

# Equazioni della Fisica Matematica

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2010/2011



# Indice

<b>1</b>	<b>Nozioni fondamentali di Calcolo Tensoriale</b>	<b>1</b>
1.1	Richiami sull'insieme dei vettori dello spazio geometrico . . . . .	1
1.2	Prodotto tensoriale di spazi vettoriali reali di dimensione finita . .	6
1.3	Tensori di ordine $r$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Algebra tensoriale</b>	<b>17</b>
2.1	Operazioni elementari sui tensori . . . . .	17
2.2	Contrazione di indici e composizione di due tensori . . . . .	19
2.3	Altre nozioni di algebra tensoriale . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Analisi tensoriale</b>	<b>33</b>
3.1	Applicazioni tensoriali definite su sottoinsiemi di uno spazio metrico	33
3.2	Funzioni tensoriali di una o più variabili reali . . . . .	36
3.3	Campi tensoriali . . . . .	40
3.4	Differenziabilità dei campi tensoriali . . . . .	44
3.5	Proprietà dell'operatore gradiente applicato ad un campo scalare .	50
3.6	Operatori differenziali del primo e del secondo ordine . . . . .	53
3.7	Integrazione dei campi tensoriali . . . . .	59
3.8	Campi tensoriali dipendenti da una variabile reale . . . . .	62
3.9	Funzioni tensoriali di una variabile tensoriale . . . . .	65
3.10	Appendice . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Corpi continui deformabili</b>	<b>71</b>
4.1	Definizione di corpo continuo . . . . .	71
4.2	Cinematica dei corpi continui . . . . .	77
4.3	Cinetica dei corpi continui . . . . .	96
4.4	Dinamica dei corpi continui . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Termomeccanica dei corpi continui</b>	<b>115</b>
5.1	Introduzione . . . . .	115
5.2	I due assiomi della termodinamica . . . . .	117

5.3	Equazione e disequazione indefinite della termodinamica per i corpi continui . . . . .	122
5.4	Problema termomeccanico per un corpo continuo . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Fluidi perfetti</b>	<b>129</b>
6.1	Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti . . . . .	129
6.2	Problema del moto per un fluido perfetto . . . . .	135
6.3	Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti . . . . .	143
6.4	Propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile . . . .	145
6.5	Piccoli moti di un fluido perfetto barotropico . . . . .	149
<b>7</b>	<b>Generalità sulle equazioni alle derivate parziali</b>	<b>155</b>
7.1	Nozioni elementari sulle PDE . . . . .	155
7.2	Classificazione in un punto di una PDE semilineare del II ordine .	159
7.3	Trasformazioni regolari delle variabili indipendenti . . . . .	161
7.4	Varietà caratteristiche per una PDE semilineare del II ordine e I forma canonica . . . . .	165
7.5	II forma canonica in un punto per una PDE semilineare del II ordine	168
7.6	II forma canonica in un dominio per una PDE semilineare del II ordine in due variabili indipendenti . . . . .	170
7.7	Problemi ai limiti della Fisica Matematica. . . . .	180
7.8	Problema di Cauchy per una generica PDE semilineare di ordine 2.	182
7.9	Problemi ai limiti ben posti. . . . .	183
<b>8</b>	<b>Equazione di Laplace</b>	<b>185</b>
8.1	Generalità e funzioni armoniche. . . . .	185
8.2	Proprietà delle funzioni armoniche. . . . .	188
8.3	Principali problemi al contorno per l'equazione di Laplace. . . . .	192
8.4	Problema di Dirichlet. . . . .	192
8.5	Metodo della funzione di Green per il problema di Dirichlet. . . . .	196
8.6	Problema di Neumann. . . . .	198
<b>9</b>	<b>Equazione del calore o di Fourier</b>	<b>203</b>
9.1	Generalità sull'equazione di Fourier. . . . .	203
9.2	Problema misto di I specie. . . . .	204
9.3	Esistenza della soluzione del problema misto di I specie nel caso di una sola variabile spaziale. . . . .	207
9.4	Problema di Cauchy. . . . .	214

---

<b>10 Equazione delle onde o di d'Alembert</b>	<b>219</b>
10.1 Generalità sull'equazione di d'Alembert. . . . .	219
10.2 Problema di Cauchy. . . . .	220
10.3 Problema misto di I specie. . . . .	230



# Capitolo 1

## Nozioni fondamentali di Calcolo Tensoriale

### 1.1 Richiami sull'insieme dei vettori dello spazio geometrico

Denotiamo con  $\vec{\mathcal{E}}$  l'insieme dei vettori dello spazio geometrico  $\mathcal{E}$ . Com'è ben noto,  $\vec{\mathcal{E}}$  è uno spazio vettoriale reale, tridimensionale, euclideo e quindi normato.

Richiamiamo alcune nozioni fondamentali relative a tale spazio vettoriale.

Una base per  $\vec{\mathcal{E}}$  è una qualsiasi terna ordinata di vettori non complanari. Per motivi di semplicità prenderemo in considerazione soltanto basi ortonormali. Ricordiamo che la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  è detta ortonormale se i tre vettori di base soddisfano alle seguenti relazioni:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1.1)$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker.

Indichiamo con  $\mathcal{B}_0$  l'insieme di tutte le basi ortonormali di  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ogni vettore  $\vec{u}$  si può decomporre in uno ed un solo modo rispetto a tale base per cui:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i, \quad (1.1.2)$$

dove la terna ordinata di numeri reali  $(u_1, u_2, u_3)$ , detta *terna delle componenti di  $\vec{u}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* , individua univocamente il vettore.

Grazie all'ortonormalità della base, si ha:

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3)$$

Se, accanto alla base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , consideriamo una nuova base ortonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , definiamo *matrice di passaggio* dalla prima base, che conveniamo di chiamare *vecchia base*, alla seconda, che conveniamo di chiamare *nuova base*, la matrice  $3 \times 3$

$$\mathbb{A} = [\alpha_{ih}],$$

dove con  $\alpha_{ih}$  denotiamo la componente di  $\vec{e}_h$  rispetto al vettore  $\vec{e}_i$  della vecchia base.

Si noti che, essendo  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ortonormale, si ha

$$\alpha_{ih} = \vec{e}_h \cdot \vec{e}_i, \quad h, i = 1, 2, 3.$$

D'altra parte, essendo anche  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ortonormale, deduciamo che  $\alpha_{ih}$  è anche la componente di  $\vec{e}_i$  rispetto a  $\vec{e}_h$  e  $\mathbb{A}$  è una matrice ortogonale, essendo:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^t.$$

Com'è noto, dato un vettore  $\vec{u}$ , le sue componenti rispetto alla nuova base (*nuove componenti*) si esprimono tramite le componenti rispetto alla vecchia base (*nuove componenti*) nel modo seguente:

$$\bar{u}_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ih} u_i, \quad h = 1, 2, 3, \quad (1.1.4)$$

cioè le nuove componenti sono delle combinazioni lineari delle vecchie i cui coefficienti sono gli elementi della matrice  $\mathbb{A}$  o meglio di  $\mathbb{A}^t$ .

Le (1.1.4) sono equivalenti alla relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.1.5)$$

Al secondo membro della (1.1.5) possiamo sostituire a  $\mathbb{A}^t$  la matrice  $\mathbb{A}^{-1}$ .

Introduciamo a questo punto una convenzione che ci consentirà una notevole concisione di linguaggio: la **convenzione sulla somma di Einstein**.

In base a tale convenzione, ogni volta che compare una somma su uno stesso indice ripetuto due volte si omette il simbolo di sommatoria.

Ad esempio, adottando la convenzione suddetta, scriveremo:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i =: u_i \vec{e}_i;$$



$$\bar{u}_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ih} u_i =: \alpha_{ih} u_i \quad h = 1, 2, 3.$$

L'indice ripetuto su cui si effettua la somma è detto *indice saturato*, mentre ogni indice non saturato è detto *indice libero*.

Nei due esempi precedenti  $i$  è un indice saturato e nel secondo esempio  $h$  è un indice libero.

Si noti che quando un indice è saturato non ha importanza il simbolo con cui lo denotiamo.

Indichiamo con  $I_n$  l'insieme dei primi  $n$  numeri naturali:

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Definizione 1.1.** Dato un insieme  $X \neq \emptyset$ , definiamo *successione di  $n$  elementi di  $X$*  ogni applicazione del tipo

$$\begin{aligned} I_n &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto x_i, \end{aligned}$$

avendo denotato con  $x_i$  l'elemento di  $X$  che l'applicazione associa a  $i$ .

E' evidente che una successione di  $n$  elementi si identifica con una  $n$ -upla ordinata di elementi di  $X$  e dunque per denotare una successione di  $n$  elementi di  $X$  useremo la notazione:  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ .

**Definizione 1.2.** Se  $n, m \in \mathbb{N}$ , chiamiamo *successione di  $n \cdot m$  elementi di  $X$*  ogni applicazione del tipo

$$\begin{aligned} I_n \times I_m &\longrightarrow X \\ (i, j) &\longmapsto x_{ij}, \end{aligned}$$

dove con  $x_{ij}$  denotiamo l'elemento di  $X$  che l'applicazione associa alla coppia ordinata  $(i, j)$ .

Una successione di  $n \cdot m$  elementi di  $X$  verrà denotata con  $(x_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ . La definizione si può estendere al caso in cui intervengono più di due numeri naturali.

Poiché lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$  ha dimensione 3, per noi nel seguito avranno un importante ruolo le successioni di 3 elementi.

**Definizione 1.3.** Chiameremo *successione semplice di elementi di  $X$*  ogni successione di 3 elementi di  $X$ . In tal caso scriveremo semplicemente  $(x_i)$  in luogo di  $(x_i)_{i=1, 2, 3}$ .

Se ad esempio  $X = \mathbb{R}$ , avremo una successione semplice di scalari, se  $X = \vec{\mathcal{E}}$ , avremo una successione semplice di vettori e così via.

E' evidente che, fissata in  $\vec{\mathcal{E}}$  una base ortonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ad ogni vettore  $\vec{u}$  resta associata una successione semplice di scalari, cioè la successione  $(u_i)$  costituita dalla terna ordinata delle sue componenti. Così ogni base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  è una successione semplice di vettori e la denoteremo semplicemente con  $(\vec{e}_i)$ .

**Definizione 1.4.** *Sia  $r$  un numero naturale  $> 1$ . Chiamiamo successione  $r$ -upla di elementi di  $X$  ogni applicazione così definita:*

$$\underbrace{I_3 \times \dots \times I_3}_{r \text{ - volte}} \longrightarrow X$$

$$(i_1, \dots, i_r) \longmapsto x_{i_1 \dots i_r},$$

avendo indicato con  $x_{i_1 \dots i_r}$  l'elemento di  $X$  che l'applicazione associa a  $(i_1, \dots, i_r)$ .

Per denotare una successione  $r$ -upla useremo la seguente scrittura:  $(x_{i_1 \dots i_r})$ . Ovviamente se  $X = \mathbb{R}$ , avremo una successione  $r$ -upla di scalari, se  $X = \vec{\mathcal{E}}$ , avremo una successione  $r$ -upla di vettori e così via.

Indichiamo con  $\mathcal{S}_1$  l'insieme di tutte le successioni semplici di scalari e in generale con  $\mathcal{S}_r$  l'insieme di tutte le successioni  $r$ -uple di scalari.

**Definizione 1.5.** *Chiamiamo sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  ogni applicazione del tipo:*

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_1$$

$$(\vec{e}_i) \longmapsto (x_i),$$

dove il termine individuato dall'indice  $i$  della successione associata alla base  $(\vec{e}_i)$ , cioè  $x_i$ , è in corrispondenza con l' $i$ -esimo vettore  $\vec{e}_i$ .

E' evidente che ad ogni vettore  $\vec{u}$  è associato un sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$ , poiché, fissata una qualsiasi base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$ , resta definita la successione semplice  $(u_i)$  delle sue componenti rispetto a tale base e la  $i$ -esima componente è in corrispondenza con il vettore di base  $\vec{e}_i$ .

**Definizione 1.6.** *Chiamiamo sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  (con  $r > 1$ ) ogni applicazione del tipo*

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_r$$

$$(\vec{e}_i) \longmapsto (x_{i_1 \dots i_r}),$$

dove il termine individuato dalla  $r$ -upla ordinata di indici  $(i_1, \dots, i_r)$  associato alla base  $(\vec{e}_i)$ , cioè  $x_{i_1 \dots i_r}$ , è in corrispondenza con la  $r$ -upla ordinata di vettori di base  $(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_r})$ .

**Esempio 1.1.** Considerata una qualsiasi base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , poniamo:

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Allora se consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (a_{ij}), \end{aligned}$$

si vede subito che questa è un sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$ . Infatti il termine  $a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$  della successione doppia di scalari associata alla base  $(\vec{e}_i)$  è in corrispondenza con la coppia ordinata di vettori di base  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ .

**Definizione 1.7.** Diciamo che un sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  ha carattere vettoriale se la successione semplice di scalari che viene associata ad ogni base ortonormale al variare della base muta con la stessa legge lineare con cui muta la successione delle componenti di un vettore.

Perciò, se è dato un sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  tale che, se  $(x_i)$  è la successione semplice di scalari associata alla base  $(\vec{e}_i)$  e  $(\bar{x}_h)$  è la successione semplice di scalari associata alla base, si ha  $(\vec{e}_h)$ ,

$$\bar{x}_h = \alpha_{ih} x_i \quad h = 1, 2, 3, \quad (1.1.6)$$

allora questo è un sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere vettoriale.

E' evidente che ad ogni vettore in  $\vec{\mathcal{E}}$  è associato un sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere vettoriale e viceversa che ogni sistema semplice di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere vettoriale individua un vettore in  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Definizione 1.8.** Dato un sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  (con  $r > 1$ ), diremo che ha carattere tensoriale se la successione  $r$ -upla di scalari che viene associata ad ogni base al variare della base ortonormale muta con la legge lineare che è la generalizzazione della legge con cui muta la successione delle componenti di un vettore.

Perciò, se è dato un sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  tale che se  $(x_{i_1 \dots i_r})$  è la successione  $r$ -upla associata alla base  $(\vec{e}_i)$  e  $(\bar{x}_{h_1 \dots h_r})$  è la successione associata alla base  $(\vec{e}_h)$ , si ha

$$\bar{x}_{h_1 \dots h_r} = \alpha_{i_1 h_1} \dots \alpha_{i_r h_r} x_{i_1 \dots i_r} \quad h_1, \dots, h_r = 1, 2, 3, \quad (1.1.7)$$

allora questo è un sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale.

**Esempio 1.2.** Riprendiamo l'esempio precedente di sistema doppio di componenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (a_{ij}). \end{aligned}$$

In corrispondenza di una data base  $(\vec{e}_i)$  il sistema doppio di componenti associa la successione  $(a_{ij})$  con

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Fissata una nuova base  $(\vec{e}_h)$ , ad essa viene associata la successione  $(\bar{a}_{hk})$  con

$$\bar{a}_{hk} = \vec{e}_h \cdot \vec{e}_k.$$

D'altra parte,

$$\vec{e}_h = \alpha_{ih} \vec{e}_i$$

per cui

$$\bar{a}_{hk} = (\alpha_{ih} \vec{e}_i) \cdot (\alpha_{jk} \vec{e}_j) = \alpha_{ih} \alpha_{jk} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ih} \alpha_{jk} a_{ij}$$

che è ciò che ci proponevamo di dimostrare.

Nei paragrafi successivi daremo la definizione di tensore di ordine  $r$  o tensore  $r$ -uplo su  $\vec{\mathcal{E}}$  con  $r > 1$  e vedremo che ad ogni tensore di ordine  $r$  è associato un sistema  $r$ -uplo di componenti avente carattere tensoriale e che viceversa ogni sistema  $r$ -uplo di componenti avente carattere tensoriale individua un tensore di ordine  $r$ .

## 1.2 Prodotto tensoriale di spazi vettoriali reali di dimensione finita

Dati i tre spazi vettoriali reali  $V_n, V'_m, V''_{nm}$  di dimensione  $n, m, nm$  rispettivamente, sia  $\tau$  un'applicazione bilineare da  $V_n \times V'_m$  a  $V''_{nm}$ , cioè un'applicazione:

$$\begin{aligned} \tau : V_n \times V'_m &\longrightarrow V''_{nm} \\ (\vec{v}, \vec{v}') &\longmapsto \tau(\vec{v}, \vec{v}') \end{aligned}$$

che gode delle due proprietà seguenti:

- linearità rispetto al primo vettore:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_n, \forall \vec{v}' \in V'_m$$

$$\tau(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \vec{v}') = \lambda_1 \tau(\vec{v}_1, \vec{v}') + \lambda_2 \tau(\vec{v}_2, \vec{v}')$$

- linearità rispetto al secondo vettore:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V_n, \forall \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 \in V'_m$$

$$\tau(\vec{v}, \lambda_1 \vec{v}'_1 + \lambda_2 \vec{v}'_2) = \lambda_1 \tau(\vec{v}, \vec{v}'_1) + \lambda_2 \tau(\vec{v}, \vec{v}'_2).$$

**Definizione 1.9.** Si dice che un'applicazione bilineare  $\tau$  da  $V_n \times V'_m$  a  $V''_{nm}$  attribuisce a  $V''_{nm}$  la struttura di spazio prodotto tensoriale di  $V_n$  per  $V'_m$  e  $V''_{nm}$  si denota con  $V_n \otimes V'_m$  se, comunque si scelgano una base  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  in  $V_n$  e una base  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  in  $V'_m$ , la successione di  $nm$  vettori  $(\tau(\vec{a}_i, \vec{a}'_j))_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  fornisce una base per  $V''_{nm}$ . L'applicazione  $\tau$  è detta allora moltiplicazione tensoriale e  $\forall \vec{v} \in V_n, \forall \vec{v}' \in V'_m$  il vettore  $\tau(\vec{v}, \vec{v}')$  è detto prodotto tensoriale dei vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  e denotato con  $\vec{v} \otimes \vec{v}'$ .

Dati i due spazi vettoriali reali  $V_n, V'_m$ , sia  $V''_{nm} = V_n \otimes V'_m$ .

Ci proponiamo di mostrare come si esprime analiticamente il prodotto tensoriale del vettore  $\vec{v} \in V_n$  e del vettore  $\vec{v}' \in V'_m$ , note le componenti di  $\vec{v}$  rispetto ad una base  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  fissata in  $V_n$  e le componenti di  $\vec{v}'$  rispetto ad una base  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  fissata in  $V'_m$ .

