

ESERCIZI DI MATEMATICA
FACOLTÀ DI FARMACIA DI FERRARA
A.A. 2009/2010

Esercizi 1: equazioni e disequazioni

Disequazioni frazionarie. Risolvere le seguenti disequazioni frazionarie.

1. $\frac{x^2 - 5x + 8}{9 - x^2} < 0$

Soluzione. $x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

2. $\frac{2x - 1}{x - 3} < \frac{x + 1}{x - 1}$

Soluzione. $x \in]1; 3[$

3. $\frac{x^2 - 4x + 3}{4 - x^2} \leq 0$

Soluzione. $x \in]-\infty; -2[\cup [1; 2[\cup [3; +\infty[$

4. $\frac{4x - x^2}{9x^2 + 6x + 1} \geq 0$

Soluzione. $x \in [0; 4]$

5. $\frac{3}{x - 2} < \frac{2x}{3 + x}$

Soluzione. $x \in]-\infty; -3[\cup]-1; 2[\cup \left] \frac{9}{2}; +\infty \right[$

6. $\frac{7x - 4}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2} < \frac{7}{x + 2}$

Soluzione. $x \in]-2; 2[\cup]3; +\infty[$

Equazioni e disequazioni irrazionali. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

1. $\sqrt{x^2 + x + 1} = 2x + 3$

Soluzione. $x = -1$

$$2. \sqrt{x-x^2} = \sqrt{7-2x}$$

Soluzione. $\emptyset$

$$3. x+7 \leq \sqrt{9-x^2}$$

Soluzione. $\emptyset$

$$4. \sqrt{6x-x^2} < 3-2x$$

Soluzione. $x \in \left[0; \frac{3}{5}\right[$

$$5. \sqrt{3x-2} > 2(x-1)$$

Soluzione. $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right[$

$$6. \sqrt{x^2-4} - 2x + 1 > 4-x$$

Soluzione. $x \in \left] -\infty; -\frac{13}{6}\right[$

$$7. \sqrt{3x^2+10x+3} - x - 3 < 0$$

Soluzione. $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right[$

$$8. \frac{\sqrt{x^2+4x+3} - x - 2}{x^2-16} < 0$$

Soluzione. $x \in]-4; -3] \cup]4; +\infty[$

$$9. \frac{\sqrt{x^2+6x+8} - x - 5}{x^2-36} \leq 0$$

Soluzione. $x \in \left] -6; -\frac{17}{4}\right] \cup]6; +\infty[$

Equazioni e disequazioni esponenziali. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali.

$$1. 9^{4-x} = \frac{1}{3}$$

Soluzione. $x = \frac{9}{2}$

$$2. 7^{2x+5} = 7^{\frac{x-1}{2}}$$

Soluzione. $x = -\frac{11}{3}$

3. $4^{\frac{3+x}{x-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5x}$

Soluzione. $x = 2$; $x = -\frac{3}{5}$

4. $2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x = 0$

Soluzione. $x = -1 + \log_2 10$ o, equivalentemente, $x = \log_2 5$.

Infatti: $-1 + \log_2 10 = -1 + \log_2 (2 \cdot 5) = -1 + \log_2 2 + \log_2 5 = -1 + 1 + \log_2 5 = \log_2 5$.

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 40 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

Soluzione. $x = -4$

6. $2^{3-x} - 2^{5-x} + 2^{x+1} = 0$

Soluzione. $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 24$ o, equivalentemente, $x = 1 + \frac{1}{2} \log_2 3$ o, equivalentemente, $x = \frac{1}{2} \log_2 12$ (le equivalenze si provano applicando le proprietà dei logaritmi, come nell'esercizio precedente).

7. $1 - 7^{1+x} \geq 0$

Soluzione. $x \in]-\infty; -1]$

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 4 \leq 0$

Soluzione. $x \in [0; +\infty[$

9. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} - 3\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0$

Soluzione. $x \in \left] \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 3; +\infty \right[$

10. $3^{x+2} < 216 + 3^x$

Soluzione. $x \in]-\infty; 3[$

11. $e^{2x} > 5e^x$

Soluzione. $x \in]\ln 5; +\infty[$

12. $2^x + 2^{3-x} - 2^{4-x} \leq 0$

Soluzione. $x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$

Equazioni e disequazioni logaritmiche. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni logaritmiche.

1. $\log_{\frac{3}{8}} x = -2$

Soluzione. $x = \frac{64}{9}$

2. $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$

Soluzione. $x = \frac{1}{8}$

3. $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 2) = 3$

Soluzione. $x = \frac{17}{24}$

4. $\log_2(x^2 - x) = 1$

Soluzione. $x = -1, x = 2$

5. $2 \ln(x + 4) = \ln(2 - x)$

Soluzione. $x = -2$

6. $2 \log_5(\sqrt{3}x) = \log_5(x^2 - 4)$

Soluzione. $x = 4$

7. $\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(1 - x) = 1$

Soluzione. $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$

8. $\log(3x - 5) + \log(x - 2) = \log 2$

Soluzione. $x = \frac{8}{3}$

9. $\log(x - 3) > 1$

Soluzione. $x \in]13; +\infty[$

10. $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) > 2$

Soluzione. $x \in \left] \frac{5}{3}; \frac{7}{4} \right[$

$$11. \log_2 \frac{x+3}{x} > 1$$

Soluzione. $x \in]0; 3[$

$$12. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 6$$

Soluzione. $x \in [-2; 0[\cup]1; 3]$

$$13. \log_{\frac{1}{3}}(2-x) - \log_{\frac{1}{3}}(1-2x) \geq 0$$

Soluzione. $x \in]-\infty; -1]$

$$14. \ln x \leq 2 \ln(2x)$$

Soluzione. $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$$15. \log_{\frac{1}{3}}(x-4) - \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq 1$$

Soluzione. $x \in]4; 11]$

Equazioni goniometriche. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni goniometriche.

$$1. \cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione. $x = \pm \frac{\pi}{2} + 6k\pi$

$$2. \sin 3x = \frac{1}{2}$$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi; x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

$$3. \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{10} + k\pi$

$$4. \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

Soluzione. $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$

$$5. \tan\left(3x - \frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$$

Soluzione. $x = \frac{10}{63} + k\frac{\pi}{3}$

6. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

7. $\sin x + \cos x - 1 = 0$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 0 + 2k\pi$

8. $\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2 = 0$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

9. $\sin x - \cos x = 0$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

10. $\sin x + \cos x = -1$

Soluzione. $x = \pi + 2k\pi, x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

11. $(2 + \sqrt{3}) \sin x + \cos x + 2 + \sqrt{3} = 0$

Soluzione. $x = \frac{3}{2}\pi + 3k\pi, x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

12. $\cos(x - 90^\circ) + \sin(90^\circ - x) = \sqrt{2}$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

13. $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

14. $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$

Soluzione. $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi$

15. $\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$

Soluzione. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

16. $\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

Soluzione. $x = 90^\circ + k180^\circ, x = 45^\circ + k180^\circ$