione da A a B è:
· **iniettiva** se a due **distinti** elementi di A sono associati elementi distinti di B;
· **suriettiva** quando **tutti** gli elementi di B hanno un elemento di A a cui sono associati;
· **biiettiva** quando è suriettiva e iniettiva, in tal caso si parla di **corrispondenza biunivoca**.



L'inversa di una funzione è definita se e solo se la funzione è biiettiva.

Date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si può definire la **funzione composta** $g \circ f : A \to C$, che ad ogni elemento $a \in A$ associa l'elemento di C così ottenuto:
· ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
· a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.





In generale non è vero che $g \circ f = f \circ g$.

2. Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 1$ allora:
$f(g(x)) = f \circ g = (3x + 1)^2$
$g(f(x)) = g \circ f = 3x^2 + 1$

Alcune funzioni esprimono proporzionalità particolari tra variabile indipendente e dipendente. Sia $k \in \mathbb{R}$:
$\cdot$ $y = kx$ esprime la proporzionalità diretta;
$\cdot$ $y = \frac{k}{x}$ esprime la proporzionalità inversa;
$\cdot$ $y = kx^2$ esprime la proporzionalità quadratica;

Capitolo 3

Numeri

3.1 Numeri Naturali $\mathbb{N}$

I numeri naturali $\mathbb{N} = \{\ 0, 1, 2, 3, ...\}$ servono per contare, possiamo quindi utilizzarli per indicare la **cardinalità** di un insieme. Per denotare un generico numero naturale si può usare una lettera dell'alfabeto, che viene chiamata **variabile numerica**. I numeri naturali sono infiniti, si dimostra infatti la **proprietà archimedea**: dati due numeri qualunque $a, b > 0$, esiste sempre un numero naturale n tale che $nb > a$. I numeri naturali costituiscono un **insieme ordinato** (cioè dotato di una relazione d'ordine) e possono essere rappresentati su una semiretta orientata.

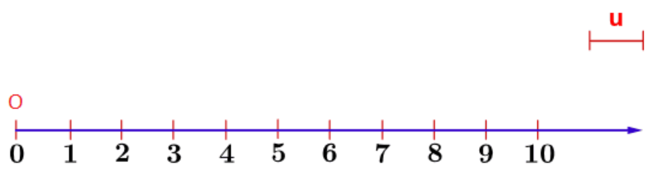


Figura 3.1: Rappresentazione dei numeri naturali.

Relazione d'ordine $>$: dati due numeri qualunque a, b diciamo $a > b \Leftrightarrow$ esiste un numero $c \neq 0$ tale che $a = b + c$; se togliamo la condizione $c \neq 0$ abbiamo la relazione $\geq$.

Le **quattro operazioni**: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Considereremo l'operazione di addizione come nota; la moltiplicazione viene definita come una addizione ripetuta, cioé il prodotto di a e b é dato da:

$$a \cdot b = a + a + a + ... + a \text{ (b volte)} = b + b + ... + b \text{ (a volte)}$$

Addizione e moltiplicazione sono **operazioni interne** in $\mathbb{N}$, cioè sono sempre possibili, la sottrazione e la divisione, invece, sono possibili solo in particolari condizioni (ed è questo uno dei motivi per cui si costruiscono nuovi insiemi numerici, comunque contenenti $\mathbb{N}$ e verificanti le sue proprietà, in cui però tali operazioni sono sempre effettuabili; vedremo quindi l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ in cui la sottrazione è un'operazione interna, ma non la divisione. Costruiremo perciò l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in cui sia la sottrazione che la divisione sono operazioni interne, e così via).

Una **potenza** é un'operazione che associa ad una coppia di numeri a e n, detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a. Qualsiasi numero elevato alla 1 dà come risultato se stesso, un numero diverso da 0 elevato alla 0 dà come risultato 1, **l'espressione** 0^0 **non ha significato**.

Le operazioni vanno svolte nell'ordine seguente:
1. potenze
2. moltiplicazioni e divisioni
3. addizioni e sottrazioni

e le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza.

Le **proprietà delle operazioni**:

Proprietà dell'addizione	
proprietà	espressione
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della moltiplicazione	
proprietà	espressione
commutativa	$a * b = b * a$
associativa	$(a * b) * c = a * (b * c)$
distributiva a destra	$(a + b) * c = a * c + b * c$
distributiva a sinistra	$a * (b + c) = a * b + a * c$

Proprietà della sottrazione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$	$a \geq b$
	$a - b = (a - n) - (b - n)$	$a \geq b \geq n$

Proprietà della divisione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a : b = (an) : (bn)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$
	$a : b = (a : n) : (b : n)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0), b = hn, (h \neq 0)$
distributiva	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$c \neq 0, a = kc, b = hc, a + b = mc, (k, h, m \neq 0)$

Proprietà delle potenze		
proprietà	espressione	con
prodotto di potenze di uguale base	$a^m a^n = a^{m+n}$	
quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$m \geq n, a \neq 0$
potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{mn}$	
prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n b^n = (ab)^n$	
quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$b \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$

Diremo **multiplo** di a il prodotto di a stesso per un qualunque numero naturale. Un numero naturale a è **divisibile** per un altro numero naturale b, se a é un multiplo di b. In tal caso diremo che b é un **divisore** (o **sottomultiplo**) di a.