Per semplicità poniamo:

$$\tilde{\pi}_{ij} = \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m.$$

Tenendo presente la definizione di moltiplicazione tensoriale deduciamo che la successione di  $nm$  vettori  $(\tilde{\pi}_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  fornisce una base per  $V_n \otimes V'_m$ .

Se decomponiamo  $\vec{v}$  rispetto alla base  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  e  $\vec{v}'$  rispetto alla base  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$ , abbiamo:

$$\vec{v} = v_i \vec{a}_i, \quad \vec{v}' = v'_j \vec{a}'_j,$$

dove abbiamo adottato la convenzione della somma e dobbiamo tenere presente che la somma su  $i$  va da 1 a  $n$ , mentre quella su  $j$  va da 1 a  $m$ .

Per la bilinearità della moltiplicazione tensoriale deduciamo:

$$\vec{v} \otimes \vec{v}' = (v_i \vec{a}_i) \otimes (v'_j \vec{a}'_j) = v_i v'_j \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j = v_i v'_j \tilde{\pi}_{ij}.$$

Abbiamo così ottenuto la seguente

**Proposizione 1.1.** Fissata la base  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  in  $V_n$  e la base  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  in  $V'_m$ , la componente del prodotto tensoriale di un vettore  $\vec{v} \in V_n$  per un vettore  $\vec{v}' \in V'_m$  rispetto al vettore di base per  $V_n \otimes V'_m$   $\tilde{\pi}_{ij} = \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j$  è data dal prodotto della componente di  $\vec{v}$  rispetto al vettore di base  $\vec{a}_i$  per la componente di  $\vec{v}'$  rispetto al vettore di base  $\vec{a}'_j$ .

Si potrebbe poi dimostrare la seguente

**Proposizione 1.2.** Siano dati i tre spazi vettoriali reali  $V_n, V'_m, V''_{nm}$ . Allora fissata in  $V_n$  una base  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$ , in  $V'_m$  una base  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  e in  $V''_{nm}$  una base  $(\tilde{\pi}_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ , l'applicazione bilineare:

$$\begin{aligned} \tau : V_n \times V'_m &\longrightarrow V''_{nm} \\ (v_i \vec{a}_i, v'_j \vec{a}'_j) &\longmapsto v_i v'_j \tilde{\pi}_{ij} \end{aligned}$$

attribuisce a  $V''_{nm}$  la struttura di spazio prodotto tensoriale di  $V_n$  e  $V'_m$ .

**Osservazione 1.1.** Per come è definita l'applicazione  $\tau$  nella proposizione 1.2, si deduce:

$$\tilde{\pi}_{hk} = \vec{a}_h \otimes \vec{a}'_k \quad h = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.$$

**Definizione 1.10.** Se  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  è una base per  $V_n$  e  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  è una base per  $V'_m$ , la base per  $V_n \otimes V'_m$  data da  $(\tilde{\pi}_{ij} = \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  è detta base associata alle due basi  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$ ,  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$ .

La definizione di moltiplicazione tensoriale si estende al caso di più di due spazi vettoriali reali se si richiede che sia associativa.

Infatti supponiamo dapprima di avere tre spazi vettoriali reali di dimensione finita:  $V_n, V'_m, V''_p$ .

Assumiamo che la moltiplicazione tensoriale sia associativa, ossia che

$$\forall \vec{v} \in V_n, \forall \vec{v}' \in V'_m, \forall \vec{v}'' \in V''_p$$

$$(\vec{v} \otimes \vec{v}') \otimes \vec{v}'' = \vec{v} \otimes (\vec{v}' \otimes \vec{v}'') \quad (1.2.1)$$

e poniamo

$$(\vec{v} \otimes \vec{v}') \otimes \vec{v}'' = \vec{v} \otimes (\vec{v}' \otimes \vec{v}'') =: \vec{v} \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}''.$$

**Definizione 1.11.** Nell'ipotesi in cui ci siamo posti, definiamo spazio prodotto tensoriale dei tre spazi vettoriali reali  $V_n, V'_m, V''_p$  il seguente spazio vettoriale reale di dimensione  $nmp$ :

$$(V_n \otimes V'_m) \otimes V''_p$$

che denotiamo semplicemente con:

$$V_n \otimes V'_m \otimes V''_p.$$

**Proposizione 1.3.** *Dati i tre spazi vettoriali reali  $V_n, V'_m, V''_p$ , la (1.2.1) è soddisfatta se si impone che sia soddisfatta dai vettori di tre basi fissate in  $V_n, V'_m, V''_p$ .*

Dimostrazione

Sia  $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$  una base per  $V_n$ ,  $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$  per  $V'_m$  e  $(\vec{a}''_r)_{r=1, \dots, p}$  per  $V''_p$ . Supponiamo che per  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, p$  si abbia

$$(\vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j) \otimes \vec{a}''_r = \vec{a}_i \otimes (\vec{a}'_j \otimes \vec{a}''_r).$$

Allora

$$\forall \vec{v} \in V_n, \forall \vec{v}' \in V'_m, \forall \vec{v}'' \in V''_p$$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \otimes \vec{v}') \otimes \vec{v}'' &= (v_i \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j) \otimes v''_r \vec{a}''_r = v_i v'_j v''_r (\vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j) \otimes \vec{a}''_r = \\ &= v_i v'_j v''_r \vec{a}_i \otimes (\vec{a}'_j \otimes \vec{a}''_r) = \vec{v} \otimes (\vec{v}' \otimes \vec{v}''), \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

**Osservazione 1.2.** Tenendo presente la proposizione 1.2, è evidente che è sempre possibile fare in modo che sussista la (1.2.1).

Dati  $r$  spazi vettoriali reali di dimensione finita con  $r > 3$ , da ciò che abbiamo visto sopra discende immediatamente la definizione del loro prodotto tensoriale per ricorrenza su  $r$ .

**Osservazione 1.3.** Tutte le definizioni che abbiamo dato e i risultati che abbiamo dedotto continuano a sussistere se si considerano spazi vettoriali di dimensione finita definiti su uno stesso campo diverso da  $\mathbb{R}$ .

## 1.3 Tensori di ordine $r$

Cominciamo col dare la definizione di **tensore doppio o tensore di ordine 2** su  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Definizione 1.12.** *Chiamiamo tensore doppio o tensore di ordine 2 su  $\vec{\mathcal{E}}$  ogni elemento di  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ .*

Osserviamo che  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione 9 e dunque i tensori doppi sono essi stessi dei vettori, essendo elementi di uno spazio vettoriale.

Nel seguito i tensori doppi, come anche i tensori di ordine superiore, saranno denotati con una lettera (latina o greca, minuscola o maiuscola) sormontata dal simbolo  $\sim$ .

Sia  $\tilde{t}$  un tensore doppio. Fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , ad essa resta associata una base  $(\tilde{\pi}_{ij})$  per  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$  con

$$\tilde{\pi}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.$$

Poiché  $(\tilde{\pi}_{ij})$  è una base per  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ , il tensore doppio  $\tilde{t}$  si esprime in modo unico come una combinazione lineare dei vettori di tale base. Perciò

$$\tilde{t} = t_{ij} \tilde{\pi}_{ij} = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.$$

Dunque, fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , al tensore doppio  $\tilde{t}$  resta associata la successione doppia di scalari  $(t_{ij})$ , detta, impropriamente, *successione delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$* .

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 1.4.** *Ad ogni tensore doppio su  $\vec{\mathcal{E}}$  resta associato un sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale.*

Dimostrazione

Sia  $\tilde{t}$  un tensore doppio su  $\vec{\mathcal{E}}$ . Come abbiamo osservato prima, fissata una qualsiasi base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , al tensore resta associata la successione doppia  $(t_{ij})$  delle sue componenti. Se consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (t_{ij}), \end{aligned}$$

questa è un sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  poiché il termine generale  $t_{ij}$  della successione doppia associata alla base  $(\vec{e}_i)$  è in corrispondenza con la coppia ordinata di vettori di base  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ , essendo  $t_{ij}$  la componente di  $\tilde{t}$  rispetto a  $\tilde{\pi}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ .

Proviamo ora che il sistema doppio considerato ha carattere tensoriale, ossia mostriamo che se  $(t_{ij})$  è la successione delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  e  $(\bar{t}_{hk})$  è la successione delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$ , si ha

$$\bar{t}_{hk} = \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij}. \quad (1.3.1)$$

Come sappiamo, in corrispondenza della base  $(\vec{e}_i)$  abbiamo

$$\tilde{t} = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (1.3.2)$$

e in corrispondenza della base  $(\vec{e}_h)$

$$\tilde{t} = \bar{t}_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k. \quad (1.3.3)$$



Dalle (1.3.2) e (1.3.3) discende:

$$\bar{t}_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \quad (1.3.4)$$

Ma se decomponiamo i vettori della prima base rispetto alla seconda, abbiamo:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ih} \vec{e}_h, \quad \vec{e}_j = \alpha_{jk} \vec{e}_k. \quad (1.3.5)$$

Sostituendo le (1.3.5) nella (9.3.6), deduciamo:

$$\bar{t}_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k = t_{ij} (\alpha_{ih} \vec{e}_h) \otimes (\alpha_{jk} \vec{e}_k) = \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k, \quad (1.3.6)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la bilinearità del prodotto tensoriale.

Dalla (1.3.6) otteniamo:

$$\bar{t}_{hk} = \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij}$$

che è ciò che volevamo ottenere.

E' immediato provare la

**Proposizione 1.5.** *Ogni sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  che ha carattere tensoriale individua univocamente un tensore doppio su  $\vec{\mathcal{E}}$ , precisamente il tensore doppio che ha come successione delle sue componenti rispetto ad una data base  $(\vec{e}_i)$  la successione doppia che il sistema associa a tale base.*

Come sappiamo, dati un vettore  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  e due basi ortonormali  $(\vec{e}_i), (\vec{e}_h)$ , si ha:

$$\bar{v}_h = \alpha_{ih} v_i,$$

essendo  $(v_i)$  e  $(\bar{v}_h)$  le successioni delle componenti di  $\vec{v}$  rispetto alle basi  $(\vec{e}_i)$  e  $(\vec{e}_h)$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

dove alla matrice  $\mathbb{A}^t$  si può sostituire la matrice  $\mathbb{A}^{-1}$ .

Per quanto riguarda i tensori doppi, osserviamo che ad ogni tensore doppio  $\tilde{t}$ , fissata una base  $(\vec{e}_i)$ , resta associata una matrice  $3 \times 3$  e precisamente la matrice  $[t_{ij}]$  avente come elementi le componenti del tensore rispetto alla base

Possiamo allora scrivere in forma matriciale la legge con cui muta la successione delle componenti di un tensore doppio al variare della base:

$$[\bar{t}_{hk}] = \mathbb{A}^t [t_{ij}] \mathbb{A}, \quad (1.3.7)$$

dove  $[t_{ij}]$ ,  $[\bar{t}_{hk}]$  sono le matrici delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto alle basi  $(\vec{e}_i)$ ,  $(\vec{e}_h)$ . Vediamo di provare la (9.4.1).

Come abbiamo visto, sussiste la (1.3.1):

$$\bar{t}_{hk} = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij},$$

dove abbiamo esplicitato la somma sugli indici  $i$  e  $j$  per meglio far comprendere i passaggi successivi.

Il secondo membro della (1.3.1) si può scrivere nella forma:

$$\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij} = \sum_{i=1}^3 \left( \alpha_{ih} \sum_{j=1}^3 t_{ij} \alpha_{jk} \right).$$

D'altra parte,  $\alpha_{ih}$  si può riguardare come l'elemento che sta nell' $h$ -esima riga e nella  $i$ -esima colonna nella matrice  $\mathbb{A}^t$ , mentre  $\sum_{j=1}^3 t_{ij} \alpha_{jk}$  è l'elemento che sta nella  $i$ -esima riga e  $k$ -esima colonna nella matrice  $[t_{ij}] \mathbb{A}$ . Dunque, per definizione di prodotto di matrici,  $\bar{t}_{hk}$  risulta essere l'elemento che sta nell' $h$ -esima riga e nella  $k$ -esima colonna nella matrice  $\mathbb{A}^t ([t_{ij}] \mathbb{A}) = \mathbb{A}^t [t_{ij}] \mathbb{A}$ .

Siamo così arrivati a stabilire la (9.4.1) e possiamo quindi enunciare la seguente

**Proposizione 1.6.** *Dato il tensore doppio  $\tilde{t}$ , quando si passa dalla base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  alla base ortonormale  $(\vec{e}_h)$ , la matrice delle sue componenti varia con la legge espressa in forma matriciale dalla (9.4.1).*

Ci proponiamo ora di dare la definizione di tensore  $r$ -uplo o tensore di ordine  $r$  su  $\vec{\mathcal{E}}$  con  $r > 2$ . A tal fine facciamo l'ipotesi che la moltiplicazione tensoriale goda della proprietà associativa.

**Definizione 1.13.** *Definiamo tensore  $r$ -uplo o tensore di ordine  $r$  (con  $r > 2$ ) su  $\vec{\mathcal{E}}$  ogni elemento di  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ .*

Se fissiamo una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , a questa, come sappiamo, per la definizione di moltiplicazione tensoriale, resta associata una base per lo spazio vettoriale (di dimensione  $3^r$ )  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  e precisamente la base  $(\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r})$  tale che

$$\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r} = \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Se allora consideriamo un tensore  $\tilde{t}$  di ordine  $r$ , lo possiamo decomporre rispetto alla base  $(\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r})$  :

$$\tilde{t} = t_{i_1 \dots i_r} \tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Dunque, analogamente a quanto avviene per un tensore di ordine 2, ad ogni tensore  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  con  $r > 2$  resta associata la successione  $r$ -upla di scalari  $(t_{i_1 \dots i_r})$ , detta impropriamente *successione delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$* .

Procedendo in maniera analoga a quanto visto per i tensori doppi, si prova che, date due basi ortonormali  $(\vec{e}_i)$  e  $(\vec{e}_h)$  per  $\vec{\mathcal{E}}$  rispetto alle quali  $\tilde{t}$  ha come successioni delle sue componenti  $(t_{i_1 \dots i_r})$  e  $(\bar{t}_{h_1 \dots h_r})$  rispettivamente, si ha

$$\bar{t}_{h_1 \dots h_r} = \alpha_{i_1 h_1} \dots \alpha_{i_r h_r} t_{i_1 \dots i_r}.$$

Sussiste dunque la seguente

**Proposizione 1.7.** *Ad ogni tensore  $r$ -uplo su  $\vec{\mathcal{E}}$  con  $r > 2$  è associato un sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale. Viceversa ogni sistema  $r$ -uplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale individua univocamente un tensore  $r$ -uplo su  $\vec{\mathcal{E}}$ .*

Vediamo ora due esempi di tensori su  $\vec{\mathcal{E}}$  che svolgono un ruolo importante nell'ambito del Calcolo Tensoriale: uno è un esempio di tensore doppio, mentre l'altro è un esempio di tensore triplo.

**Esempio 2.3. Tensore fondamentale.** Fissata in  $\vec{\mathcal{E}}$  la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , consideriamo la successione doppia di scalari  $(a_{ij})$  definita nel paragrafo 1.1 per cui

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Come abbiamo mostrato, l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (a_{ij}) \end{aligned}$$

è un sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale. Allora per la proposizione 7.3.1 tale sistema individua un tensore doppio che viene denotato con  $\tilde{a}$  e prende il nome di *tensore fondamentale*. La successione delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  è dunque la successione doppia  $(a_{ij})$ .

Si noti che, qualunque sia la base ortonormale  $\vec{e}_i$ , si ha  $a_{ij} = a_{ji}$  e che inoltre:

$$a_{ij} = \delta_{ij},$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker. Perciò la matrice delle componenti del tensore fondamentale rispetto ad ogni base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$  è la matrice identità.

**Esempio 2.4. Tensore di Ricci.** Riguardiamo  $\vec{\mathcal{E}}$  come spazio vettoriale orientato considerando solo basi che siano terne destre e denotiamo con  $\mathcal{B}_0^+$  l'insieme delle basi ortonormali che sono terne destre.

Fissata la base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0^+$ , introduciamo la successione tripla di scalari (ossia di  $3^3 = 27$  scalari)  $(\vartheta_{ijr})$  con

$$\vartheta_{ijr} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r. \quad (1.3.8)$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 1.8.** *L'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^+ &\longrightarrow \mathcal{S}_3 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (\vartheta_{ijr}) \end{aligned}$$

è un sistema triplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale.

Dimostrazione

E' evidente che l'applicazione è un sistema triplo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Dimostriamo che ha carattere tensoriale.

A tal fine consideriamo due basi  $(\vec{e}_i), (\vec{e}_h) \in \mathcal{B}_0^+$  ed indichiamo con  $(\vartheta_{ijr})$  e  $(\bar{\vartheta}_{hks})$  le successioni che il sistema triplo introdotto associa alle due basi.

Avremo perciò:

$$\vartheta_{ijr} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r, \quad \bar{\vartheta}_{hks} = \vec{e}_h \times \vec{e}_k \cdot \vec{e}_s.$$

La proposizione sarà dimostrata se proveremo che:

$$\bar{\vartheta}_{hks} = \alpha_{ih} \alpha_{jk} \alpha_{rs} \vartheta_{ijr}. \quad (1.3.9)$$

Decomponiamo i vettori della prima base rispetto alla seconda per cui:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{hks} &= \vec{e}_h \times \vec{e}_k \cdot \vec{e}_s = (\alpha_{ih} \vec{e}_i) \times (\alpha_{jk} \vec{e}_j) \cdot (\alpha_{rs} \vec{e}_r) = \\ &= \alpha_{ih} \alpha_{jk} \alpha_{rs} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r = \\ &= \alpha_{ih} \alpha_{jk} \alpha_{rs} \vartheta_{ijr} \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sfruttato la linearità del prodotto misto rispetto ai tre vettori.

Abbiamo così ottenuto il risultato che ci proponevamo di dedurre.

Per la proposizione 1.7 possiamo asserire che il sistema triplo di componenti

definito dalle (1.3.8) individua un tensore di ordine 3, detto *tensore di Ricci* e denotato con  $\tilde{\vartheta}$ .

Vogliamo ora stabilire quanto valgono le componenti del tensore di Ricci in una qualsiasi base ortonormale in  $\mathcal{B}_0^+$ .

Premettiamo alcune definizioni che ci saranno utili.

Considerato l'insieme dei primi  $n$  numeri naturali:  $I_n = \{1, \dots, n\}$ , prendiamo in esame le possibili permutazioni degli  $n$  numeri, che, com'è noto, sono  $n!$ .

**Definizione 1.14.** *Sia  $(i_1, \dots, i_n)$  una permutazione dei primi  $n$  numeri naturali. Presi due termini della permutazione:  $i_p, i_q$ , diciamo che questi presentano inversione se, essendo  $p < q$ , si ha  $i_p > i_q$ .*

**Definizione 1.15.** *Diremo che una permutazione dei primi  $n$  numeri naturali è pari (o di classe pari) se in essa non sono presenti inversioni o se il numero totale delle inversioni è pari.*

*Diremo poi che una permutazione dei primi  $n$  numeri naturali è dispari (o di classe dispari) se se il numero totale delle inversioni in essa presenti è dispari.*

Consideriamo in particolare le permutazioni dei primi tre numeri naturali. Sono in tutto  $3! = 6$  e se le ripartiamo tra permutazioni pari e permutazioni dispari, otteniamo:

<i>pari</i>	<i>dispari</i>
(1, 2, 3)	(2, 1, 3)
(3, 1, 2)	(1, 3, 2)
(2, 3, 1)	(3, 2, 1)

**Definizione 1.16.** *Chiamiamo simbolo di permutazione (o alternatore) a tre indici il simbolo seguente:*

$$\epsilon_{ijr} = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, r \text{ non sono distinti} \\ 1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione dispari.} \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Tenendo presente quanto abbiamo ottenuto in precedenza sulle permutazioni dei primi tre numeri naturali, deduciamo che il simbolo di permutazione a tre indici assume i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \\ \epsilon_{ijr} = 0 \text{ per tutti gli altri valori degli indici } i, j, r. \end{aligned}$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 1.9.** *Le componenti del tensore di Ricci  $\tilde{\vartheta}$  rispetto alla base ortonormale  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0^+$ , sono date da:*

$$\vartheta_{ijr} = \epsilon_{ijr}.$$

Dimostrazione

Proviamo dapprima che:

$$\vartheta_{ijr} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, r \text{ non sono distinti} \\ 1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione dispari.} \end{cases}$$

E' evidente che se  $i, j, r$  non sono distinti  $\vartheta_{ijr} = 0$  poiché nel prodotto misto che lo definisce abbiamo almeno due vettori uguali.

Supponiamo ora che gli indici siano distinti ed osserviamo che, essendo  $(\vec{e}_i)$  una terna destra, si ha:

$$\vartheta_{123} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1.$$

Se  $(i, j, r)$  è una permutazione pari, diversa da  $(1, 2, 3)$ , con un numero pari di scambi ci riportiamo alla permutazione naturale  $(1, 2, 3)$  e quindi con un numero pari di scambi tra i vettori di base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  in  $\vartheta_{ijr}$  ci riportiamo a  $\vartheta_{123}$ . D'altra parte, come sappiamo, per le proprietà del prodotto misto, un numero pari di scambi tra i vettori non modifica il risultato e quindi se  $(i, j, r)$  è una permutazione pari si ha

$$\vartheta_{ijr} = \vartheta_{123} = 1.$$

Se  $(i, j, r)$  è una permutazione dispari, con un numero dispari di scambi ci riportiamo alla permutazione naturale  $(1, 2, 3)$  e quindi con un numero dispari di scambi tra i vettori di base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  in  $\vartheta_{ijr}$  ci riportiamo a  $\vartheta_{123}$ . Ma con un numero dispari di scambi tra i vettori il prodotto misto cambia di segno e dunque se  $(i, j, r)$  è una permutazione dispari si ha

$$\vartheta_{ijr} = -\vartheta_{123} = -1.$$

La proposizione risulta così dimostrata.

**Definizione 1.17.** *Si definiscono tensori di ordine 1 i vettori di  $\vec{\mathcal{E}}$  e tensori di ordine 0 gli scalari che non variano al variare della base ortonormale.*

# Capitolo 2

## Algebra tensoriale

### 2.1 Operazioni elementari sui tensori

In primo luogo ricordiamo che un tensore di ordine  $r$  su  $\vec{\mathcal{E}}$  è un elemento di  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ , spazio vettoriale reale di dimensione  $3^r$ .

Nel seguito, poiché considereremo sempre tensori su  $\vec{\mathcal{E}}$ , ometteremo di scriverlo.

E' evidente che l'uguaglianza tra due tensori si può avere solo tra tensori dello stesso ordine poiché i due tensori devono essere lo stesso elemento dello stesso spazio vettoriale.

Siano  $\tilde{A}, \tilde{B}$  tensori di ordine  $r$ . Fissata la base  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , a tale base è associata la base  $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r})$  in  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ . Allora

$$\tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}, \quad \tilde{B} = B_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Poiché due vettori di uno spazio vettoriale sono uguali se e solo se hanno uguali le componenti omologhe rispetto ad una stessa base, deduciamo:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \iff A_{i_1 \dots i_r} = B_{i_1 \dots i_r}.$$

Sussiste perciò la seguente

**Proposizione 2.1.** *Due tensori  $\tilde{A}, \tilde{B}$  dello stesso ordine sono uguali se e solo se hanno uguali le componenti omologhe rispetto ad una base ortonormale fissata in  $\vec{\mathcal{E}}$ .*

In particolare il tensore nullo di ordine  $r$ , che denotiamo con  $\tilde{0}$ , ha nulle tutte le sue componenti rispetto ad ogni base.

E' da notare che l'uguaglianza tra due tensori è intrinseca, cioè indipendente dalla base e lo si può verificare direttamente mostrando che se due tensori dello stesso ordine hanno uguali le componenti in una base, allora le hanno uguali in ogni altra base.

Dati i due tensori  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  di ordine  $r$ , sono ben definiti:

- la somma dei due tensori, denotata con  $\tilde{A} + \tilde{B}$ , che è ancora un tensore di ordine  $r$
- il prodotto di uno scalare  $\lambda$  ( $\in \mathbb{R}$ ) per il tensore  $\tilde{A}$ , denotato con  $\lambda \tilde{A}$ , che è ancora tensore di ordine  $r$ .

Poiché  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  sono due elementi dello stesso spazio vettoriale, fissata la base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$ , per ben note proprietà degli spazi vettoriali, si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B} &= (A_{i_1 \dots i_r} + B_{i_1 \dots i_r}) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}, \\ \lambda \tilde{A} &= (\lambda A_{i_1 \dots i_r}) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.\end{aligned}$$

Si ottiene così la seguente

**Proposizione 2.2.** *Se  $(A_{i_1 \dots i_r})$ ,  $(B_{i_1 \dots i_r})$  sono le successioni delle componenti dei tensori  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  di ordine  $r$  rispetto ad una qualsiasi base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , allora le successioni  $(A_{i_1 \dots i_r} + B_{i_1 \dots i_r})$ ,  $(\lambda A_{i_1 \dots i_r})$  individuano due sistemi  $r$ -upli di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  che hanno carattere tensoriale poiché sono le successioni delle componenti rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  dei tensori di ordine  $r$   $\tilde{A} + \tilde{B}$ ,  $\lambda \tilde{A}$ .*

**Osservazione 2.1** La definizione di somma di due tensori e di moltiplicazione di uno scalare per un tensore sono indipendenti dalla base ortonormale utilizzata, così come l'uguaglianza tra tensori.

Poiché i tensori di un dato ordine sono elementi di uno spazio vettoriale reale, potremo sempre eseguire la moltiplicazione di due tensori non necessariamente dello stesso ordine.

Infatti consideriamo un tensore  $\tilde{A}$  di ordine  $r$  e un tensore  $\tilde{B}$  di ordine  $s$  con  $r$  non necessariamente uguale a  $s$ . Il primo è un elemento di  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ , spazio vettoriale reale di dimensione  $3^r$  e il secondo è un elemento di  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$ ,

spazio vettoriale reale di dimensione  $3^s$ .

Il prodotto tensoriale di  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  è ben definito e si ha:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{(r+s) \text{ volte}},$$



cioè  $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$  è un tensore di ordine  $r + s$ .

Se ora fissiamo una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , a tale base restano associate la base  $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r})$  per  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  e la base  $(\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s})$  per  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$ .

Decomponiamo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  rispetto alla rispettiva base per cui:

$$\tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}, \quad \tilde{B} = B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}.$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) \otimes (B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}) = \\ &= A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}. \end{aligned}$$

D'altra parte, se consideriamo la successione di  $3^{r+s}$  tensori di ordine  $(r + s)$  data da  $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s})$ , questa è una base per  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{(r+s) \text{ volte}}$ .

Quindi il prodotto tensoriale del tensore di ordine  $r$   $\tilde{A}$  e del tensore di ordine  $s$   $\tilde{B}$  è un tensore di ordine  $r + s$  che ha componente  $A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s}$  rispetto al vettore di base  $\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}$ .

Possiamo così enunciare la seguente

**Proposizione 2.3.** *Se  $(A_{i_1 \dots i_r})$  è la successione delle componenti del tensore  $\tilde{A}$  di ordine  $r$  rispetto alla base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e  $(B_{j_1 \dots j_s})$  è la successione delle componenti del tensore  $\tilde{B}$  di ordine  $s$  rispetto alla stessa base, allora la successione  $(r + s)$ -pla di scalari  $(A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s})$  individua un sistema  $(r + s)$ -plo di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$  avente carattere tensoriale perché è la successione delle componenti del tensore di ordine  $(r + s)$   $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ .*

Si potrebbe provare direttamente, mediante un cambiamento di base, che la definizione di prodotto tensoriale non dipende dalla base ortonormale utilizzata.

Finora non abbiamo ancora introdotto alcun concetto nuovo nell'ambito dell'Algebra Tensoriale, poiché abbiamo semplicemente tenuto presente che i tensori di ordine  $r$  sono elementi dello spazio vettoriale reale  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ .

A partire dal paragrafo seguente introdurremo delle nuove operazioni tra tensori.

## 2.2 Contrazione di indici e composizione di due tensori

**Definizione 2.1.** *Dato un tensore  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  ( $r \geq 2$ ), consideriamo la successione delle sue componenti  $(t_{i_1 \dots i_r})$  rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  di*

$\vec{\mathcal{E}}$ . La contrazione di due indici consiste nell'uguagliare due degli  $r$  indici che contraddistinguono le componenti di  $\tilde{t}$  e poi sommare da 1 a 3 rispetto a tali indici uguali.

Ad esempio, se in  $(t_{i_1 \dots i_r})$  contraiamo il primo e l'ultimo indice ( $i_1 = i_r = i$ ), otteniamo la successione di  $3^{r-2}$  scalari data da  $(t_{i i_2 \dots i})$ .

Si dimostra che questa nuova successione ha ancora carattere tensoriale e quindi individua un tensore di ordine  $r - 2$ .

Sussiste infatti la seguente

**Proposizione 2.4.** *Dato un tensore di ordine  $r \geq 2$ , se in esso si contraggono due indici si ottiene un tensore di ordine  $r - 2$ , detto tensore contratto del tensore di partenza.*

#### Dimostrazione

Dimostriamo la proposizione nel caso più semplice, cioè nel caso  $r = 2$ . In maniera del tutto analoga si ragiona nel caso  $r > 2$ .

Proviamo dunque che se abbiamo un tensore  $\tilde{t}$  di ordine 2, contraendo i suoi due indici si ottiene un tensore di ordine 0, ossia uno scalare invariante al variare della base ortonormale.

Fissiamo dapprima la base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$  e consideriamo la successione delle componenti  $(t_{ij})$  di  $\tilde{t}$ . Se contraiamo i due indici  $i$  e  $j$ , otteniamo lo scalare:

$$t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}.$$

Fissiamo ora una nuova base  $(\bar{e}_i) \in \mathcal{B}_0$  e consideriamo la successione delle componenti  $(\bar{t}_{hk})$  di  $\tilde{t}$  nella nuova base. Contraendo i due indici  $h$  e  $k$  si ha:

$$\bar{t}_{hh} = \bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33}.$$

D'altra parte, se esprimiamo le nuove componenti tramite le vecchie, deduciamo:

$$\bar{t}_{hh} = \alpha_{ih} \alpha_{jh} t_{ij}. \quad (2.2.1)$$

Osserviamo che  $\alpha_{ih}$  è l'elemento che sta nella  $i$ -esima riga e nella  $h$ -esima colonna in  $\mathbb{A}$ , mentre  $\alpha_{jh}$  si può riguardare come l'elemento che sta nella  $h$ -esima riga e nella  $j$ -esima colonna in  $\mathbb{A}^t$ . Dunque  $\alpha_{ih} \alpha_{jh}$  è l'elemento che sta nella  $i$ -esima riga e nella  $j$ -esima colonna in  $\mathbb{A} \mathbb{A}^t$ . Ma poiché  $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$ , si ha

$$\mathbb{A} \mathbb{A}^t = \mathbb{I} \quad \implies \quad \alpha_{ih} \alpha_{jh} = \delta_{ij}.$$

Sostituendo nella (2.2.1), abbiamo:

$$\bar{t}_{hh} = \delta_{ij} t_{ij} = t_{ii}.$$

Dunque il contratto di  $\tilde{t}$  è uno scalare che non varia quando si passa da una base ortonormale ad un'altra base ortonormale, ossia è un tensore di ordine 0 come ci proponevamo di dimostrare.

**Osservazione 2.2.** Prendiamo come tensore  $\tilde{t}$  di ordine 2 il prodotto tensoriale di due vettori di  $\vec{\mathcal{E}}$ , ossia

$$\tilde{t} = \vec{u} \otimes \vec{v}.$$

Fissata la base  $(\vec{e}_i)$ , la successione delle sue componenti è data da  $(t_{ij} = u_i v_j)$  per cui il contratto di  $\tilde{t}$  assume la forma seguente:

$$t_{ii} = u_i v_i = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dunque il contratto del prodotto tensoriale di due vettori è il prodotto scalare dei vettori stessi.

Se abbiamo un tensore di ordine  $r \geq 4$ , possiamo ripetere più volte l'operazione di contrazione. Se supponiamo di eseguire  $p$  volte la contrazione di due indici (ovviamente  $p \leq \frac{r}{2}$ ), otteniamo un tensore di ordine  $r - 2p$ .

Introduciamo ora una nuova operazione.

**Definizione 2.2.** Prende il nome di *moltiplicazione contratta o composizione* l'operazione che si ottiene combinando la moltiplicazione tensoriale e la contrazione di indici nel modo seguente.

Dati i due tensori  $\tilde{A}$  di ordine  $r$  e  $\tilde{B}$  di ordine  $s$ , consideriamone il prodotto tensoriale  $\tilde{A} \otimes \tilde{B} =: \tilde{C}$  che è ovviamente un tensore di ordine  $r + s$ . Contraiamo nel tensore  $\tilde{C}$   $p$  indici di  $\tilde{A}$  e  $p$  indici di  $\tilde{B}$  ( $p \leq \min\{r, s\}$ ). Il risultato è un tensore di ordine  $r + s - 2p$ . Si dice allora che questo nuovo tensore è ottenuto componendo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  con la contrazione di  $p$  indici di  $\tilde{A}$  e di  $p$  indici di  $\tilde{B}$ .

Vediamo alcuni esempi.

**Esempio 2.3.** Siano dati un tensore  $\tilde{A}$  di ordine 2 e un vettore  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ .

Il loro prodotto tensoriale è  $\tilde{A} \otimes \vec{v} =: \tilde{C}$ , tensore di ordine 3.

Fissata una qualsiasi base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$ , la successione delle componenti di  $\tilde{C}$  è data da

$$(C_{ijr} = A_{ij} v_r).$$

Se contraiamo il primo indice di  $\tilde{A}$  e l'indice di  $\vec{v}$ , otteniamo una successione semplice di scalari  $(A_{ij} v_i)$ , che rappresenta la successione delle componenti di un vettore  $\vec{u}$ :

$$(A_{ij} v_i) = (u_j).$$

Diciamo allora che il vettore  $\vec{u}$  è ottenuto componendo il tensore doppio  $\tilde{A}$  e il vettore  $\vec{v}$  con la contrazione del primo indice di  $\tilde{A}$  e dell'indice di  $\vec{v}$ .

Dati sempre  $\tilde{A}$  e  $\vec{v}$ , possiamo anche contrarre nel loro prodotto tensoriale il secondo indice di  $\tilde{A}$  e l'indice di  $\vec{v}$ . Otteniamo ancora una successione semplice di scalari  $(A_{ij} v_j)$  che rappresenta la successione delle componenti di un nuovo vettore  $\vec{u}'$ :

$$(A_{ij} v_j) = (u'_i).$$

Il vettore  $\vec{u}'$  è ottenuto componendo il tensore doppio  $\tilde{A}$  e il vettore  $\vec{v}$  con la contrazione del secondo indice di  $\tilde{A}$  e dell'indice di  $\vec{v}$ .

**Esempio 2.4.** Siano dati i due tensore  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  di ordine 2 e consideriamo il loro prodotto tensoriale:  $\tilde{A} \otimes \tilde{B} =: \tilde{C}$ , tensore di ordine 4. Fissata la base  $(\vec{e}_i)$ , abbiamo:

$$(C_{ijrs}) = (A_{ij} B_{rs}).$$

Contraiamo il secondo indice di  $\tilde{A}$  e il primo indice di  $\tilde{B}$ .

Otteniamo così una successione doppia di scalari  $(A_{ij} B_{js})$  che rappresenta la successione delle componenti di un tensore doppio  $\tilde{D}$ :

$$(A_{ij} B_{js}) = (D_{is}).$$

Diciamo allora che  $\tilde{D}$  è ottenuto componendo il tensore doppio  $\tilde{A}$  e il tensore doppio  $\tilde{B}$  con la contrazione del secondo indice di  $\tilde{A}$  e del primo indice di  $\tilde{B}$ .

Facciamo ora una doppia contrazione di indici in  $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ : contraiamo il primo indice di  $\tilde{A}$  e il primo indice di  $\tilde{B}$  ed analogamente il secondo indice di  $\tilde{A}$  e il secondo indice di  $\tilde{B}$ .

Otteniamo in tal modo uno scalare dato da:  $A_{ij} B_{ij}$  che risulta invariante al variare della base ortonormale, ossia un tensore di ordine 0.