3.1.1. *Teorema di divisibilitá*
Data una coppia ordinata di numeri naturali (a,b) con $b \neq 0$ *esiste una e una sola coppia ordinata (q,r) con* $0 \leq r < b$ *tale che* $a = bq + r$.

Sfruttando il teorema di divisibilitá possiamo verificare quando un numero naturale a é divisibile per un altro numero naturale b: controlleremo se nella divisione $a : b$ il quoziente é un numero naturale e il resto é 0. Nella divisione **il divisore deve essere sempre diverso da 0**.

Un numero naturale $n > 1$ è **primo** quando è divisibile solo per uno e per se stesso.

3.1.2. *Teorema fondamentale dell'aritmetica.*
Ogni numero naturale diverso da zero e da uno o é primo, o é il prodotto di fattori primi. Tale decompozione in fattori primi é unica a meno dell'ordine dei fattori.

Il **M.C.D.** (massimo comun divisore) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con la potenza più bassa.

Il **m.c.m.** (minimo comune multiplo) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più piccolo dei multipli comuni diverso da 0 ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non, ognuno preso una sola volta con la potenza più alta.

Tra **M.C.D.** e **m.c.m.** sussiste la seguente relazione:

$$\text{M.C.D.(a,b)}\cdot \text{ m.c.m.(a,b)} = a \cdot b$$

Due numeri a e b si dicono **primi tra loro** se: M.C.D.(a,b)$= 1$.

3.2 Numeri Interi $\mathbb{Z}$

I numeri interi (o relativi) si ottengono facendo precedere i numeri naturali dal segno $+$ o dal segno $-$: $\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$, anch'essi costituiscono un **insieme ordinato** e possono essere rappresentati su una retta orientata.

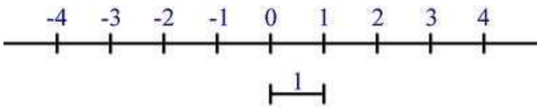


Figura 3.2: Rappresentazione dei numeri interi.

ORDINAMENTO:
Se supponiamo che le lettere non abbiamo incorporato nessun segno distintivo, ma che indichino solo dei numeri naturali (considereremo cioè $a, b > 0$), possiamo introdurre il seguente ordinamento:

- i numeri del tipo $+a$ sono maggiori di 0 e di tutti i numeri del tipo $-b$ (li chiameremo numeri **positivi**).
- nell'insieme dei numeri positivi l'ordine è esattamente quello dei numeri naturali. In altre parole: $+a > +b$ quando $a > b$. I numeri naturali ed i numeri positivi si comportano esattamente allo stesso modo riguardo all'ordinamento.
- 0 è maggiore di tutti i numeri del tipo $-b$ (questi ultimi li chiameremo invece numeri **negativi**)
- nell'insieme dei numeri negativi l'ordine è esattamente opposto a quello dei numeri naturali. In altre parole: $-a > -b$ quando $b > a$.

Due numeri interi sono **concordi** quando hanno lo stesso segno e **discordi** se hanno segno diverso.

Dato un qualunque numero y, il suo **opposto additivo** è il numero x tale che $y + x = x + y = 0$. Quindi due numeri opposti sono equidistanti dallo 0.

OPERAZIONI:
Per **sommare due numeri interi** si parte dal primo addendo, che può essere positivo o negativo o nullo; se il secondo addendo ha il segno + si fanno tanti

passi di lunghezza 1 verso destra quanti ne indica il secondo addendo; se il secondo addendo ha il segno $-$ si fanno tanti passi di lunghezza 1 verso sinistra quanti ne indica il secondo addendo. Il numero a cui si arriva con questo procedimento è il risultato dell'addizione. Vale quindi che:

- La somma di due numeri con il segno $+$ è un numero con il segno $+$ e sulla linea dei numeri ci si comporta esattamente come quando si trattano i numeri naturali.
- La somma di due numeri con il segno $-$ ci fa restare nel settore dei numeri con il segno $-$.
- La somma di due numeri con il segno diverso può cadere nel settore dei numeri con il segno $+$, oppure in quello dei numeri con il segno $-$, oppure situarsi nel punto 0.

La **sottrazione in** $\mathbb{Z}$ è sempre possibile e si riduce ad una addizione secondo la seguente regola:

$$a - b = a + (-b)$$

Il **prodotto di due interi** è quel numero intero la cui parte naturale è data dal prodotto dei due numeri presi senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di prodotto tra numeri naturali) e il cui segno è determinato dalle regole della seguente tabella:

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

La **divisione** non è un'operazione interna in $\mathbb{Z}$; laddove è possibile, il **quoziente di due numeri interi** è ancora un numero intero la cui parte naturale è data dal quoziente dei due numeri presi senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di divisione tra numeri naturali) e il cui segno è determinato seguendo ancora le regole della precedente tabella.

La **potenza di un numero intero**, con esponente naturale, è ancora un numero intero la cui parte naturale è data dalla potenza del numero preso senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di potenza di un numero naturale) e il cui segno è positivo se l'esponente è pari mentre rimane invariato se l'esponente è dispari. In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà delle potenze che valgono in $\mathbb{N}$.

3.3 Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

Le frazioni sono espressioni della forma $\frac{a}{b}$ dove a e b sono numeri interi e $b \neq 0$. Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frazioni si dicono **equivalenti** quando $ad = bc$.
La frazione $\frac{a}{b}$ si dice **ridotta ai minimi termini** quando a e b sono primi tra loro. Chiamiamo **numero razionale** ogni classe di equivalenza di frazioni e come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.

ORDINAMENTO:
Si dice $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dove $b, d > 0$, se e solo se $ad \geq bc$ (lo stesso vale cambiando il segno della disuguaglianza con $>$, $\leq$ o $<$).

OPERAZIONI:
Addizione e Sottrazione

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{3.1}$$

con $b, d \neq 0$.
Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{3.2}$$

con $b, d \neq 0$.
Divisione

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{3.3}$$

con $b, c, d \neq 0$. La divisone è interna in $\mathbb{Q}$.

Potenza

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{3.4}$$

con $b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Queste operazioni tra numeri razionali godono ancora di tutte le proprietà viste in $\mathbb{Z}$.

Dato il numero razionale $\frac{a}{b}$, con $a, b \neq 0$, definiamo il suo **reciproco** come il numero razionale $\frac{b}{a}$. Il prodotto di un numero per il suo reciproco è 1, cioè l'elemnto neutro per la moltiplicazione.

Dato il numero razionale $\frac{a}{b}$, definiamo la **potenza con esponente intero negativo** di $\frac{a}{b}$ come:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \tag{3.5}$$

con $a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

In $\mathbb{Q}$ (e quindi anche in ogni suo sottoinsieme, in particolare in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$) valgono le **leggi di monotonia**:

Prima legge
se $a \overset{<}{\underset{>}{=}} b$, allora $a + n \overset{<}{\underset{>}{=}} b + n$.
Seconda legge
Se $a = b$, allora $an = bn; (n \neq 0)$.
Se $a < b$, allora $an < bn$; se $n > 0$.
Se $a < b$, allora $an > bn$; se $n < 0$.

e la **legge di annullamento del prodotto:**
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$

Zero Product Property Rule
➔ if (a)(b) = 0,
then a = 0 or b = 0.

➔ if a = 0 or b = 0,
then (a)(b) = 0.

Le **percentuali** sono frazioni aventi per denominatore 100.

Una **proporzione** è un modo per scrivere un'uguaglianza fra frazioni equivalenti.

Proprietà delle proporzioni	
proprietà fondamentale	$a : b = c : d$ se e solo se $ad = bc$
del comporre	$(a + b) : a = (c + d) : c$
	$(a + b) : b = (c + d) : d$
dello scomporre	$(a - b) : a = (c - d) : c$
	$(a - b) : b = (c - d) : d$
del permutare	$a : c = b : d$
	$d : b = c : a$
dell'invertire	$b : a = d : c$

Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un **numero decimale finito** o **periodico** (in particolare diremo *periodico semplice* se il periodo inizia subito dopo la virgola, *periodico misto* se tra la virgola e il periodo c'è l'antiperiodo).
Ogni **numero decimale finito** si può scrivere sotto forma di frazione, moltiplicandolo e dividendolo per il numero costituito da 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

3. $0,135 = \frac{0,135 \cdot 1000}{1000} = \frac{135}{1000}$

La frazione generatrice di un **numero periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza tra parte intera, se c'è, seguita dal periodo e parte intera, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

4. $0,1\overline{3} = \frac{13}{99}$

5. $27,\overline{2} = \frac{272-27}{9} = \frac{245}{9}$

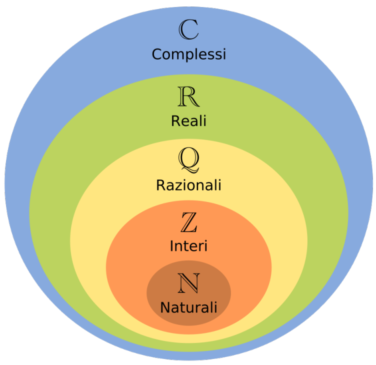
La frazione generatrice di un **numero periodico misto** è una frazione che ha per numeratore il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo, seguite da quelle del periodo, meno il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo; e per denominatore il numero formato da tanti

9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

6. $0,2\overline{12} = \frac{212-2}{990} = \frac{210}{990}$

3.4 Numeri Reali $\mathbb{R}$

Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si rivela insufficiente quando si voglia, per esempio, eseguire l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato, cioè l'estrazione di radice quadrata: *si dice radice quadrata del numero $a \geq 0$, e si indica con $\sqrt[2]{a}$, quel numero $b \geq 0$ il cui quadrato è uguale ad a.* Quindi l'estrazione di radice quadrata (vedremo tra poco anche l'estrazione di radice n-esima) non è un operazione interna in $\mathbb{Q}$. Ad esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale (dimostrazione vista in classe), ma la sua radice è $1,4142135662...$, cioè un numero decimale illimitato non periodico; chiameremo questi numeri *irrazionali*. I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali, li indicheremo con la lettera $\mathbb{R}$.