**Osservazione 2.3** Il tensore fondamentale  $\tilde{a}$  è elemento neutro rispetto alla composizione. Infatti, dato un tensore  $\tilde{t}$  di ordine  $r$ , contraendone un indice con uno di  $\tilde{a}$ , si ottiene il tensore stesso.

Ad esempio, consideriamo un tensore  $\tilde{t}$  di ordine 2. Fissata la base  $(\vec{e}_i)$ , la successione delle sue componenti sia  $(t_{ij})$ . Contraiamo il secondo indice di  $\tilde{t}$  ed il primo di  $\tilde{a}$ . Tenendo presente che  $a_{ij} = \delta_{ij}$ , otteniamo  $(t_{ij} \delta_{jr}) = (t_{ir})$  che è la successione delle componenti di  $\tilde{t}$ .

Introduciamo ora una particolare notazione che useremo molto spesso in seguito.

Siano dati i due tensori  $\tilde{A}$  di ordine  $r$  e  $\tilde{B}$  di ordine  $s$  con  $s \geq r$ . Denotiamo con

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

il tensore  $\tilde{C}$  di ordine  $s - r$  che si ottiene componendo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  con la contrazione degli  $r$  indici di  $\tilde{A}$  con i primi  $r$  indici di  $\tilde{B}$  presi nello stesso ordine. Allora, fissata una base  $(\vec{e}_i)$ , le componenti di  $\tilde{C}$  sono date da:

$$C_{j_1 \dots j_{s-r}} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{s-r}}.$$

Denotiamo poi con

$$\tilde{B} \cdot \tilde{A}$$

il tensore  $\tilde{C}'$  di ordine  $s - r$  che si ottiene componendo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  con la contrazione degli  $r$  indici di  $\tilde{A}$  con gli ultimi  $r$  indici di  $\tilde{B}$  presi nello stesso ordine. Allora, fissata una base  $(\vec{e}_i)$ , le componenti di  $\tilde{C}'$  sono date da:

$$C'_{i_1 \dots i_{s-r}} = B_{i_1 \dots i_{s-r} j_1 \dots j_r} A_{j_1 \dots j_r}.$$

Ovviamente se  $r = s$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r},$$

che è un tensore di ordine 0.

**Esempio 2.5.** Siano dati il vettore  $\vec{v}$  e il tensore  $\tilde{B}$  di ordine 2. Se facciamo uso della notazione appena introdotta, denoteremo con  $\vec{v} \cdot \tilde{B}$  il vettore  $\vec{u}$  di componenti:

$$u_j = v_i B_{ij},$$

e con  $\tilde{B} \cdot \vec{v}$  il vettore  $\vec{u}'$  di componenti:

$$u'_i = B_{ij} v_j.$$

## 2.3 Altre nozioni di algebra tensoriale

Nella prima parte del paragrafo ci limiteremo a considerare tensori doppi, ossia elementi dello spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ .

Come abbiamo osservato in precedenza, fissata una base  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$ , ad ogni tensore doppio  $\tilde{t}$  risulta associata una matrice  $3 \times 3$ , cioè la matrice  $[t_{ij}]$  delle sue componenti rispetto a tale base.

Se consideriamo il contratto di  $\tilde{t}$ , questo è lo scalare:  $t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}$ , ossia la somma degli elementi della diagonale principale della matrice  $[t_{ij}]$  delle componenti del tensore, che, con linguaggio matriciale, è nota come traccia della matrice  $[t_{ij}]$ .

Fissata un'altra base ortonormale  $(\vec{e}_h)$ , al tensore  $\tilde{t}$  è associata una nuova matrice, cioè la matrice  $[\tilde{t}_{hk}]$  delle sue nuove componenti. D'altra parte, per quanto

visto nel paragrafo precedente,  $\bar{t}_{hh} = t_{ii}$ . Quindi la somma degli elementi della diagonale principale della matrice delle componenti di un tensore doppio rispetto ad una base ortonormale non varia al variare della base. Siamo così portati ad introdurre la seguente:

**Definizione 2.3.** *Dato un tensore doppio  $\tilde{t}$ , definiamo traccia di  $\tilde{t}$  e la denotiamo con  $tr\tilde{t}$ , la somma degli elementi della diagonale principale della matrice delle componenti di  $\tilde{t}$  rispetto ad una qualsiasi base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$ , ossia il contratto di  $\tilde{t}$ .*

Inoltre, per quanto visto nel Capitolo 1,

$$[\bar{t}_{hk}] = \mathbb{A}^t [t_{ij}] \mathbb{A} \quad (2.3.1)$$

con  $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$ .

Se allora consideriamo il determinante delle matrici a primo e secondo membro della (7.3.2), otteniamo:

$$\det[\bar{t}_{hk}] = \det \mathbb{A}^t \det[t_{ij}] \det \mathbb{A} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \det[t_{ij}] \det \mathbb{A} = \det[t_{ij}].$$

Sussiste allora la

**Proposizione 2.5.** *Il determinante della matrice delle componenti di un tensore doppio non varia al variare della base ortonormale.*

Per tale motivo possiamo dare la seguente

**Definizione 2.4.** *Definiamo determinante del tensore doppio  $\tilde{t}$  e lo denotiamo con  $\det \tilde{t}$  il determinante della matrice delle componenti del tensore rispetto ad una qualsiasi base ortonormale.*

Introduciamo nell'insieme dei tensori doppi una legge di composizione interna.

**Definizione 2.5.** *Dati i due tensori doppi  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , definiamo prodotto di  $\tilde{A}$  per  $\tilde{B}$  il tensore doppio, denotato con  $\tilde{A}\tilde{B}$ , che si ottiene componendo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  con la contrazione del secondo indice di  $\tilde{A}$  e del primo indice di  $\tilde{B}$ .*

Se per semplicità poniamo  $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$ , avremo che le componenti di  $\tilde{C}$  in una base  $(\vec{e}_i)$  sono date da

$$C_{ij} = A_{ir} B_{rj}.$$

**Osservazione 2.4** Notiamo che :

$$[C_{ij}] = [A_{ij}] [B_{ij}],$$

ossia la matrice delle componenti di  $\tilde{A}\tilde{B}$  è data dal prodotto della matrice delle componenti di  $\tilde{A}$  per la matrice delle componenti di  $\tilde{B}$  rispetto alla stessa base. Quindi il prodotto di due tensori doppi è ricondotto al prodotto delle matrici delle loro componenti e pertanto gode delle stesse proprietà del prodotto di due matrici quadrate.

Grazie a questa osservazione, è facile verificare che la moltiplicazione di due tensori doppi è una legge di composizione interna che gode delle proprietà seguenti:

1) è associativa, ossia

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \quad (\tilde{A}\tilde{B})\tilde{C} = \tilde{A}(\tilde{B}\tilde{C});$$

2) non è commutativa, ossia

$$\exists \tilde{A}, \tilde{B} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \text{ tali che } \tilde{A}\tilde{B} \neq \tilde{B}\tilde{A};$$

3) possiede elemento neutro e questo è rappresentato dal tensore fondamentale  $\tilde{a}$ , poiché

$$\forall \tilde{A} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \quad \tilde{A}\tilde{a} = \tilde{a}\tilde{A} = \tilde{A}.$$

**Definizione 2.6.** *Dato un tensore doppio  $\tilde{A}$ , diciamo che è invertibile se esiste un tensore doppio  $\tilde{A}^{-1}$ , detto inverso di  $\tilde{A}$ , tale che:*

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{a}.$$

Si osservi che, essendo la legge di composizione interna associativa, se un tensore  $\tilde{A}$  ammette inverso, questo è unico.

Si potrebbe dimostrare il seguente

**Teorema 2.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un tensore doppio  $\tilde{A}$  sia invertibile è che  $\det \tilde{A} \neq 0$ . Inoltre se  $\tilde{A}$  è invertibile, in ogni base ortonormale si ha:*

$$[A_{ij}^{-1}] = [A_{ij}]^{-1}.$$

Per quanto riguarda l'inverso di un tensore doppio, sussistono le seguenti proprietà:

i)  $\forall \tilde{A} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$  invertibile  $(\tilde{A}^{-1})^{-1} = \tilde{A};$

ii)  $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$  invertibili  $\tilde{A}\tilde{B}$  è invertibile e  $(\tilde{A}\tilde{B})^{-1} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}^{-1}.$

**Definizione 2.7.** Dato il tensore doppio  $\tilde{A}$ , definiamo trasposto di  $\tilde{A}$  quel tensore doppio, che denotiamo con  $\tilde{A}^t$ , le cui componenti  $A_{ij}^t$  in una base ortonormale sono correlate a quelle di  $\tilde{A}$  nel modo seguente:

$$A_{ij}^t = A_{ji}.$$

E' immediato verificare che tale definizione è indipendente dalla base ortonormale utilizzata.

**Osservazione 2.5** Fissata una qualsiasi base ortonormale, la matrice delle componenti di  $\tilde{A}^t$  è la trasposta della matrice delle componenti di  $\tilde{A}$ :

$$[A_{ij}^t] = [A_{ij}]^t.$$

E' facile provare che per il trasposto di un tensore doppio sussistono le seguenti proprietà:

- 1)  $\forall \tilde{A} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \quad (\tilde{A}^t)^t = \tilde{A};$
- 2)  $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \quad (\tilde{A}\tilde{B})^t = \tilde{B}^t \tilde{A}^t;$
- 3)  $\forall \tilde{A} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$  invertibile  $\tilde{A}^t$  è invertibile e  $(\tilde{A}^t)^{-1} = (\tilde{A}^{-1})^t;$
- 4)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} \quad (\lambda \tilde{A} + \mu \tilde{B})^t = \lambda \tilde{A}^t + \mu \tilde{B}^t.$

**Definizione 2.8.** Diciamo che il tensore doppio  $\tilde{S}$  è simmetrico se  $\tilde{S} = \tilde{S}^t$ .

E' immediato provare che  $\tilde{S}$  è simmetrico se e solo se, fissata una base ortonormale,  $S_{ij} = S_{ji}$ .

**Osservazione 2.6** In genere, fissata una base ortonormale, un tensore doppio possiede 9 componenti indipendenti. Se il tensore è simmetrico, le sue componenti indipendenti si riducono a 6:  $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}$ .

Si potrebbe provare il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

**Teorema 2.2.** Dato un tensore doppio simmetrico, è sempre possibile trovare una base ortonormale rispetto alla quale la matrice delle componenti è diagonale.

Un esempio di tensore doppio simmetrico è costituito dal tensore fondamentale  $\tilde{a}$ .

**Definizione 2.9.** Diciamo che un tensore doppio  $\tilde{E}$  è emisimmetrico (o antisimmetrico) se  $\tilde{E} = -\tilde{E}^t$ .



E' immediato provare che  $\tilde{E}$  è emsimmetrico se e solo se, fissata una base ortonormale,  $E_{ij} = -E_{ji}$ .

**Osservazione 2.7** Fissata una base ortonormale, un tensore emisimmetrico ha nulle le tre componenti con i due indici uguali, cioè  $E_{11} = E_{22} = E_{33} = 0$  e dunque le sue componenti indipendenti si riducono a 3.

**Proposizione 2.6.** *Un tensore doppio  $\tilde{t}$  è esprimibile in uno ed un solo modo come somma di un tensore doppio simmetrico ed uno emisimmetrico, cioè*

$$\tilde{t} = \tilde{S} + \tilde{E},$$

dove  $\tilde{S}$  è detto parte simmetrica di  $\tilde{t}$  ed  $\tilde{E}$  è detto parte emisimmetrica di  $\tilde{t}$ .

Dimostrazione

Considerato il tensore doppio  $\tilde{t}$ , possiamo sempre scrivere:

$$\tilde{t} = \frac{1}{2}(\tilde{t} + \tilde{t}^t) + \frac{1}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^t).$$

Ma, come si vede facilmente, il tensore  $\frac{1}{2}(\tilde{t} + \tilde{t}^t)$  è simmetrico, mentre  $\frac{1}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^t)$  è emisimmetrico.

Dunque

$$\tilde{t} = \tilde{S} + \tilde{E},$$

con  $\tilde{S} = \frac{1}{2}(\tilde{t} + \tilde{t}^t)$  e  $\tilde{E} = \frac{1}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^t)$ .

E' poi immediato provare l'unicità della decomposizione.

Le nozioni di simmetria ed emisimmetria date per i tensori doppi si possono estendere anche a tensori di ordine  $r > 2$ , rifacendoci direttamente agli indici delle loro componenti.

**Definizione 2.10.** *Dato un tensore di ordine  $r > 2$ , si parla di simmetria (o emisimmetria) parziale se sussiste solo per qualche coppia di indici. Si parla di simmetria (o emisimmetria) totale se sussiste per tutte le coppie di indici.*

E' facile provare la seguente:

**Proposizione 2.7.** *Non esiste nessun tensore totalmente emisimmetrico di ordine  $r > 3$  eccetto il tensore nullo.*

Dimostrazione

In primo luogo rileviamo che l'emisimmetria di un tensore rispetto ad una coppia di indici comporta l'annullarsi di quelle componenti del tensore nelle quali i due

indici sono uguali. D'altra parte, ogni indice può assumere solo tre valori e quindi per un tensore di ordine  $r > 3$ , le cui componenti sono individuate mediante  $r$  indici, ogni componente avrà almeno due indici uguali. Se il tensore è totalmente emisimmetrico, è emisimmetrico rispetto ad ogni coppia di indici ed avrà perciò nulle tutte le componenti.

**Esempio 2.7.** Un esempio di tensore totalmente emisimmetrico di ordine 3 è il tensore di Ricci  $\tilde{\vartheta}$ .

Infatti le sue componenti sono date da

$$\vartheta_{ijr} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r.$$

Scambiando due indici nelle componenti, si scambiano due vettori nel prodotto misto per cui le componenti cambiano solamente di segno e dunque  $\tilde{\vartheta}$  è un tensore totalmente emisimmetrico.

Osserviamo poi che

$$\vartheta_{ijr} = \epsilon_{ijr} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \epsilon_{ijr} \vartheta_{123}.$$

Dunque il tensore di Ricci ha una sola componente indipendente,  $\vartheta_{123}$ , poiché tutte le altre componenti si ottengono a partire da  $\vartheta_{123}$ . Tale proprietà è comune a tutti i tensori di ordine 3 totalmente emisimmetrici.

Dimostriamo ora il seguente

**Teorema 2.3.** *Ogni volta che si contraggono due indici di simmetria con due di emisimmetria si ottiene il tensore nullo.*

Dimostrazione

Dimostriamo il teorema nel caso più semplice: siano  $\tilde{S}$  e  $\tilde{E}$  due tensori doppi, il primo simmetrico e il secondo emisimmetrico e consideriamo lo scalare che si ottiene contraendo i due indici di  $\tilde{S}$ , che sono ovviamente indici di simmetria, con i due indici di  $\tilde{E}$ , che sono ovviamente di emisimmetria. Sfruttando la simmetria e l'emisimmetria dei due tensori, otteniamo:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{E} = S_{ij} E_{ij} = -S_{ji} E_{ji} = -S_{ij} E_{ij} = -\tilde{S} \cdot \tilde{E}.$$

Nel passare dal secondo al terzo membro delle uguaglianze scritte sopra abbiamo sfruttato la simmetria di  $\tilde{S}$  ( $S_{ij} = S_{ji}$ ) e l'emisimmetria di  $\tilde{E}$  ( $E_{ij} = -E_{ji}$ ), mentre nel passaggio successivo abbiamo semplicemente scambiato di nome i due indici saturati  $i$  e  $j$ . Poiché lo scalare  $\tilde{S} \cdot \tilde{E}$  coincide con il suo opposto, si ha necessariamente:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{E} = 0.$$

**Definizione 2.11.** Diciamo che un tensore è isotropo se le sue componenti non mutano quando si passa da una base ortonormale ad un'altra pure ortonormale.

Un esempio di tensore isotropo è il tensore fondamentale  $\tilde{a}$  poiché le sue componenti in ogni base ortonormale coincidono con i simboli di Kronecker.

Si potrebbero dimostrare le seguenti proposizioni:

**Proposizione 2.8.** Se si riguarda  $\vec{\mathcal{E}}$  non orientato, non esistono tensori isotropi di ordine dispari (eccetto il tensore nullo).

**Proposizione 2.9.** L'insieme dei tensori isotropi di ordine 2 è un sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori doppi, ha dimensione 1 ed una sua base è il tensore fondamentale  $\tilde{a}$ .

Dall'ultima proposizione discende che ogni tensore doppio isotropo è della forma:

$$\tilde{t} = \alpha \tilde{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dimostriamo ora il seguente

**Teorema 2.4.** Lo spazio vettoriale reale  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  ( $r > 1$ ) è euclideo.

Dimostrazione

Consideriamo l'applicazione

$$\left( \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \right) \times \left( \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \longmapsto \tilde{A} \cdot \tilde{B} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r}.$$

E' facile provare che gode delle proprietà della moltiplicazione scalare:

- è bilineare, ossia  
 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}$  tensori di ordine  $r$

$$\left( \lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2 \right) \cdot \tilde{B} = \lambda_1 \left( \tilde{A}_1 \cdot \tilde{B} \right) + \lambda_2 \left( \tilde{A}_2 \cdot \tilde{B} \right),$$

(linearità rispetto al primo vettore),

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \tilde{A}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$  tensori di ordine  $r$

$$\tilde{A} \cdot \left( \lambda_1 \tilde{B}_1 + \lambda_2 \tilde{B}_2 \right) = \lambda_1 \left( \tilde{A} \cdot \tilde{B}_1 \right) + \lambda_2 \left( \tilde{A} \cdot \tilde{B}_2 \right)$$

(linearità rispetto al secondo vettore);

- è commutativa, ossia

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \text{ tensori di ordine } r \quad \tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A};$$

- $\forall \tilde{A}$  tensore di ordine  $r$   $\tilde{A} \cdot \tilde{A} \geq 0$  e  $\tilde{A} \cdot \tilde{A} = 0 \iff \tilde{A} = \tilde{0}$ .

La verifica delle prime due proprietà è immediata; proviamo la terza.

Fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , si ha

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} A_{i_1 \dots i_r},$$

ossia  $\tilde{A} \cdot \tilde{A}$  risulta la somma dei quadrati delle componenti di  $\tilde{A}$ .