All'interno di questo insieme possiamo definire una nuova operazione interna: la **potenza a esponente razionale**.

Partiamo dalla *potenza a esponente* $\frac{1}{n}$, che indicheremo con $x^{\frac{1}{n}}$ oppure con $\sqrt[n]{x}$ (detto **radicale**), dove $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$:

· se n dispari, $x^{\frac{1}{n}}$ è l'unico numero che elevato alla n dà x.

· se n pari, $x^{\frac{1}{n}}$ è definito solo per $x \geq 0$ ed è l'unico numero non negativo che elevato alla n d à x.

7. $\sqrt[2]{4} = 2$ *non* ± 2

Definiamo ora la *potenza a esponente* $\frac{m}{n}$, che indicheremo con $x^{\frac{m}{n}}$ oppure con $\sqrt[n]{x^m}$, dove $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$:

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} \cdot ... \cdot x^{\frac{1}{n}} \text{ (m volte)}$$

Vediamo ora alcune proprietà dei radicali:

· **proprietà invariantiva**: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$;
· **proprietà del prodotto**: il prodotto di radicali con lo stesso indice è un radicale con lo stesso indice e con radicando (la base) uguale al prodotto dei radicandi: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
· **proprietà della potenza**: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$.

Due radicali sono **simili** quando hanno la stessa parte radicale. Due radicali simili si possono sommare ottenendo un radicale simile che ha come coefficiente la somma dei coefficienti.

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Abbiamo visto come sia possibile scrivere i radicali sotto forma di potenze con esponenti razionali:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{3.6}$$

questo ci permette di studiare le operazioni tra radicali come operazioni tra potenze, utilizzando tutte le regole di queste ultime.

Capitolo 4

Il calcolo letterale

4.1 Monomi

A cosa serve il calcolo letterale? Lo utilizziamo per esprimere proprietà di carattere generale o per generalizzare un determinato problema.
Partiamo dalla definizione di un **monomio**: un'espressione letterale formata dal prodotto di numeri e potenze che hanno per base una lettera e per esponente un numero naturale, perciò fra le lettere non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni.
Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (**coefficiente**) e una o più lettere diverse tra loro, con i relativi esponenti (**parte letterale**). Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

8. $-\frac{3}{4}ab^2$ è un monomio di 3^o grado

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

9. $2ac$ e $\frac{4}{3}ac$ sono monomi simili

OPERAZIONI:

La **somma** o la **differenza di due monomi simili** è il monomio che si ottiene sommando algebricamente i coefficienti (con relativo segno) e lasciando invariata la parte letterale. Se i due monomi non sono simili, la loro somma

o differenza ci darà un'espressione letterale che nella prossima sezione definiremo come polinomio.
Se invece abbiamo un prodotto, un quoziente o una potenza possiamo operare con qualsiasi monomi, simili e non. Nel **prodotto**, per i coefficienti si usano le regole relative ai numeri, mentre per le lettere si usano le proprietà delle potenze. Lo stesso per il **quoziente** o la **potenza** di monomi.

10. Prodotto di monomi: $\frac{x^3y}{4} \cdot \frac{xy^2}{2} = \frac{x^4y^3}{8}$

11. Potenze di monomi: $(-\frac{2}{3}a^2bx^3)^2 = \frac{4}{9}a^4b^2c^6$

La parte letterale del **massimo comun divisore** (M.C.D.) di monomi è il prodotto delle sole lettere comuni a tutti i monomi ognuna presa una sola volta con l'esponente minimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il M.C.D. dei coefficienti.

La parte letterale del **minimo comune multiplo** (m.c.m.) di monomi è il prodotto di tutte le lettere, comuni e non comuni, ognuna presa una sola volta con l'esponente massimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il m.c.m. dei coefficienti.

12. Dati i due monomi $3x^2y$ e $15xz$, il loro M.C.D. è $3x$, mentre il loro m.c.m. è $15x^2yz$.

4.2 Polinomi

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Anche ogni monomio è considerato un polinomio.

13. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio

Un polinomio è **ridotto** in forma normale se lo è ogni suo monomio e tra di loro non ci sono monomi simili.
I polinomi ridotti con uno, due, tre o quattro termini si chiamano rispettivamente **monomi, binomi, trinomi e quadrinomi**.
Il **grado** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini.

14. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio di 6^o grado

Il **grado rispetto a una lettera** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini rispetto a quella lettera.

15. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio di 2^o grado rispetto alla lettera a

Un polinomio è:
· **omogeneo** quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado;
· **ordinato rispetto a una lettera** se i suoi termini sono disposti con esponenti di quella lettera in ordine decrescente o crescente;
· **completo** rispetto a una lettera se questa compare con tutte le potenze dal grado massimo al grado 0.

Il **termine noto** è il termine formato soltanto da un numero, ossia il monomio di grado 0.

Un polinomio può essere anche considerato come una funzione in una o più variabili (**funzione polinomiale**). Si possono calcolarne pertanto il valore per particolari valori assegnati delle variabili. I valori per i quali un polinomio si annulla sono detti **zeri** o **radici** del polinomio.

16. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ e valuto $P(5) = 5^3 + 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5$

17. $P(x) = x^3 - 1$, valuto $P(1) = 1^3 - 1 = 0$ quindi 1 è una radice del polinomio $P(x)$.

OPERAZIONI:

La **somma** di due polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini del primo e del secondo addendo; la **differenza** di due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando al primo l'opposto del secondo. In generale si parla di **somma algebrica**.
Il **prodotto** di due polinomi si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo con ciascuno del secondo (e facendo la somma dei termini ottenuti).

I prodotti notevoli:
· Differenza di quadrati (oppure somma per differenza):

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \tag{4.1}$$

· Somma di quadrati: non può essere vista come prodotto di polinomi (vedi spiegazione a fine sezione)

· Quadrato di un binomio:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \tag{4.2}$$

· Quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \tag{4.3}$$

· Cubo di un binomio:

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 \tag{4.4}$$

· Somma di cubi:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \tag{4.5}$$

· Differenza di cubi:

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \tag{4.6}$$

Un polinomio è **divisibile per un monomio** se lo sono tutti i suoi termini, in tal caso il quoziente si ottiene dividendo ogni termine per il monomio.
Il procedimento studiato per la **divisione** tra due polinomi, $A : B$, ci permette di ottenere il polinomio quoziente Q e il polinomio resto R, in modo che si ha: $A = B \cdot Q + R$.

Mostriamo alcune particolarità della divisione tra polinomi:

· Se il divisore di un polinomio è del tipo $x - a$, con $a \in \mathbb{R}$ possiamo utilizzare la **Regola di Ruffini** per svolgere la divisione (vista in classe).

· **Il teorema del resto**: il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio $x - a$ è $P(a)$.

Dal teorema del resto segue quindi:

· **Il teorema di Ruffini**. Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $P(a) = 0$.

Si tratta perciò di capire quali sono i possibili valori di a per cui $P(a) = 0$:
· 1^o **regola**: dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi, le eventuali radici intere del polinomio sono da ricercarsi tra i divisori, positivi o negativi, del suo termine noto.
· 2^o **regola**: dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi, le eventuali radici razionali del polinomio sono da ricercarsi tra le frazioni aventi per numeratore un divisore (positivo o negativo) del termine noto e per denominatore un divisore (positivo o negativo) del coefficiente di grado massimo.

ATTENZIONE! Se la differenza di quadrati abbiamo visto sopra essere scomponibile nel prodotto di due polinomi, ciò non si può dire per la somma di quadrati! Infatti, se lo fosse sarebbe il prodotto di due polinomi di primo grado, cioè di polinomi del tipo $x + a$; ma se il polinomio $x^2 + 1$ avesse come fattore il polinomio $x + a$, esso avrebbe come radice $-a$ e questo non è possibile perchè $x^2 + 1 > 0$ per ogni x !

4.3 La scomposizione in fattori

Scomporre un polinomio significa riscriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore. Se è possibile scomporre un polinomio questo è detto **riducibile**, in caso contrario è detto **irriducibile**.

18. $x^2 + 1$ è un polinomio irriducibile

Esistono vari **metodi di scomposizione**:

· Il raccoglimento totale (o a fattore comune);

· Il raccoglimento parziale;

· La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli;

· La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado:
$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$, con $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$;

· La scomposizione mediante il Teorema e la regola di Ruffini.

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili (questi vengono trattati come le lettere nel caso dei monomi, notatate che le singole lettere nel prodotto sono fattori irriducibili).

4.4 Frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Inoltre una frazione algebrica non esiste dove si annulla il denominatore (per i valori che sostituiti alle lettere danno come risultato 0).

OPERAZIONI:

Per le frazioni algebriche valgono le stesse **regole di calcolo** che si hanno per le frazioni numeriche.

19. $\frac{2ab^4}{5x^2y^3}$, $\frac{a+2b}{a-3b}$, $\frac{4x+1}{x^2-1}$

Capitolo 5

Equazioni e disequazioni di primo grado

5.1 Equazioni lineari

Un'**identità** è un'uguaglianza tra due espressioni letterarie che risulta verificata per qualunque valore attribuito alle lettere.

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni letterarie che è verificata per particolari valori attribuiti alle lettere, tali valori sono detti **soluzioni o radici** dell'equazione.

Un'**equazione lineare** è un'equazione di primo grado. Un'equazione $P(x) = 0$ è in **forma normale** se il polinomio $P(x)$ non contiene termini simili. Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto.

Esistono diversi tipi di equazioni:
· numerica intera (coefficienti solo numerici e incognita solo al numeratore);
· numerica fratta(coefficienti solo numerici e incognita anche al denominatore);
· letterale intera(coefficienti anche letterali e incognita solo al numeratore);
· letterale fratta(coefficienti anche letterali e incognita anche al denominatore).

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA delle equazioni: data un'equazione se si aggiunge o si toglie ad entrambi i membri dell'equazione uno stesso numero o una stessa espressione si ottiene un'equazione equivalente.

Dal primo principio discendono due regole:

· **Regola del trasporto**: è possibile spostare un termine da un membro all'altro dell'equazione cambiandone il segno, ottenendo un'equazione equivalente.