Perciò:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A} \geq 0$$

e

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A} = 0 \iff A_{i_1 \dots i_r} = 0 \text{ per } i_1, \dots, i_r = 1, \dots, 3 \iff \tilde{A} = \tilde{0}.$$

In tal modo abbiamo definito in  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  ( $r > 1$ ) un prodotto scalare che gli fa assumere struttura di spazio vettoriale reale euclideo, così come lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Possiamo poi dimostrare il seguente

**Teorema 2.5.** *Lo spazio vettoriale  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  ( $r > 1$ ) è normato.*

Dimostrazione

Il teorema è conseguenza immediata del fatto che  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  è uno spazio vettoriale euclideo. Infatti, se consideriamo l'applicazione seguente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \tilde{A} &\longmapsto \sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{A}}, \end{aligned}$$

è facile provare che è una norma.

Posto  $\sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{A}} =: |\tilde{A}|$ , si ha:

$$1) \quad |\tilde{A}| = 0 \iff \tilde{A} = \tilde{0}$$

$$2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \tilde{A} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \quad |\lambda \tilde{A}| = |\lambda| |\tilde{A}|$$

$$3) \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \quad |\tilde{A} + \tilde{B}| \leq |\tilde{A}| + |\tilde{B}|.$$

La proprietà 3) è conseguenza della disuguaglianza di Schwarz, che sussiste in ogni spazio vettoriale reale euclideo:

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \quad |\tilde{A} \cdot \tilde{B}| \leq |\tilde{A}| |\tilde{B}|.$$

Concludiamo il paragrafo mettendo in rilievo la relazione che sussiste tra tensori e applicazioni lineari definite sull'insieme dei tensori di ordine  $r$  e a valori nell'insieme dei tensori di ordine  $s$ .

A tal fine introduciamo il seguente insieme:

$$\mathcal{L}_{(r,s)} = \left\{ \tau : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \mid \tau \text{ lineare} \right\}$$

con  $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Sia poi  $\tilde{B}$  un tensore di ordine  $r + s$  e consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tau : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \\ \tilde{A} &\longmapsto \tau(\tilde{A}) = \tilde{B} \cdot \tilde{A}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che con  $\tilde{B} \cdot \tilde{A}$  denotiamo il tensore di ordine  $s$  che si ottiene componendo  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  con la contrazione degli ultimi  $r$  indici di  $\tilde{B}$  con gli indici di  $\tilde{A}$ .

E' facile verificare che l'applicazione  $\tau$  è lineare e dunque  $\tau \in \mathcal{L}_{r,s}$ .

Infatti:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

$$\tau(\lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2) = \tilde{B} \cdot (\lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2) = \lambda_1 \tilde{B} \cdot \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{B} \cdot \tilde{A}_2 = \lambda_1 \tau(\tilde{A}_1) + \lambda_2 \tau(\tilde{A}_2).$$

Si potrebbe provare il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

**Teorema 2.6.** *L'applicazione così definita*

$$\begin{aligned} \gamma : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r+s \text{ volte}} &\longrightarrow \mathcal{L}_{(r+s)} \\ \tilde{B} &\longmapsto \tau(\tilde{A}) \end{aligned}$$

con  $\tau$  tale che

$$\forall \tilde{A} \in \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \quad \tau(\tilde{A}) = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$$

è biettiva.

Vediamo due esempi di applicazione di tale teorema.

**Esempio 2.8.** Sia  $\tau$  un'applicazione lineare definita su  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  a valori in  $\mathbb{R}$ , ossia una forma lineare su  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ . Dunque

$$\tau: \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \text{ lineare.}$$

Se teniamo presente che  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  è l'insieme dei tensori di ordine 1 e  $\mathbb{R}$  l'insieme dei tensori di ordine 0, deduciamo che  $\tau \in \mathcal{L}_{(1,0)}$ .

Grazie al teorema 2.6 possiamo asserire che esiste un vettore  $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$  tale che:

$$\tau(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}.$$

**Esempio 2.9.** Sia  $\tau$  un endomorfismo di  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ , ossia

$$\tau: \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}, \quad \tau \text{ lineare.}$$

Perciò  $\tau \in \mathcal{L}_{(1,1)}$ .

In base al teorema 2.6 concludiamo che esiste un tensore doppio  $\tilde{t}$  tale che:

$$\tau(\vec{v}) = \tilde{t} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}.$$

In componenti, fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e posto  $\vec{w} := \tau(\vec{v})$ , la relazione precedente assume la forma

$$w_i = t_{ij} v_j.$$

# Capitolo 3

## Analisi tensoriale

### 3.1 Applicazioni tensoriali definite su sottoinsiemi di uno spazio metrico

Sia  $X$  uno spazio metrico, del quale per il momento non precisiamo la natura. Per completezza richiamiamo la definizione di spazio metrico.

**Definizione 3.1.** *Definiamo spazio metrico ogni coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme diverso dall'insieme vuoto e  $d$  è un'applicazione che va da  $X \times X$  a  $\mathbb{R}^+$  con le seguenti proprietà:*

- 1)  $d(x, x_0) = 0 \iff x = x_0$ ;
- 2)  $\forall x, x_0 \in X \quad d(x, x_0) = d(x_0, x)$ ;
- 3)  $\forall x, x_0, x_1 \in X \quad d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0)$  (disuguaglianza triangolare).

L'applicazione  $d$  è detta *metrica* e  $d(x, x_0)$  *distanza* tra  $x$  e  $x_0$ .

Nel seguito denoteremo uno spazio metrico semplicemente con  $X$ .

**Definizione 3.2.** *Considerati  $\delta > 0$  e  $x_0 \in X$ , chiamiamo palla o bolla di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$  o  $\delta$ -intorno di  $x_0$  l'insieme  $S_\delta(x_0)$  così definito:*

$$S_\delta(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \delta\}.$$

**Definizione 3.3.** *Dato il sottoinsieme  $S$  dello spazio metrico  $X$ , chiamiamo applicazione tensoriale di ordine  $r$  definita in  $S$  ogni applicazione:*

$$\begin{aligned} \tilde{t}: S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ x &\longmapsto \tilde{t}(x). \end{aligned}$$

Poiché, come sappiamo,  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  è uno spazio vettoriale normato, le applicazioni tensoriali da noi considerate assumono i loro valori in uno spazio normato e sono definite in un sottoinsieme di uno spazio metrico. E' allora immediato dare la definizione di limite di un'applicazione tensoriale.

**Definizione 3.4.** *Data l'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$ , definita in  $S \in X$ , diciamo che  $\tilde{t}$  ha come limite il tensore di ordine  $r$   $\tilde{l}$  per  $x$  tendente a  $x_0$ , punto di accumulazione per  $S$ , e scriviamo :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l}$  se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in S_\delta(x_0) \cap S, x \neq x_0 \text{ si ha } |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| < \epsilon.$$

La definizione data è l'usuale definizione di limite per un'applicazione definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico e a valori in uno spazio vettoriale normato.

Ci proponiamo ora di mostrare che, per definizione stessa di tensore, è possibile ricondurre la nozione di limite di un'applicazione tensoriale a quello di limite delle sue componenti rispetto ad una base fissa (ossia indipendente da  $x$ ) e quindi a quella di limite di un'applicazione a valori reali definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico.

Facciamo una premessa: sia data un'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$ , definita in  $S \subset X$  e fissiamo in  $\vec{\mathcal{E}}$  la base  $(\vec{e}_i)$  indipendente da  $x$ , che chiameremo base fissa. Preso un elemento arbitrario  $x \in S$ , possiamo considerare la successione delle componenti di  $\tilde{t}(x)$ , cioè  $(t_{i_1 \dots i_r}(x))$ ; dunque all'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$  definita in  $S$  sono associate  $3^r$  applicazioni reali definite in  $S$ , cioè le applicazioni  $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$  con  $i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3$ .

**Teorema 3.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  abbia limite  $\tilde{l}$  per  $x \rightarrow x_0$  è che, considerata la base ortonormale fissa  $(\vec{e}_i)$ , le sue componenti rispetto alla base tendano per  $x \rightarrow x_0$  alle componenti corrispondenti di  $\tilde{l}$ , cioè:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} t_{i_1 \dots i_r}(x) = l_{i_1 \dots i_r} \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3.$$

#### Dimostrazione

Condizione necessaria.

Per ipotesi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l}.$$

Vogliamo dimostrare che, fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  indipendente da  $x$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} t_{i_1 \dots i_r}(x) = l_{i_1 \dots i_r} \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3.$$



Cominciamo ad osservare che, per definizione di norma di un tensore:

$$|\tilde{t}(x) - \tilde{l}| = \sqrt{[t_{j_1 \dots j_r}(x) - l_{j_1 \dots j_r}][t_{j_1 \dots j_r}(x) - l_{j_1 \dots j_r}]} \quad (3.1.1)$$

Poiché nella (3.1.1) sotto radice abbiamo una somma di quadrati, deduciamo:

$$|t_{i_1 \dots i_r}(x) - l_{i_1 \dots i_r}| \leq |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3. \quad (3.1.2)$$

D'altra parte, per l'ipotesi e per la definizione di limite,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| = 0$$

e quindi dalla (3.1.2) discende che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} t_{i_1 \dots i_r}(x) = l_{i_1 \dots i_r} \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3.$$

Condizione sufficiente.

Per ipotesi, fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  indipendente da  $x$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} t_{i_1 \dots i_r}(x) = l_{i_1 \dots i_r} \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l} \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| = 0.$$

D'altra parte,

$$|\tilde{t}(x) - \tilde{l}| = \sqrt{[t_{i_1 \dots i_r}(x) - l_{i_1 \dots i_r}][t_{i_1 \dots i_r}(x) - l_{i_1 \dots i_r}]}.$$

Ogni termine nelle parentesi quadre tende a zero per  $x \rightarrow x_0$  e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| = 0.$$

**Definizione 3.5.** *Data l'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ , definita in  $S$ , sia  $x_0$  un elemento di  $S$ . Distinguiamo due casi:*

- 1) se  $x_0$  è un punto isolato, allora  $\tilde{t}$  è continua in  $x_0$ ;
- 2) se  $x_0$  è un punto di accumulazione, allora diremo che  $\tilde{t}$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{t}(x_0).$$

**Definizione 3.6.** *Diciamo che l'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S$  è continua in  $S$  se lo è in ogni suo punto. In tal caso scriviamo  $\tilde{t} \in \mathcal{C}(S)$ .*

Dal teorema 3.1 discende immediatamente il seguente

**Teorema 3.2.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S$  sia continua in  $x_0 \in S$  (o in  $S$ ) è che lo siano le sue componenti rispetto ad una base fissa.*

## 3.2 Funzioni tensoriali di una o più variabili reali

In questo paragrafo assumiamo che lo spazio metrico  $X$  coincida con  $\mathbb{R}$  o con  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ).

Ovviamente:

se  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $x$  è un numero reale;

se  $x \in \mathbb{R}^n$ , allora  $x$  è una  $n$ -upla ordinata di numeri reali  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Inoltre

$x, x_0 \in \mathbb{R} \implies d(x, x_0) = |x - x_0| = \text{valore assoluto};$

$x, x_0 \in \mathbb{R}^n \implies d(x, x_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^2} = |x - x_0| = \text{norma euclidea}.$

**Definizione 3.7.** Sia  $S \subset \mathbb{R}$  o  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Ogni applicazione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$  definita in  $S$  è detta *funzione tensoriale di ordine  $r$  di una o più variabili reali*.

Data la funzione tensoriale di ordine  $r$  di una o più variabili reali  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S$ , la definizione di limite così come quella di continuità sono le stesse che abbiamo dato nel caso generale nel paragrafo 3.1

Introduciamo ora una nuova definizione per una funzione tensoriale di una sola variabile reale.

**Definizione 3.8.** Data la funzione tensoriale di ordine  $r$   $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S \subset \mathbb{R}$ , sia  $x_0$  un punto interno di  $S$ . Diremo che la funzione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  è *derivabile in  $x_0$*  se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{t}(x) - \tilde{t}(x_0)}{x - x_0}$$

ed è finito in norma. Tale limite lo chiamiamo *derivata della funzione tensoriale  $\tilde{t}$  in  $x_0$*  e lo denotiamo con  $\frac{d\tilde{t}}{dx}(x_0)$ .

**Osservazione 3.1.** Se la funzione tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  è derivabile in  $x_0$ , la sua derivata  $\frac{d\tilde{t}}{dx}(x_0)$  è un tensore di ordine  $r$ .

Tenendo presente il teorema 3.1, si deduce immediatamente il

**Teorema 3.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione tensoriale  $\tilde{t}$  sia derivabile in  $x_0$  è che le sue componenti rispetto ad una base fissa siano tutte derivabili in  $x_0$ . Inoltre le componenti del tensore  $\frac{d\tilde{t}}{dx}(x_0)$  sono le derivate in  $x_0$  delle componenti corrispondenti di  $\tilde{t}$ .*

Se  $S$  è un aperto di  $\mathbb{R}$  e  $\tilde{t}$  è derivabile in ogni punto di  $S$ , allora in  $S$  risulta definita una nuova funzione tensoriale di ordine  $r$ , la funzione derivata di  $\tilde{t}$ :

$$\frac{d\tilde{t}}{dx} = \frac{d\tilde{t}}{dx}(x).$$

Se a sua volta questa è derivabile in  $x_0 \in S$ , diremo che  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  ammette derivata seconda o di ordine 2 in  $x_0$ . La derivata seconda in  $x_0$  verrà denotata

$$\text{con } \frac{d^2\tilde{t}}{dx^2}(x_0).$$

In maniera analoga si definiscono le derivate di ordine 3, 4, .. etc.

**Osservazione 3.2.** Tutte le derivate successive di una funzione tensoriale di ordine  $r$  sono tensori di ordine  $r$ .

Consideriamo ora una funzione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$  definita in  $S \subset \mathbb{R}^n$  con ( $n > 1$ ).

**Definizione 3.9.** Data la funzione tensoriale di ordine  $r$   $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S \subset \mathbb{R}^n$ , sia  $x_0$  un punto interno di  $S$  e  $v$  un versore di  $\mathbb{R}^n$ , ossia una direzione (orientata). Diremo che  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  è derivabile in  $x_0$  rispetto alla direzione  $v$  se esiste ed è finito in norma il seguente limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{t}(x_0 + hv) - \tilde{t}(x_0)}{h}.$$

Tale limite viene chiamato derivata di  $\tilde{t}$  in  $x_0$  rispetto alla direzione  $v$  e denotato

$$\text{con } \frac{\partial \tilde{t}}{\partial v}(x_0).$$

Se in particolare  $v$  coincide con l' $i$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $v = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , allora la derivata di  $\tilde{t}$  in  $x_0$  rispetto ad  $e_i$  prende il nome di derivata parziale di  $\tilde{t}$  in  $x_0$  fatta rispetto a  $x_i$  ed è indicata con  $\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0)$ .

**Osservazione 3.3.** Le derivate parziali di una funzione tensoriale di ordine  $r$  sono tensori di ordine  $r$ .

Possiamo ovviamente definire le derivate parziali di ordine 2, 3, ..., etc., ma su ciò non insistiamo.

**Osservazione 3.4.** Per la teoria della derivazione delle funzioni tensoriali di una o più variabili reali valgono tutte le proprietà delle derivazione delle funzioni reali, poiché, grazie al teorema 3.1, ci si riconduce alla derivazione delle componenti rispetto ad una base fissa, che sono funzioni a valori reali.

**Definizione 3.10.** Data la funzione tensoriale di ordine  $r$   $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  definita in  $S \subset \mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ), sia  $x_0$  un punto interno per  $S$ . Diciamo che  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  è

differenziabile in  $x_0$  se esiste un'applicazione lineare dipendente da  $x_0$

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{t}(x) - \tilde{t}(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)}{|x - x_0|} = \tilde{0},$$

con  $\tilde{0}$  tensore nullo di ordine  $r$ .

L'applicazione lineare  $L_{x_0}$  è detta differenziale di  $\tilde{t}$  in  $x_0$ .

Si potrebbe dimostrare il seguente

**Teorema 3.4.** *Se  $\tilde{t}$  è differenziabile in  $x_0$ , in tale punto è anche continua.*

Poiché la definizione di differenziabilità fa intervenire la nozione di limite, è evidente che sussiste il seguente

**Teorema 3.5.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\tilde{t}$  sia differenziabile in  $x_0$  è che lo siano tutte le sue componenti rispetto ad una base fissa.*

Quindi alla differenziabilità delle funzioni tensoriali di più variabili reali possiamo estendere tutti i risultati validi per la differenziabilità delle funzioni reali di più variabili reali. In particolare sussistono i due seguenti teoremi:

**Teorema 3.6.** *Se  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  è differenziabile in  $x_0$ , allora in  $x_0$  ammette le derivate parziali prime e si ha:*

$$L_{x_0}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ .

**Teorema 3.7.** *Teorema del differenziale totale. Se  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  in un intorno di  $x_0$  (punto interno dell'insieme  $S$  in cui è definita  $\tilde{t}$ ) ammette derivate parziali prime e queste sono continue in  $x_0$ , allora  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  è differenziabile in  $x_0$ .*

**Osservazione 3.5.** Per motivi storici si usa spesso la seguente notazione per il differenziale:

$$L_{x_0} =: d\tilde{t}(x_0).$$

Con la nuova notazione la tesi del teorema 3.6 si scrive nel modo seguente:

$$d\tilde{t}(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.1)$$

D'altra parte, se ricordiamo che si indica con  $dx_i$  l'applicazione così definita:

$$\begin{aligned} dx_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_i, \end{aligned}$$

allora si può scrivere:

$$d\tilde{t}(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) dx_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Per tale motivo si usa la seguente notazione:

$$d\tilde{t}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) dx_i.$$

**Osservazione 3.6.** Nel caso di una funzione tensoriale di una sola variabile reale la nozione di differenziabilità coincide con quella di derivabilità.

**Definizione 3.11.** Data una funzione tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  definita nell'aperto  $S \subset \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{R}^n$ , diciamo che  $\tilde{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^p(S)$  con  $p \in \mathbb{N}$  se è continua in  $S$  insieme a tutte le sue derivate sino all'ordine  $p$ . Scriveremo allora  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$ . Se  $\tilde{t}$  è solo continua in  $S$ , scriveremo:  $\tilde{t} \in \mathcal{C}(S)$ .

A questo punto diamo anche la nozione di integrabilità secondo Riemann o secondo Lebesgue di una funzione tensoriale di una o più variabili reali.