20. $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x - 5 + 5 = 0 + 5 \Leftrightarrow x = 5$

· **Regola di cancellazione**: è possibile eliminare dai due membri termini uguali, ottenendo un'equazione equivalente.

21. $x - 3 = -3 \Leftrightarrow x - 3 + 3 = -3 + 3 \Leftrightarrow x = 0$

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA delle equazioni: data un'equazione se si moltiplica o si divide entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero o una stessa espressione, diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente.

Dal secondo principio discendono due regole:

· **Regola della divisione per un fattore comune**: se tutti i termini dell'equazione hanno un fattore comune si possono dividere tutti i termini per quel fattore, ottenendo un'equazione equivalente.

22. $2x = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$

· **Regola del cambiamento di segno**: è possibile cambiare il segno di **tutti** i termini dell'equazione, ottenendo un'equazione equivalente.

23. $-x = 9 \Leftrightarrow (-1) \cdot (x) = (-1) \cdot 9 \Leftrightarrow x = -9$

Le **equazioni numeriche intere**.

È sempre possibile studiare un'equazione di primo grado nella forma $ax = b$.

Si distinguono 3 casi:
· se $a \neq 0$, allora $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ la soluzione è $x = \frac{b}{a}$ e l'equazione è **determinata**;
· se $a = 0$ e $b = 0$, allora $0 \cdot x = 0$ e l'equazione è **indeterminata**;
· se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora $0 \cdot x = b$ e l'equazione è **impossibile**.

Quando risolviamo un'**equazione letterale intera** dobbiamo distinguere il caso in cui il coefficiente letterale della x è 0 da quello in cui è diverso da 0.

Prima di risolvere un'**equazione numerica fratta** bisogna determinarne le **condizioni di esistenza**; poi, una volta ottenuto il risultato, occorre controllare se la soluzione è **accettabile**.

Anche nel caso delle **espressioni letterali fratte** bisogna distinguere i due casi riguardo il coefficiente angolare della x.

5.2 Disequazioni lineari

Proprietà delle disuguaglianze, valide $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

· monotonia dell'addizione: $a < b \Rightarrow a + k < b + k$ $(\forall k \in \mathbb{R})$

24. $-5 < 2 \Rightarrow -5 + 3 < 2 + 3$

25. $-5 < 2 \Rightarrow -5 - 3 < 2 - 3$

· moltiplicazione per un numero positivo: $a < b \Rightarrow ak < bk$ $(\forall k \in \mathbb{R}^+)$

26. $-5 < 2 \Rightarrow -5 \cdot (3) < 2 \cdot (3)$

· moltiplicazione per un numero negativo: $a < b \Rightarrow ak > bk$ $(\forall k \in \mathbb{R}^-)$

27. $5 < 7 \Rightarrow 5 \cdot (-1) > 7 \cdot (-1)$

· reciproci concordi: $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $(\forall a, b$ concordi$)$

28. $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

29. $-5 < -2 \Rightarrow \frac{1}{-5} > \frac{1}{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$

Una disuguaglianza dove compaiono espressioni letterali è una **disequazione** se risulta vera solo per determinati valori delle lettere. Questi valori sono l'insieme delle soluzioni della disequazione e possono essere rappresentati in vari modi (disequazione semplificata, rapprsentazione grafica, scrittura di un intervallo in forma di espressione).

Per risolvere una disequazione si utilizzano le proprietà delle disuguaglianze per ottenere via via disequazioni equivalenti alla prima ma più semplici, fino ad arrivare ad un'espressione chiara delle soluzioni.

Le disequazioni si dividono, come le equazioni, in **intere, numeriche, fratte e letterali**. Inoltre una disequazione può avere soluzioni (**determinata**), essere sempre verificata (**indeterminata**) o non avere soluzioni (**impossibile**).

Le **disequazioni fratte** si risolvono con la regola dei segni: si studiano la positività di numeratore e denominatore.

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nelle stesse variabili per cui si cercano i valori che rendono tali disequazioni verificate *contemporaneamente.*
Per trovare le soluzioni di un sistema di disequazioni si si rappresentano su rette orizzontali le soluzioni di ogni disequazione. Le soluzioni del sistema sono date dagli intervalli comuni a tutte le soluzioni.

Capitolo 6

Equazioni e Disequazioni di secondo grado

6.1 Equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ (altrimenti ritorneremmo allo studio delle equazioni di 1^o grado).
Se tutti i coefficienti sono diversi da 0 l'equazione si dice **completa**, altrimenti **incompleta**. Distinguiamo in due tabelle il calcolo delle soluzioni di equazioni di secondo grado incomplete e complete:

Soluzioni delle equazioni di secondo grado incomplete	
equazione	soluzioni
$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ le radici sono reali se e solo se a e c sono discordi
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$

Il **discriminante** di un equazione di secondo grado completa è $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soluzioni delle equazioni di secondo grado complete	
segno del discriminante	soluzioni
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali

Se le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono x_1, x_2, posto $s = x_1 + x_2$, $p = x_1x_2$ si ha:
$s = -\frac{b}{a}; p = \frac{c}{a}$
l'equazione quindi è equivalente a:
$x^2 - sx + p = 0$

Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
se $\Delta < 0$ l'equazione è irriducibile.

Un'**equazione parametrica** è un'equazione letterale in cui si richiede che il valore di una lettera (**parametro**) soddisfi a certe condizioni.

6.2 Disequazioni di secondo grado

Ricordando che per studiare il segno di un prodotto di polinomi si studia il segno di ogni polinomio fattore e poi si determina il segno del prodotto con la regola dei segni della moltiplicazione, cerchiamo di trasformare il nostro polinomio di secondo grado nel prodotto di polinomi:
· Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
· se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
· se $\Delta < 0$ con il metodo del completamento del quadrato si dimostra che:
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ quindi mi basterà studiare il segno del coefficiente a.

In ciascuno dei tre casi dallo studio del segno dei fattori si ricavano poi le soluzioni della disequazione.

Un'altra strategia di risoluzione (vista in classe) risulta essere quella grafica. Ricordandoci che un'espressione del tipo $ax^2 + bx + c$ rappresenta graficamente una parabola, segue che, una volta individuati (se esistono) gli zeri della funzione, sarà possibile studiare il suo segno seguendo questi passaggi:

- Suddividere lo studio del segno nei casi $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ ($f(x) = 0$ già lo sappiamo dalla ricerca degli zeri della funzione).
- Identificare, osservando il grafico della parabola, gli intervalli delle x in cui vale $f(x) > 0$ e gli intervalli delle x in cui invece vale$f(x) < 0$, intervalli i cui estremi dipendono strettamente dagli zeri x_1 e x_2 (se esistono) della funzione.

Per osservare un esempio di studio col metodo grafico si veda l'animazione di GeoGebra su: https://www.geogebra.org/m/GShJZPnf.

Per le **disequazioni fratte** si procede analogamente ricordando però che il denominatore deve essere sempre diverso da 0.

Capitolo 7

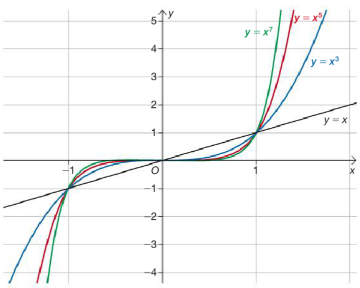
Funzioni elementari

7.1 Funzioni potenza

Volendo iniziare lo studio delle funzioni elementari, partiamo dall'analisi delle funzioni potenza, cioè delle funzioni di variabile reale definite da formule del tipo: $f(x) = ax^n$ con $a \in R$, $a > 0$ e $n \in N$, $n \neq 0$. Se $a < 0$, possiamo ricondurci al caso $a > 0$ osservando che $ax^n = -(-ax^n)$, quindi il grafico di $g(x) = -ax^n$ risulterà semplicemente essere il simmetrico, rispetto all'asse x, di quello di $f(x) = ax^n$. Analizziamo quindi le funzioni del tipo $f(x) = ax^n$ con $a > 0$ e n numero naturale diverso da 0. Consideriamo due casi:

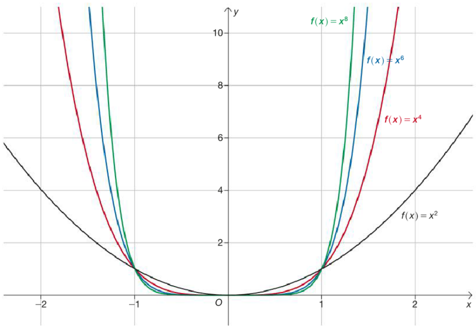
- n dispari

  La funzione è definita in tutto R, è strettamente crescente in tutto il dominio, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Inoltre, la funzione risulta essere dispari, cioè in tutto il dominio risulta $f(x) = -f(-x)$.



- n pari, $n > 0$

  La funzione è definita in tutto R, è positiva in tutto il dominio, è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$. Inoltre, la funzione risulta essere pari, cioè in tutto il dominio risulta $f(x) = f(-x)$.



  Per un'analisi delle varie funzioni potenza si veda l'animazione di GeoGebra su: https://www.geogebra.org/m/DmBmKKRk.

7.2 Funzioni polinomiali

Una funzione polinomiale di variabile reale è una funzione del tipo:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$ con $a_n \neq 0$.
Il grado della funzione polinomiale è dato dall'esponente n.
Le funzioni polinomiali sono sempre definite su tutto R, insieme dei numeri reali. Lo studio del grafico di una funzione polinomiale non è sempre banale, il più delle volte richiede l'uso di tecniche specifiche che saranno trattate durante l'intero corso. Sicuramnente potranno tornare utili alcuni degli strumenti visti finora, come per esempio la legge di annullamento del prodotto e la scomposizione in fattori primi dei polinomi.
Chiamiamo *funzione razionale fratta* ogni funzione che si può esprimere come rapporto di polinomi. Queste funzioni possono essere definite per qualunque numero reale che non annulli il polinomio divisore, cioè il denominatore della frazione algebrica.

Nelle prossime sottosezioni analizzeremo due tra le famiglie di funzioni polinomiali più importanti, il cui studio è strettamente correlato a quello delle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Esse sono rispettivamente le funzioni lineari e le funzioni quadratiche.