Sia  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  una funzione tensoriale di ordine  $r$  definita in  $S \subset \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{R}^n$  con  $S$  misurabile secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue. Fissata una base  $(\vec{e}_i)$  ortonormale e fissa, consideriamo le componenti di  $\tilde{t}$  rispetto a tale base:  $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$ . Supponiamo che tali componenti siano tutte integrabili su  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue. Denotiamo l'integrale su  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue di  $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$  con

$$\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx$$

dove se  $S \subset \mathbb{R}^n$  l'integrale è multiplo e  $dx = dx_1 \dots dx_n$ .

Si può dimostrare facilmente che la successione  $r$ -upla di scalari  $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$  muta con legge tensoriale quando si passa da una base ortonormale fissa ad un'altra pure ortonormale e fissa. Resta così individuato un tensore di ordine  $r$  che ha come successione delle componenti rispetto alla base considerata la successione  $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$ .

Possiamo allora fornire la seguente definizione:

**Definizione 3.12.** *Data la funzione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  di ordine  $r$  definita in  $S \subset \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^n$  con  $S$  misurabile secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue e fissata una base  $(\vec{e}_i)$  ortonormale e fissa, tutte le componenti di  $\tilde{t}$  rispetto a tale base:  $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$  siano integrabili su  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue. Allora diciamo che  $\tilde{t}$  è integrabile su  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue e il tensore di ordine  $r$  individuato dalla successione  $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$  è detto integrale su  $S$  di Riemann o di Lebesgue dell'applicazione  $t$ .*

Perciò l'integrazione di una funzione tensoriale è ricondotta all'integrazione delle sue componenti rispetto ad una base fissa. Ne segue che per l'integrazione delle funzioni tensoriali valgono tutti i teoremi dell'integrazione delle funzioni reali di una o più variabili reali, eccetto il teorema del valor medio. Infatti tale teorema vale per l'integrale di ogni componente, ma non per l'integrale della funzione tensoriale nel suo complesso, come si evince facilmente tenendo presente che in tale teorema interviene per ogni componente un punto opportuno che varia da componente a componente.

### 3.3 Campi tensoriali

Consideriamo ora il caso particolare in cui  $X = \mathcal{E}$ .

Com'è noto, lo spazio geometrico  $\mathcal{E}$  è uno spazio metrico e dati i punti  $P, P_0 \in \mathcal{E}$  si ha:

$$d(P, P_0) = |P - P_0|.$$

Fissato nello spazio geometrico il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) =: x. \end{aligned}$$

Come è facile verificare, l'applicazione  $\xi$  è un omeomorfismo (cioè è continua insieme alla sua inversa).

Inoltre, se  $x$  è la successione delle coordinate di  $P$  e  $x_0$  è la successione delle coordinate di  $P_0$ , allora

$$d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{0i})^2} = d(x, x_0).$$

Dunque l'applicazione  $\xi$  conserva le distanze, cioè è un'isometria; di conseguenza lo spazio geometrico  $\mathcal{E}$  ha le stesse proprietà metriche di  $\mathbb{R}^3$ .

In questo paragrafo supporremo sempre di considerare sottoinsiemi  $S$  dello spazio geometrico.

**Definizione 3.13.** Chiamiamo campo tensoriale di ordine  $r$  definito in  $S$  ogni applicazione della forma:

$$\begin{aligned} \tilde{t} : S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ P &\longmapsto \tilde{t}(P). \end{aligned}$$

Se  $r = 0$ ,  $\tilde{t}$  è detto campo scalare, se  $r = 1$ ,  $\tilde{t}$  è detto campo vettoriale, se  $r \geq 2$   $\tilde{t}$  è detto campo tensoriale di ordine  $r$ .

Nel seguito indicheremo spesso un generico campo tensoriale con la notazione (imprecisa):

$$\tilde{t} = \tilde{t}(P).$$

Siano allora dati un campo tensoriale di ordine  $r$  definito in  $S \in \mathcal{E}$  e un riferimento cartesiano spaziale  $[O, (\vec{e}_i)]$ .

Osserviamo che l'isometria  $\xi$ , introdotta in precedenza, essendo un omeomorfismo, è invertibile e dunque:

$$\xi(P) = x \iff P = \xi^{-1}(x).$$

Poniamo poi  $S_\xi := \xi(S) \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definizione 3.14.** Definiamo rappresentazione analitica del campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  nel riferimento cartesiano  $[O, (\vec{e}_i)]$  la funzione tensoriale di 3 variabili reali definita in  $S_\xi$ , che indichiamo con  $t^\circ$  tale che

$$\tilde{t}^\circ = \tilde{t} \circ \xi_{|S_\xi}^{-1}.$$

Dalla definizione data segue che:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in S_\xi \quad \tilde{t}^\circ(x) = \tilde{t}(\xi^{-1}(x)).$$

Dunque se la successione delle coordinate di  $P$  è  $(x_i)$ , allora si ha:

$$\tilde{t}^\circ(x_1, x_2, x_3) = \tilde{t}(P).$$

Abbiamo perciò mostrato che, fissato un riferimento cartesiano, ad ogni campo tensoriale è associata una funzione tensoriale di 3 variabili reali, ossia la sua rappresentazione analitica.

**Osservazione 3.7.** Ogni campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  ha un significato intrinseco, indipendente dal riferimento, mentre la sua rappresentazione analitica dipende dal riferimento utilizzato.

**Esempio 3.1.** Sia dato il seguente campo scalare  $f = f(P)$ :

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad f(P) = (P - O) \cdot \vec{e}$$

con  $O$  punto fissato di  $\mathcal{E}$  ed  $\vec{e}$  versore fissato.

Considerato in  $\mathcal{E}$  il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  tale che  $\vec{e}_1 = \vec{e}$ , la rappresentazione analitica del campo  $f$  in tale riferimento è data da:

$$f^o(x_1, x_2, x_3) = x_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Se ora consideriamo un altro riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_h)]$  tale che  $\vec{e}_2 = \vec{e}$ , la rappresentazione analitica del campo  $f$  nel nuovo riferimento è:

$$\vec{f}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2 \quad \forall (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La rappresentazione analitica del campo  $f$  è dunque diversa nei due riferimenti.

**Esempio 3.2.** Consideriamo il campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  così definito:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \vec{v}(P) = [(P - O) \cdot \vec{e}] \vec{e}$$

con  $O$  e  $\vec{e}$  come nell'esempio precedente.

Nel riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$  tale che  $\vec{e}_1 = \vec{e}$  otteniamo:

$$\vec{v}^o(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Nel riferimento  $[O, (\vec{e}_h)]$  tale che  $\vec{e}_2 = \vec{e}$  la nuova rappresentazione analitica del campo vettoriale  $\vec{v}$  è data da:

$$\vec{v}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2 \vec{e}_2 \quad \forall (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La rappresentazione analitica del campo  $\vec{v}$  è dunque diversa nei due riferimenti.

**Esempio 3.3.** Sia dato il seguente campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ :

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \tilde{t}(P) = [(P - O) \cdot \vec{e}] \vec{e} \otimes \vec{e}$$

con  $O$  e  $\vec{e}$  definiti come nell'esempio 3.1.

Nel riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$  tale che  $\vec{e}_1 = \vec{e}$  la rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  è data da:

$$\tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$



Osserviamo che alla base  $(\vec{e}_i)$  per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$  è associata la base  $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$  per  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ . Le componenti della rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  nel riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$  sono:

$$t_{11}^o(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad t_{ij}^o(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{con } (i, j) \neq (1, 1).$$

Nel riferimento  $[O, (\vec{e}_h)]$  tale che  $\vec{e}_2 = \vec{e}$  la nuova rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  è della forma:

$$\tilde{t}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \quad \forall (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Perciò le componenti della rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  nel secondo riferimento sono:

$$\bar{t}_{22}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2, \quad \bar{t}_{hk}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0 \quad \text{con } (h, k) \neq (2, 2).$$

Sia dato un campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$  definito in  $S \subset \mathcal{E}$ . La definizione di limite per  $P \rightarrow P_0$  con  $P_0$  punto di accumulazione per  $S$  rientra nella definizione generale che abbiamo dato nel paragrafo 3.1.

Fissiamo il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$  nello spazio geometrico e consideriamo la rappresentazione analitica del campo tensoriale considerato:

$$\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x) \quad \forall x \in S_\xi \subset \mathbb{R}^3.$$

E' immediato dimostrare il seguente

**Teorema 3.8.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\lim_{P \rightarrow P_0} \tilde{t} = \tilde{l}$  è che*

*$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}^o(x) = \tilde{l}$ , dove  $x = (x_1, x_2, x_3)$  è la successione delle coordinate cartesiane di  $P$  e  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la successione delle coordinate cartesiane di  $P_0$ .*

#### Dimostrazione

Facciamo un breve cenno alla dimostrazione. Questa è basata essenzialmente sul teorema relativo al limite delle applicazioni composte: infatti teniamo presente che

$$\tilde{t}^o = \tilde{t} \circ \xi^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{t} = \tilde{t}^o \circ \xi.$$

Inoltre si utilizza il fatto che, essendo  $\xi$  un omeomorfismo,  $\xi$  e  $\xi^{-1}$  sono continue. Perciò

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \xi(P) &= \xi(P_0) & \text{ossia} & \quad \lim_{P \rightarrow P_0} x = x_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \xi^{-1}(x) &= \xi^{-1}(x_0) & \text{ossia} & \quad \lim_{x \rightarrow x_0} P = P_0. \end{aligned}$$

In base al teorema 3.8 il limite di un campo tensoriale è ricondotto al limite della sua rappresentazione analitica in un riferimento cartesiano fissato. Quindi per la nozione di limite di un campo tensoriale sussistono tutti i teoremi che valgono per le funzioni reali di tre variabili reali.

La definizione di continuità in un punto o in un insieme rientra nelle definizioni generali date nel paragrafo 3.1.

E' evidente che sussiste il seguente

**Teorema 3.9.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  sia continuo in  $P_0$  è che lo sia in  $x_0$  la sua rappresentazione analitica in un dato riferimento cartesiano.*

**Osservazione 3.8.** Dunque per la continuità di un campo tensoriale in un punto o in un insieme valgono gli stessi teoremi che valgono per le funzioni reali di tre variabili reali.

### 3.4 Differenziabilità dei campi tensoriali

**Definizione 3.15.** *Dato il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$  definito in  $S \subset \mathcal{E}$ , sia  $P_0$  un punto interno di  $S$ . Diciamo che  $\tilde{t}$  è differenziabile in  $P_0$  se esiste un'applicazione lineare dipendente da  $P_0$*

$$L_{P_0} : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

tale che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\tilde{t}(P) - \tilde{t}(P_0) - L_{P_0}(P - P_0)}{|P - P_0|} = \tilde{0}.$$

L'applicazione  $L_{P_0}$  è detta differenziale del campo tensoriale  $\tilde{t}$  in  $P_0$ .

Si potrebbe provare il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

**Teorema 3.10.** *Se un campo tensoriale è differenziabile in un punto, in tale punto è anche continuo.*

Tenendo presente che la definizione di differenziabilità è data attraverso un limite e che il limite di un campo tensoriale è ricondotto a quello della sua rappresentazione analitica, ne discende immediatamente il seguente:

**Teorema 3.11.** *Fissato nello spazio geometrico un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , condizione necessaria e sufficiente affinché il campo tensoriale  $\tilde{t}$  sia differenziabile in  $P_0$  è che la sua rappresentazione analitica  $\tilde{t}^o$  sia*

differenziabile in  $x_0$  ed inoltre si ha che comunque prendiamo un vettore  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  avente  $(u_i)$  come successione delle componenti rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ , l'immagine di  $\vec{u}$  tramite  $L_{P_0}$  è uguale all'immagine tramite  $L_{x_0}$  (differenziale di  $\tilde{t}^0$  in  $x_0$ ) della terna delle componenti di  $\vec{u}$ , cioè

$$L_{P_0} = L_{x_0}(u_1, u_2, u_3).$$

**Esempio 3.4.** Consideriamo il campo vettoriale così definito:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \vec{v}(P) = P - O,$$

dove  $O$  è un punto fissato in  $\mathcal{E}$ .

E' facile verificare che  $\vec{v}$  è differenziabile in ogni punto  $P_0 \in \mathcal{E}$  e che il suo differenziale  $L_{P_0}$  è l'applicazione identica definita su  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Infatti se  $L_{P_0}$  è l'applicazione identica, abbiamo:

$$\forall P, P_0 \in \mathcal{E} \quad L(P - P_0) = P - P_0.$$

Allora

$$\begin{aligned} & \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\vec{v}(P) - \vec{v}(P_0) - L_{P_0}(P - P_0)}{|P - P_0|} = \\ & = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{(P - O) - (P_0 - O) - (P - P_0)}{|P - P_0|} = \\ & = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{(P - P_0) - (P - P_0)}{|P - P_0|} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dunque  $\vec{v}$  è differenziabile su tutto  $\mathcal{E}$  e il suo differenziale è l'identità.

Sia dato un campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$  definito in  $S \subset \mathcal{E}$  e differenziabile nel punto  $P_0$  di  $S$ . Il suo differenziale  $L_{P_0}$ , per definizione di differenziabilità di un campo tensoriale, è un'applicazione lineare che appartiene all'insieme  $\mathcal{L}_{(1,r)}$ , definito nel paragrafo 2.3. Allora, grazie al teorema 2.6, possiamo asserire che esiste un tensore di ordine  $r + 1$ ,  $\tilde{T}_{P_0}$ , dipendente da  $P_0$  come il differenziale, tale che

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad L_{P_0}(\vec{u}) = \tilde{T}_{P_0} \cdot \vec{u}.$$

Il tensore  $\tilde{T}_{P_0}$  è detto *gradiente o derivato tensoriale del campo tensoriale  $\tilde{t}$  nel punto  $P_0$*  e denotato nel modo seguente:

$$\tilde{T}_{P_0} =: \text{grad} \tilde{t}(P_0) \text{ o } \nabla \tilde{t}(P_0).$$

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , consideriamo la rappresentazione analitica del campo tensoriale  $\tilde{t}$ :

$$\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3).$$

Nell'ipotesi che  $\tilde{t}$  sia differenziabile in  $P_0$ , è definito il gradiente di  $\tilde{t}$  in  $P_0$ , ossia il tensore  $\text{grad}\tilde{t}(P_0)$  di ordine  $r + 1$ . Denotiamo le componenti di tale tensore rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  con  $t_{i_1 \dots i_r, j}$ ; i primi  $r$  indici corrispondono agli indici del tensore di partenza, mentre l'indice dopo la virgola è detto indice di derivazione. Ci proponiamo di dimostrare la seguente

**Proposizione 3.1.** *Dato il campo tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  differenziabile in  $P_0$  e fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , si ha:*

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_0),$$

dove  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la successione delle coordinate cartesiane di  $P_0$ .

#### Dimostrazione

Poiché il campo tensoriale  $\tilde{t}$  è differenziabile in  $P_0$ , la sua rappresentazione analitica  $\tilde{t}^o$  è differenziabile in  $x_0$  ed inoltre:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad L_{P_0}(\vec{u}) = L_{x_0}(u_1, u_2, u_3). \quad (3.4.1)$$

La (3.4.1), tenendo presente la definizione di gradiente e il teorema 3.6, fornisce:

$$\text{grad}\tilde{t}(P_0) \cdot \vec{u} = \frac{\partial \tilde{t}^o}{\partial x_j}(x_0) u_j, \quad (3.4.2)$$

dove al secondo membro abbiamo fatto uso della convenzione sulla somma. Uguagliando le componenti dei tensori di ordine  $r$  che compaiono a primo e secondo membro della (3.4.2), si ottiene:

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0) u_j = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_0) u_j \quad \forall (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Per l'arbitrarietà di  $(u_1, u_2, u_3)$  si deduce:

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_0),$$

che è ciò che ci proponevamo di dimostrare.

Se in particolare abbiamo un campo scalare  $f = f(P)$  differenziabile in  $P_0$ , si ha che  $\text{grad } f(P_0)$  è un vettore le cui componenti, fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , sono date da:

$$f_{,j}(P_0) = \frac{\partial f^o}{\partial x_j}(x_0).$$

Se abbiamo un campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  differenziabile in  $P_0$ , si ha che  $\text{grad } \vec{v}(P_0)$  è un tensore doppio le cui componenti, fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , sono date da:

$$v_{i,j}(P_0) = \frac{\partial v_i^o}{\partial x_j}(x_0).$$

**Osservazione 3.9** Per ragioni storiche il differenziale in  $P_0$ ,  $L_{P_0}$ , di un campo tensoriale  $\tilde{t}$  si indica usualmente con una notazione differente:

$$L_{P_0} =: d\tilde{t}(P_0). \quad (3.4.3)$$

Vediamo di introdurre un'ulteriore notazione che viene utilizzata molto spesso. Abbiamo visto che il campo vettoriale  $\vec{v} = P - O$  con  $O$  punto fissato in  $\mathcal{E}$  è differenziabile in tutto  $\mathcal{E}$  e che il suo differenziale è dato da  $I_{\vec{\mathcal{E}}}$ , identità di  $\vec{\mathcal{E}}$ . Per tale motivo si suole denotare  $I_{\vec{\mathcal{E}}}$  con  $dP$ .

Dunque

$$\begin{array}{ccc} dP: \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u}. \end{array}$$

Se si tiene presente che se  $\tilde{t}$  è differenziabile in  $P_0$  si ha:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad L_{P_0}(\vec{u}) = \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot \vec{u}$$

e si usano le notazioni prima introdotte, si arriva a scrivere:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad d\tilde{t}(P_0)(\vec{u}) = \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot dP(\vec{u}).$$

Ciò porta ad indicare con  $\text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot dP$  la seguente applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot dP: \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ \vec{u} & \longmapsto & \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot dP(\vec{u}) = \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot \vec{u}. \end{array}$$

Con quest'ultima notazione possiamo allora scrivere:

$$d\tilde{t}(P_0) = \text{grad } \tilde{t}(P_0) \cdot dP.$$

Diamo ora la definizione di gradiente secondo, gradiente terzo e così via.

Sia dato un campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$ , definito in un sottoinsieme aperto  $S$  dello spazio geometrico e differenziabile in ogni punto di  $S$ . Dunque in  $S$  risulta definito un nuovo campo tensoriale di ordine  $r + 1$ , ossia il campo del gradiente di  $\tilde{t}$ :

$$\text{grad } \tilde{t} = \text{grad } \tilde{t}(P).$$

Preso un punto  $P_0 \in S$ , può avvenire che il campo tensoriale  $\text{grad } \tilde{t}$  sia differenziabile in  $P_0$ . Allora in  $P_0$  esiste il gradiente di  $\text{grad } \tilde{t}$ , cioè  $\text{grad}(\text{grad } \tilde{t})(P_0)$ .