7.2.1 Funzioni lineari

Una generica funzione lineare è una funzione del tipo $f(x) = mx + q$, con m e q numeri reali. Data una funzione lineare risulta che:

- Il dominio e il codominio di una funzione lineare coincidono con l'insieme R dei numeri reali;

- Il grafico di una funzione lineare è una retta, la quale è possibile disegnare nel piano cartesiano individuando almeno due coppie di valori $(x; f(x))$, che corrispondono ciascuna a un punto del grafico;

- La pendenza della retta dipende dall'analisi del coefficiente m;

- L'intersezione con l'asse y è data dal punto di coordinate $(0; q)$;

- Lo zero della funzione, cioè l'ascissa della (possibile) intersezione del suo grafico con l'asse x, è ricavabile dalla risoluzione dell'equazione: $mx + q = 0$.

- Una volta individuato (se esiste) il punto di intersezione della retta con l'asse delle x, sarà possibile studiare il segno della funzione seguendo questi passaggi:

  - Suddividere lo studio del segno nei casi $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ ($f(x) = 0$ già lo sappiamo).

  - Identificare, osservando il grafico della retta, gli intervalli delle x in cui vale $f(x) > 0$ e gli intervalli delle x in cui invece vale $f(x) < 0$, intervalli che dipendono strettamente dallo zero (se esiste) della funzione.

Per osservare un esempio di studio col metodo grafico si veda l'animazione di GeoGebra su: https://www.geogebra.org/m/cJR6HZ4G.

7.2.2 Funzioni quadratiche

Una generica funzione quadratica è una funzione del tipo $f(x) = ax^2+bx+c$, con a, b e c numeri reali. Data una funzione quadratica risulta che:

- Il dominio e il codominio di una funzione quadratica coincidono con l'insieme R dei numeri reali;

- Il grafico di una funzione quadratica è una parabola, la cui concavità dipende dal segno del coefficiente a;

- La sua intersezione con l'asse y è data dal punto di coordinate $(0; c)$;

- Il suo vertice V ha coordinate: $x_V = -b/2a$, mentre per y_V basterà calcolare il valore assunto dalla funzione in x_V ($y_V = f(x_V) = ax_V^2 + bx_V + c$);

- L'equazione del suo asse di simmetria è $x = x_V$, cioè $x = -b/2a$;

- Gli zeri della funzione, cioè le ascisse delle (possibili) intersezioni del suo grafico con l'asse x, sono ricavabili dalla risoluzione dell'equazione: $ax^2 + bx + c = 0$.

- Una volta individuati (se esistono) gli zeri della funzione, sarà possibile studiare il segno della funzione seguendo questi passaggi:

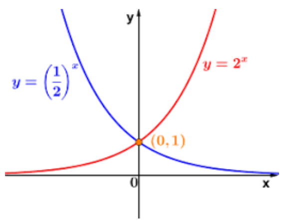
  - Suddividere lo studio del segno nei casi $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ ($f(x) = 0$ già lo sappiamo).

  - Identificare, osservando il grafico della parabola, gli intervalli delle x in cui vale $f(x) > 0$ e gli intervalli delle x in cui invece vale $f(x) < 0$, intervalli che dipendono strettamente dagli zeri (se esistono) della funzione.

7.3 Funzioni esponenziali

Le funzioni polinomiali non sempre sono in grado di descrivere al meglio molti fenomeni naturali, economici, fisici, ecc. Per rappresentare alcuni di questi è preferibile utilizzare le funzioni esponenziali, le quali sono così definite: $f(x) = a^x$ con a, x numeri reali e $a > 0$.
Le funzioni esponenziali sono definite su tutto R e assumono sempre immagini positive. Inoltre, a seconda del valore di a, avremo che:

- se $0 < a < 1$, allora le funzioni esponenziali sono strettamente decrescenti;
- se $a > 1$ allora le funzioni esponenziali sono strettamente crescenti.



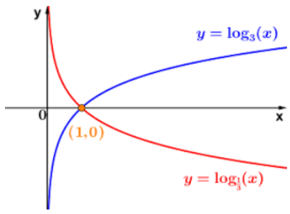
Per un'analisi delle varie funzioni esponenziali si veda l'animazione di GeoGebra su: https://www.geogebra.org/m/fpv2Xnrp.

7.4 Funzioni logaritmiche

Sempre considerando $a > 0$, le funzioni esponenziali a^x sono invertibili nel loro dominio, per cui dato $b > 0$ è sempre possibile determinare un unico valore x tale che $a^x = b$. Tali funzioni inverse sono dette funzioni logaritmiche e vengono denotate come $f(x) = log_a(x)$.
Le funzioni logaritmiche sono definite in R^+ e, a seconda del valore di a, avremo che:

- se $0 < a < 1$, allora le funzioni logaritmiche sono strettamente decrescenti;

- se $a > 1$ allora le funzioni logaritmiche sono strettamente crescenti.



Per un'analisi delle varie funzioni logaritmiche si veda l'animazione di GeoGebra su: https://www.geogebra.org/m/WBsrv6jW.