**Definizione 3.16.** *Il tensore di ordine  $r + 2$   $\text{grad}(\text{grad}, \tilde{t})(P_0)$  è detto gradiente secondo o derivato tensoriale di ordine 2 di  $\tilde{t}$  in  $P_0$  e viene denotato con  $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}(P_0)$  o  $\nabla^{(2)} \tilde{t}(P_0)$ .*

Come abbiamo visto, in un riferimento cartesiano oronormale le componenti del tensore di ordine  $r + 1$   $\text{grad } \tilde{t}(P_0)$  si indicano con  $t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0)$ ; per quanto riguarda le componenti del tensore  $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}(P_0)$ , che è un tensore di ordine  $r + 2$ , queste si denotano con  $t_{i_1 \dots i_r, jh}(P_0)$ .

Si può poi definire in maniera ovvia anche il gradiente di ordine  $p$  con  $p > 2$  del campo tensoriale  $\tilde{t}$  in  $P_0$ : questo è un tensore di ordine  $r + p$ , è denotato con  $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}(P_0)$  o  $\nabla^{(p)} \tilde{t}(P_0)$  e le sue componenti sono indicate con  $t_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_p}(P_0)$ .

**Definizione 3.17.** *Sia dato il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$  definito in  $S$ , sottoinsieme aperto di  $\mathcal{E}$ . Diciamo che  $\tilde{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^p$  in  $S$  con  $p \in \mathbb{N}$  e scriviamo  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$  se  $\tilde{t}$  ammette in  $S$  gradiente sino all'ordine  $p$  e tutti i suoi gradienti sono continui in  $S$ .*

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 3.2.** *Dato il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r$  definito in  $S$ , sottoinsieme aperto di  $\mathcal{E}$ , e fissato un riferimento cartesiano ortonormale,  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$  se e solo se  $\tilde{t}^o \in \mathcal{C}^p(S_{\mathcal{E}})$ .*

Come abbiamo visto, la derivazione tensoriale dei campi tensoriali si riconduce alla derivazione usuale delle loro rappresentazioni analitiche in un qualsiasi riferimento cartesiano ortonormale; dunque la derivazione tensoriale gode delle stesse proprietà della derivazione usuale.

Vediamo di elencare alcune di tali proprietà.

- Siano  $\tilde{A} = \tilde{A}(P)$  e  $\tilde{B} = \tilde{B}(P)$  due campi tensoriali di ordine  $r$  definiti in un aperto  $S$  dello spazio geometrico.

Se sono entrambi differenziabili nel punto  $P_0 \in S$ , allora  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  si ha che il campo tensoriale  $\lambda \tilde{A} + \mu \tilde{B}$  di ordine  $r$  è differenziabile in  $P_0$  ed inoltre:

$$\text{grad}(\lambda \tilde{A} + \mu \tilde{B})(P_0) = \lambda \text{grad } \tilde{A}(P_0) + \mu \text{grad } \tilde{B}(P_0).$$

L'operatore differenziale gradiente è dunque lineare.

- Siano  $\tilde{A} = \tilde{A}(P)$  e  $\tilde{B} = \tilde{B}(P)$  due campi tensoriali, di ordine  $r$  e  $s$  rispettivamente, definiti in un aperto  $S$  dello spazio geometrico.

Se sono entrambi differenziabili nel punto  $P_0 \in S$ , allora il campo tensoriale di ordine  $r + s$   $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$  è differenziabile in  $P_0$ . Fissato un riferimento cartesiano ortonormale, le componenti di  $\tilde{C}$  sono legate a quelle di  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  dalle relazioni:

$$C_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s},$$

mentre le componenti di  $\text{grad } \tilde{C}(P_0)$  sono date da:

$$C_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s, h}(P_0) = A_{i_1 \dots i_r, h}(P_0) B_{j_1 \dots j_s}(P_0) + A_{i_1 \dots i_r}(P_0) B_{j_1 \dots j_s, h}(P_0).$$

Tale risultato è conseguenza della regola di derivazione di un prodotto.

- Consideriamo ora il campo tensoriale  $\tilde{C}'$  di ordine  $r + s - 2$  ottenuto componendo i due campi tensoriali  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , di ordine  $r$  e  $s$  rispettivamente, definiti in un aperto  $S$  con la contrazione dell'ultimo indice di  $\tilde{A}$  e l'ultimo di  $\tilde{B}$ . Tale campo risulta differenziabile in  $P_0$  se lo sono  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ . Fissato un riferimento cartesiano ortonormale, le componenti di  $\tilde{C}'$  sono legate a quelle di  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  dalle relazioni:

$$C'_{i_1 \dots i_{r-1} j_1 \dots j_{s-1}} = A_{i_1 \dots i_{r-1} i} B_{j_1 \dots j_{s-1} i},$$

mentre le componenti di  $\text{grad } \tilde{C}'(P_0)$  sono date da:

$$\begin{aligned} C'_{i_1 \dots i_{r-1} j_1 \dots j_{s-1}, h}(P_0) &= A_{i_1 \dots i_{r-1} i, h}(P_0) B_{j_1 \dots j_{s-1} i}(P_0) + \\ &+ A_{i_1 \dots i_{r-1} i}(P_0) B_{j_1 \dots j_{s-1}, h}(P_0). \end{aligned}$$

Anche tale risultato, come quello precedente, è conseguenza della regola di derivazione di un prodotto.

Proviamo ora la seguente proposizione

**Proposizione 3.3.** *Se il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ , definito in un aperto  $S$ , è costante, allora è differenziabile in ogni punto di  $S$  e il suo gradiente è identicamente nullo in  $S$ . Viceversa se il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  ha il gradiente identicamente nullo in  $S$ , insieme aperto e connesso (ossia dominio) dello spazio geometrico, allora  $\tilde{t}$  è costante in  $S$ .*

#### Dimostrazione

La prima parte della proposizione è di verifica immediata.

Proviamo la seconda parte.

Il campo tensoriale  $\tilde{t}$  sia differenziabile nel dominio  $S$  con gradiente identicamente nullo. Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  e consideriamo

la rappresentazione analitica del campo  $\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x)$ , definita in  $S_\xi = \xi(S)$ . Poiché  $\xi$  è un omeomorfismo, essendo  $S$  un dominio di  $\mathcal{E}$ , anche  $S_\xi$  è un dominio di  $\mathbb{R}^3$ . D'altra parte, il fatto che il gradiente di  $\tilde{t}$  è identicamente nullo implica che sono identicamente nulle le derivate parziali di  $\tilde{t}^o$  e quindi anche le loro componenti. Per un noto teorema di analisi, se una funzione reale di più variabili reali, definita in un dominio, ha identicamente nulle tutte le derivate parziali, la funzione è costante. Ne discende che  $\tilde{t}^o$  è costante in  $S_\xi$  per cui  $\tilde{t}$  è costante in  $S$ .

**Proposizione 3.4.** *Se  $S$  è aperto e il campo tensoriale  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$  con  $p \geq 2$ , allora  $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}$  in ogni punto di  $S$  è simmetrico rispetto ad ogni coppia di indici di derivazione.*

#### Dimostrazione

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  e preso un generico punto  $P$  dell'aperto  $S$ , di coordinate cartesiane  $(x_i)$ , consideriamo le componenti di  $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}(P)$  ed esprimiamole tramite le derivate della rappresentazione analitica:

$$t_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_p}(P) = \frac{\partial^{p+r} t_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x).$$

Poiché  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$ , si ha  $\tilde{t}^o \in \mathcal{C}^p(S_\xi)$ . Per il teorema di Schwarz, a secondo membro delle relazioni scritte sopra, nelle derivate delle componenti della rappresentazione analitica è possibile invertire l'ordine di derivazione, il che equivale a scambiare due degli indici di derivazione a primo membro. Dunque in ogni punto  $P$  di  $S$   $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}(P)$  è simmetrico rispetto ad ogni coppia degli indici di derivazione.

**Esempio 3.5.** Sia  $f = f(P)$  un campo scalare definito su un aperto  $S$  e si abbia  $f \in \mathcal{C}^2(S)$ .

Allora  $f$  ammette in  $S$  gradiente di ordine 2:  $\text{grad}^{(2)} f$ . In un fissato riferimento cartesiano ortonormale le componenti di tale campo tensoriale di ordine 2 sono date da  $f_{,ij} = f_{,ji}$ .

### 3.5 Proprietà dell'operatore gradiente applicato ad un campo scalare

**Proposizione 3.5.** *Fissato un punto  $P_0$  di  $\mathcal{E}$ , sia  $S$  un aperto di  $\mathcal{E}$  che non contiene il punto  $P_0$ . Il campo scalare  $f = f(P)$  così definito:*

$$\forall P \in S \quad f(P) = |P - P_0|$$



è differenziabile in ogni punto di  $S$  e

$$\text{grad } f(P) = \text{vers}(P - P_0) \quad \forall P \in S.$$

Dimostrazione

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  ed osserviamo che  $S_\xi$  non contiene  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ , successione delle coordinate del punto  $P_0$ . Consideriamo poi la rappresentazione analitica del campo  $f$  nel riferimento fissato:

$$f^\circ(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S_\xi.$$

Poiché l'insieme di definizione  $S_\xi$  non contiene  $x_0$ , la funzione  $f^\circ$  possiede continue le derivate prime in  $S_\xi$  e quindi è differenziabile in  $S_\xi$  per il teorema del differenziale totale. Ne segue la differenziabilità di  $f$  in  $S$ .

Vediamo ora di procurarci  $\text{grad } f(P)$  in ogni punto  $P \in S$ .

Per la proposizione 3.1 si ha:

$$\forall P(x_i) \in S \quad f_{,i}(P) = \frac{\partial f^\circ}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i - x_{0i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_j - x_{0j})^2}}$$

Perciò

$$\forall P \in S \quad \text{grad } f(P) = \frac{P - P_0}{|P - P_0|} = \text{vers}(P - P_0),$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Spesso si utilizza la notazione :

$$r(P) := |P - P_0|$$

per cui possiamo scrivere:

$$\forall P \in S \quad \text{grad } f(P) = \frac{P - P_0}{r(P)}.$$

**Proposizione 3.6.** *Siano dati il campo scalare  $g = g(P)$  definito in  $S$  e la funzione reale  $h = h(\lambda)$  definita in  $g(S)$ . Se  $g$  è differenziabile in  $P_0$ , punto interno di  $S$ , e  $h$  è derivabile in  $\lambda_0 = g(P_0)$ , allora il campo scalare  $f$ , ottenuto componendo  $h$  e  $g$ , cioè tale che  $\forall P \in S \quad f(P) = h(g(P))$ , è differenziabile in  $P_0$  e si ha:*

$$\text{grad } f(P_0) = \frac{dh}{d\lambda}(g(P_0)) \text{grad } g(P_0).$$

Dimostrazione

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  e consideriamo poi la rappresentazione analitica del campo  $f$  nel riferimento fissato:

$$f^\circ(x_1, x_2, x_3) = h(g^\circ(x_1, x_2, x_3)).$$

Poiché  $g$  è differenziabile in  $P_0$ , si ha che  $g^\circ$  è differenziabile in  $x_0$ , terna delle coordinate di  $P_0$ , mentre  $h$  è derivabile (e quindi differenziabile) in  $\lambda_0 = g(P_0) = g^\circ(x_0)$ . Per il teorema sulla differenziabilità delle funzioni composte deduciamo che  $f^\circ$  è differenziabile in  $x_0$  e quindi  $f$  è differenziabile in  $P_0$ . Inoltre  $f^\circ$  ammette le derivate parziali in  $x_0$  e per il teorema di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$\frac{\partial f^\circ}{\partial x_i}(x_0) = \frac{dh}{d\lambda}(g^\circ(x_0)) \frac{\partial g^\circ}{\partial x_i}(x_0),$$

da cui

$$f_{,i}(P_0) = \frac{dh}{d\lambda}(g(P_0)) g_{,i}(P_0). \quad (3.5.1)$$

In forma vettoriale le (3.5.1) forniscono:

$$\text{grad } f(P_0) = \frac{dh}{d\lambda}(g(P_0)) \text{grad } g(P_0),$$

ossia la tesi.

**Esempio 3.6.** Fissiamo un punto  $P_0$  di  $\mathcal{E}$  e consideriamo un aperto  $S \subset \mathcal{E}$  che non contenga il punto  $P_0$ . Consideriamo il campo scalare  $g = g(P)$  così definito:

$$\forall P \in S \quad g(P) = |P - P_0| = r(P)$$

ed una qualsiasi funzione reale  $h \in \mathcal{C}^1((0, +\infty))$ . Introduciamo poi il campo scalare  $f$  definito in  $S$  nel modo seguente  $f = h \circ g$ , per cui:

$$\forall P \in S \quad f(P) = h(r(P)).$$

Per quanto visto nelle due proposizioni precedenti,  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $S$  e si ha:

$$\forall P \in S \quad \text{grad } f(P) = \frac{dh}{d\lambda}(r(P)) \text{vers}(P - P_0) = \frac{dh}{d\lambda}(r(P)) \frac{P - P_0}{r(P)}. \quad (3.5.2)$$

## 3.6 Operatori differenziali del primo e del secondo ordine

Se si considerano campi tensoriali differenziabili su un aperto  $S$  di  $\mathcal{E}$ , mediante l'operatore gradiente, che è un operatore differenziale del primo ordine, è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine. Noi vedremo due esempi: l'operatore divergenza e l'operatore rotore.

**Definizione 3.18.** *Dato il campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  differenziabile in ogni punto di un aperto  $S$ , chiamiamo divergenza di  $\vec{v}$  quel campo scalare definito in  $S$  che si ottiene considerando in ogni punto di  $S$  il contratto di  $\text{grad } \vec{v}$ . Tale campo scalare viene denotato con  $\text{div } \vec{v}$  o  $\nabla \cdot \vec{v}$ .*

Dalla definizione data sopra, fissato un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , deduciamo allora:

$$\forall P \in S \quad \text{div } \vec{v}(P) = v_{i,i}(P).$$

Se poi ricorriamo alla rappresentazione analitica del campo vettoriale, otteniamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad \text{div } \vec{v}(P) = \frac{\partial v_1^o}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2^o}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_3^o}{\partial x_3}(x).$$

**Esempio 3.7.** Sia dato il campo vettoriale  $\vec{v}$  così definito:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \vec{v}(P) = P - P_0$$

con  $P_0$  punto fissato nello spazio geometrico.

Considerato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , la rappresentazione analitica del campo  $\vec{v}$  è data da

$$\vec{v}^o(x) = (x_1 - x_{01})\vec{e}_1 + (x_2 - x_{02})\vec{e}_2 + (x_3 - x_{03})\vec{e}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

E' evidente che  $\vec{v}^o \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$  per cui  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$ . Dunque  $\vec{v}$  è differenziabile in ogni punto di  $\mathcal{E}$  e resta perciò definito in  $S$  il campo scalare della divergenza. Precisamente si ha:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \text{div } v(P) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Dimostriamo ora la proprietà della divergenza di un campo vettoriale espressa dalla seguente

**Proposizione 3.7.** *Dati il campo scalare  $f$  e il campo vettoriale  $\vec{v}$ , entrambi differenziabili nell'aperto  $S$ , si ha in  $S$*

$$\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div } \vec{v} + \text{grad } f \cdot \vec{v} \quad (3.6.1)$$

Dimostrazione

Per semplicità poniamo:

$$\vec{\omega} = f \vec{v}$$

e fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ . Otteniamo allora

$$\operatorname{div}(f \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{\omega} = \omega_{i,i} = (f v_i)_{,i} = f v_{i,i} + f_{,i} v_i = f \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{v},$$

come volevamo dimostrare.

**Definizione 3.19.** *Dato il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine 2 differenziabile in ogni punto di un aperto  $S$ , chiamiamo divergenza di  $\tilde{t}$  ognuno dei due campi vettoriali definiti in  $S$  che si ottengono considerando in ogni punto di  $S$  i due contratti di  $\operatorname{grad} \tilde{t}$  risultanti dalla contrazione di un indice del tensore di partenza con l'indice di derivazione. Ognuna delle due divergenze del campo tensoriale  $\tilde{t}$  viene denotata con  $\operatorname{div} \tilde{t}$  o  $\nabla \cdot \tilde{t}$ .*

Dunque dato il campo tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine 2, questo ammette due divergenze ed ognuna di queste è un campo vettoriale.

Indichiamo con  $\vec{D}$  la divergenza ottenuta contraendo in  $\operatorname{grad} \tilde{t}$  il primo indice del tensore di partenza con quello di derivazione e con  $\vec{D}'$  la divergenza ottenuta contraendo in  $\operatorname{grad} \tilde{t}$  il secondo indice del tensore di partenza con quello di derivazione. Allora, fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , le componenti di  $\vec{D}$  e di  $\vec{D}'$  sono date da

$$D_j = t_{ij,i} \quad D'_i = t_{ij,j}.$$

Se il campo  $\tilde{t}$  è simmetrico in ogni punto di  $S$ , allora  $\vec{D} = \vec{D}'$ ; se  $\tilde{t}$  è emisimmetrico in ogni punto di  $S$ , allora  $\vec{D} = -\vec{D}'$ .

La definizione di divergenza si estende a un qualsiasi campo tensoriale di ordine  $r > 2$ , differenziabile in un aperto  $S$ .

**Definizione 3.20.** *Dato il campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$  di ordine  $r > 2$  differenziabile in ogni punto di un aperto  $S$ , chiamiamo divergenza di  $\tilde{t}$  ognuno degli  $r$  campi tensoriali di ordine  $r - 1$  definiti in  $S$  che si ottengono considerando in ogni punto di  $S$  gli  $r$  contratti di  $\operatorname{grad} \tilde{t}$  risultanti dalla contrazione di un indice del tensore di partenza e dell'indice di derivazione. Ognuna delle  $r$  divergenze del campo tensoriale  $\tilde{t}$  viene denotata con  $\operatorname{div} \tilde{t}$  o  $\nabla \cdot \tilde{t}$ .*

**Osservazione 3.9.** Si noti che l'applicazione dell'operatore gradiente ad un campo tensoriale di ordine  $r$  dà luogo ad un campo tensoriale di ordine  $r + 1$ , mentre l'applicazione dell'operatore divergenza ad un campo tensoriale di ordine  $r$  dà luogo a  $r$  campi tensoriali di ordine  $r - 1$ .

**Definizione 3.21.** Dato il campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  differenziabile in ogni punto di un aperto  $S$ , chiamiamo rotore di  $\vec{v}$  quel campo vettoriale definito in  $S$  che si ottiene considerando in ogni punto di  $S$  il vettore, denotato con  $\text{rot } \vec{v}$  o  $\nabla \times \vec{v}$ , risultante dalla composizione di  $\text{grad } \vec{v}$  con il tensore di Ricci effettuata nel modo seguente:

$$\text{rot } \vec{v} = \text{grad}^t \vec{v} \cdot \tilde{\vartheta}.$$

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , vediamo come si esprimono le componenti di  $\text{rot } \vec{v}$  che per brevità denotiamo con  $\vec{r}$ . Dalla definizione data sopra deduciamo:

$$\forall P \in S \quad r_k(P) = \vartheta_{ijk} v_{j,i}(P) = \epsilon_{ijk} v_{j,i}(P),$$

dove abbiamo tenuto presente che in una base ortonormale le componenti del tensore di Ricci coincidono con il simbolo di permutazione a tre indici.

Se poi facciamo uso della rappresentazione analitica del campo  $\vec{v}$ , denotata con  $\vec{v}^o$ , possiamo scrivere:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_k(P) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j^o}{\partial x_i}(x).$$

In particolare per  $k = 1$  otteniamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_1(P) = \epsilon_{231} \frac{\partial v_3^o}{\partial x_2}(x) + \epsilon_{321} \frac{\partial v_2^o}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial v_3^o}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2^o}{\partial x_3}(x).$$

Analogamente si ha:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_2(P) = \frac{\partial v_1^o}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3^o}{\partial x_1}(x)$$

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_3(P) = \frac{\partial v_2^o}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1^o}{\partial x_2}(x).$$

**Esempio 3.8.** Sia dato il campo vettoriale  $\vec{v}$  così definito:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \vec{v}(P) = P - P_0$$

con  $P_0$  punto fissato nello spazio geometrico.

Considerato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , la rappresentazione analitica del campo  $\vec{v}$ , come abbiamo visto nell'esempio 3.7, è data da

$$\vec{v}^o(x) = (x_1 - x_{01})\vec{e}_1 + (x_2 - x_{02})\vec{e}_2 + (x_3 - x_{03})\vec{e}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

E' immediato verificare che

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad r_1(P) = r_2(P) = r_3(P) = 0.$$

Quindi

$$\operatorname{rot} \vec{v}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

**Osservazione 3.10.** Si noti che il rotore di un campo vettoriale si può anche rappresentare nella forma:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \tilde{\vartheta} \cdot \operatorname{grad}^t \vec{v}.$$

Infatti, se ci rifacciamo alle componenti in un dato riferimento cartesiano ortonormale, abbiamo:

$$r_k = \vartheta_{ijk} v_{j,i} = \vartheta_{kij} v_{j,i}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'emisimmetria del tensore di Ricci. Dimostriamo ora una proprietà del rotore di un campo vettoriale.

**Proposizione 3.8.** *Dati il campo scalare  $f$  e il campo vettoriale  $\vec{v}$ , entrambi differenziabili nell'aperto  $S$ , si ha in  $S$*

$$\operatorname{rot}(f \vec{v}) = f \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{grad} f \times \vec{v}. \quad (3.6.2)$$

#### Dimostrazione

Premettiamo un'osservazione sulla rappresentazione del prodotto vettoriale usando linguaggio tensoriale.

Dati i due vettori  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ , fissiamo la base ortonormale  $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0^+$ . Decomponiamo i due vettori rispetto a tale base per cui:

$$\vec{u} = u_i \vec{e}_i, \quad \vec{v} = v_j \vec{e}_j.$$

La  $k$ -esima componente di  $\vec{u} \times \vec{v}$  è data da:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{e}_k = u_i \vec{e}_i \times v_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = u_i v_j \vartheta_{ijk},$$

da cui

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot \tilde{\vartheta}.$$

Osserviamo che, per l'emisimmetria del tensore di Ricci, si ha anche:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \tilde{\vartheta} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v}).$$

Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria della proposizione.

Poniamo per brevità

$$\vec{\omega} = f \vec{v}, \quad \vec{s} = \operatorname{rot}(f \vec{v}), \quad \vec{r} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

e fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ . Otteniamo allora in componenti:

$$s_k = \vartheta_{ijk} \omega_{j,i} = \vartheta_{ijk} (f v_j)_{,i} = f \vartheta_{ijk} v_{j,i} + \vartheta_{ijk} f_{,i} v_j = f r_k + (\operatorname{grad} f \times \vec{v})_k$$

che in forma vettoriale e tenendo conto delle posizioni fatte fornisce la tesi.

Si potrebbe anche dare la definizione di rotore di un campo tensoriale di ordine  $r > 1$ , ma su ciò non insistiamo.

**Osservazione 3.11.** Nei testi inglesi in luogo della notazione  $\text{rot}$  si trova  $\text{curl}$ .

Se un campo tensoriale di ordine  $r$ , definito in un aperto  $S$ , ammette ivi gradiente sino all'ordine  $p$  con  $p > 1$ , possiamo applicare a tale campo gli operatori differenziali del primo ordine sino a  $p$  volte, dando luogo ad operatori differenziali sino all'ordine  $p$ .

Noi introdurremo un operatore differenziale del secondo ordine che svolge un ruolo molto importante in Fisica Matematica: l'operatore laplaciano.

**Definizione 3.22.** Sia  $\tilde{t}$  un campo tensoriale di ordine  $r$  definito nell'aperto  $S$  e dotato in  $S$  di gradiente di ordine 2. Chiamiamo laplaciano di  $\tilde{t}$  il campo tensoriale di ordine  $r$ , definito in  $S$  che si ottiene applicando l'operatore divergenza a  $\text{grad} \tilde{t}$  con la contrazione dei due indici di derivazione nel  $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}$ .

Se in particolare è dato il campo scalare  $f$  dotato di gradiente secondo nell'aperto  $S$ , abbiamo:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = f_{,jj}.$$

Fissato un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , e considerata la rappresentazione analitica del campo  $f^o$ , deduciamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad \Delta f(P) = \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_3^2}(x).$$

**Esempio 3.9.** Fissato il punto  $P_0$ , sia  $S$  un qualsiasi aperto di  $\mathcal{E}$  che non contiene  $P_0$ . Consideriamo poi il campo scalare definito nel modo seguente:

$$\forall P \in S \quad f(P) = \frac{1}{r(P)}$$

con  $r(P) = |P - P_0|$ .

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , vediamo quale forma assume la rappresentazione analitica  $f^o$  del campo  $f$ .

Siano  $(x_1, x_2, x_3) =: x$  e  $(x_{01}, x_{02}, x_{03}) =: x_0$  le successioni delle coordinate di  $P$  e di  $P_0$  ed osserviamo che, siccome  $S$  non contiene  $P_0$ , allora  $S_\xi$  non contiene  $x_0$ . La rappresentazione analitica di  $f$  è data da:

$$f^o(x) = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2}} \quad \forall x \in S_\xi.$$

Si vede immediatamente che  $f^\circ \in \mathcal{C}^2(S_\xi)$  da cui discende che  $f \in \mathcal{C}^2(S)$  e che quindi è definito in  $S$  il campo tensoriale di ordine 2  $\text{grad}^{(2)} f$ .

Determiniamo ora il laplaciano di  $f$ .

Potremmo calcolarlo procurandoci le derivate seconde pure di  $f^\circ$ , ma è più conveniente operare in altro modo rifacendoci alla definizione:

$$\Delta f = \text{div} \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right).$$

D'altra parte, per la (3.5.2) abbiamo:

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{P - P_0}{r}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{r} &= \text{div} \left( -\frac{P - P_0}{r^3} \right) = \\ &= -\text{div} \left( \frac{P - P_0}{r^3} \right) = \\ &= -\left[ \frac{1}{r^3} \text{div}(P - P_0) + \text{grad} \frac{1}{r^3} \cdot (P - P_0) \right]. \end{aligned}$$

Ma, ancora per la (3.5.2), deduciamo:

$$\text{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \frac{P - P_0}{r}.$$

Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo:

$$\Delta \frac{1}{r} = -\left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} (P - P_0) \cdot (P - P_0) \right] = -\left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right] = 0$$

in ogni punto di  $S$ .

**Proposizione 3.9.** *Sia  $\tilde{t}$  un campo tensoriale di ordine  $r$  dotato nell'aperto  $S$  di gradiente di ordine 2. Allora, fissato un qualsiasi riferimento cartesiano ortonormale, le componenti di  $\Delta \tilde{t}$  sono uguali al laplaciano delle corrispondenti componenti di  $\tilde{t}$ , ossia:*

$$(\Delta \tilde{t})_{i_1 \dots i_r} = \Delta t_{i_1 \dots i_r}.$$

#### Dimostrazione

La dimostrazione è immediata.

Infatti in un fissato riferimento cartesiano ortonormale si ha:

$$(\Delta \tilde{t})_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r, jj} = \Delta t_{i_1 \dots i_r}.$$

Diamo ora una definizione che ci sarà utile in seguito.



**Definizione 3.23.** Sia  $\tilde{t}$  un campo tensoriale di ordine  $r$  definito in un sottoinsieme chiuso  $S$  dello spazio geometrico. Diciamo che  $\tilde{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^p(S)$  con  $p \in \mathbb{N}$  e scriviamo  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$  se esiste un campo tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  definito in un aperto  $\hat{S} \supset S$  tale che  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(\hat{S})$  e  $\tilde{t}|_S = \tilde{t}$ .

## 3.7 Integrazione dei campi tensoriali

Fissiamo nello spazio geometrico  $\mathcal{E}$  un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ .

Diamo la seguente definizione:

**Definizione 3.24.** Un sottoinsieme  $S \subset \mathcal{E}$  è misurabile (nel senso di Jordan o di Lebesgue) se  $S_\xi$  è misurabile (nel senso di Jordan o di Lebesgue) ed in tal caso definiamo misura di  $S$  (nel senso di Jordan o di Lebesgue) la misura di  $S_\xi$ .

La misura di sottoinsiemi dello spazio geometrico secondo Jordan o secondo Lebesgue è detta usualmente volume.

Si noti che, come si può verificare, tale definizione è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale.

**Definizione 3.25.** Dato il campo scalare  $f$  definito nell'insieme  $S$  misurabile (secondo da Jordan o secondo Lebesgue), diciamo che  $f$  è integrabile in  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale, lo è in  $S_\xi$  la sua rappresentazione analitica  $f^\circ$ . Inoltre definiamo integrale di  $f$  su  $S$  l'integrale di  $f^\circ$  su  $S_\xi$  ed usiamo la seguente notazione:

$$\int_S f(P) dS = \int_{S_\xi} f^\circ(x) dx.$$

Ovviamente

$$\int_{S_\xi} f^\circ(x) dx = \int \int \int_{S_\xi} f^\circ(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

E' facile verificare che la definizione data sopra è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale utilizzato.

**Osservazione 3.12.** Dalla definizione di integrale di un campo scalare discende che per l'integrazione dei campi scalari sussistono tutti i teoremi relativi all'integrazione delle funzioni reali di tre variabili reali.

E' immediato estendere la definizione data per un campo scalare a qualsiasi campo tensoriale.

**Definizione 3.26.** Dato il campo tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  definito nell'insieme  $S$  misurabile (secondo Jordan o secondo Lebesgue), diciamo che  $\tilde{t}$  è integrabile in  $S$  secondo Riemann o secondo Lebesgue se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale, lo è in  $S_\xi$  la sua rappresentazione analitica  $\tilde{t}^o$ . Inoltre definiamo integrale di  $\tilde{t}$  in  $S$  l'integrale di  $\tilde{t}^o$  in  $S_\xi$  ed usiamo la seguente notazione:

$$\int_S \tilde{t}(P) dS = \int_{S_\xi} \tilde{t}^o(x) dx.$$

Ovviamente la definizione è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale utilizzato e per l'integrazione dei campi tensoriali sussistono tutti i teoremi relativi all'integrazione delle funzioni tensoriali di tre variabili reali.

A questo punto è opportuno enunciare alcuni teoremi integrali che in Fisica Matematica svolgono un ruolo fondamentale.

Premettiamo e richiamiamo alcune indispensabili definizioni.

In primo luogo rimandiamo all'appendice alla fine del capitolo per la definizione di superficie regolare dello spazio geometrico.

Richiamiamo poi la definizione di integrale di superficie di un campo scalare.

**Definizione 3.27.** Sia  $\sigma$  una superficie regolare dello spazio geometrico sostegno dell'applicazione  $\varphi$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi: K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (u, v) &\longmapsto P = \varphi(u, v), \end{aligned}$$

dove  $K$  è un compatto di  $\mathbb{R}^2$ , connesso e chiusura di un aperto. La superficie  $\sigma$  abbia le seguenti equazioni parametriche cartesiane nel riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ :

$$x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (u, v) \in K.$$

Allora, dato il campo scalare  $f = f(P) \in C(S)$  con  $S$  aperto dello spazio geometrico tale che  $\sigma \subset S$ , definiamo integrale di  $f$  esteso a  $\sigma$  lo scalare:

$$\begin{aligned} \int_\sigma f(P) d\Sigma &= \int \int_K f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv \\ &= \int \int_K f^0(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv, \end{aligned}$$

dove

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \vec{e}_i, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v} \vec{e}_i.$$

Si dimostra che la definizione è indipendente dalla rappresentazione parametrica di  $\sigma$ .

Tale definizione si estende immediatamente anche ai campi tensoriali.

**Definizione 3.28.** *Dati la superficie regolare  $\sigma$  e il campo tensoriale di ordine  $r$   $\tilde{t} = \tilde{t}(P) \in C(S)$  con  $S$  aperto dello spazio geometrico tale che  $\sigma \subset S$ , definiamo integrale di  $\tilde{t}$  esteso a  $\sigma$  il tensore di ordine  $r$  dato da:*

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \tilde{t}(P) d\Sigma &= \int \int_K \tilde{t}(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv \\ &= \int \int_K \tilde{t}^0(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv. \end{aligned}$$

**Definizione 3.29.** *Chiamiamo dominio dello spazio geometrico ogni sottoinsieme di  $\mathcal{E}$  aperto e connesso.*

**Definizione 3.30.** *Un sottoinsieme  $S$  dello spazio geometrico è un dominio regolare se è un dominio limitato la cui frontiera  $\partial S$  è l'unione di un numero finito di superfici regolari che non hanno fra loro punti comuni se non punti del bordo. Dunque*

$$\partial S = \bigcup_{j=1}^s \sigma_j$$

dove  $s \in \mathbb{N}$  e le  $s$  superfici  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  sono regolari.

Se  $S$  è un dominio regolare con  $\partial S = \bigcup_{j=1}^s \sigma_j$ , e  $f$  è un campo scalare continuo in un aperto contenente la chiusura di  $S$ , cioè  $\bar{S}$  o anche soltanto continuo in  $\bar{S}$ , useremo la seguente notazione:

$$\int_{\partial S} f(P) d\Sigma := \sum_{j=1}^s \int_{\sigma_j} f(P) d\Sigma.$$

Per definizione di dominio regolare, ogni superficie  $\sigma_j$  è regolare e quindi in ogni punto, esclusi eventualmente punti del bordo, possiede la retta normale; dei due versori di tale retta consideriamo in ogni punto quello orientato verso l'esterno di  $S$ . Lo denoteremo con  $\vec{n}$  e diremo che è *il versore della normale esterna a  $\partial S$* .

Enunciamo ora un teorema di cui non forniamo la dimostrazione.

**Teorema 3.12.** *Siano  $S$  un dominio regolare dello spazio geometrico e  $f$  un campo scalare  $\in C^1(S) \cap C(\bar{S})$ . Fissato un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , si ha:*

$$\int_S f_{,i} dS = \int_{\partial S} f n_i d\Sigma, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.7.1)$$

dove  $f_{,i}$  e  $n_i$  sono le componenti rispetto a  $\vec{e}_i$  di  $\text{grad } f$  e di  $\vec{n} =$  versore della normale esterna a  $\partial S$ .

Le (3.7.1) sono note come *formule integrali di Gauss-Ostrogradski* e sono equivalenti alla relazione vettoriale:

$$\int_S \text{grad } f \, dS = \int_{\partial S} f \vec{n} \, d\Sigma. \quad (3.7.2)$$

In ogni caso l'integrale di volume che compare al primo membro delle (3.7.1) o della (3.7.2) va inteso nel senso di Lebesgue.

Conseguenza immediata delle formule integrali di Gauss-Ostrogradski è il seguente teorema, noto come teorema della divergenza.

**Teorema 3.13.** *Siano  $S$  un dominio regolare dello spazio geometrico e  $\vec{v}$  un campo vettoriale  $\in \mathcal{C}^1(S) \cap \mathcal{C}(\bar{S})$ . Allora:*

$$\int_S \text{div } \vec{v} \, dS = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Sigma.$$

L'integrale di superficie che compare a secondo membro della formula che traduce il teorema della divergenza è detto *flusso uscente da  $S$  del campo vettoriale  $\vec{v}$* .

Il teorema della divergenza si può estendere anche a campi tensoriali di ogni ordine purché vengano soddisfatte le ipotesi imposte al campo vettoriale  $\vec{v}$ .

### 3.8 Campi tensoriali dipendenti da una variabile reale

Consideriamo il prodotto cartesiano:  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  ed osserviamo che, essendo  $\mathcal{E}$  e  $\mathbb{R}$  spazi metrici, anche il loro prodotto cartesiano è uno spazio metrico. Infatti l'applicazione

$$\begin{aligned} d: (\mathcal{E} \times \mathbb{R}) \times (\mathcal{E} \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((P, \lambda), (P_0, \lambda_0)) &\longmapsto \sqrt{|P - P_0|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2} \end{aligned}$$

gode delle proprietà della distanza.

**Definizione 3.31.** *Siano  $S \subset \mathcal{E}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . Chiamiamo campo tensoriale di ordine  $r$  dipendente da una variabile reale, definito in  $S \times I$ , ogni applicazione del tipo:*

$$\begin{aligned} \tilde{t}: S \times I &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ (P, \lambda) &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

Fissato  $\lambda \in I$ , consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(\cdot, \lambda) : S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ P &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

Tale applicazione  $\tilde{t}(\cdot, \lambda)$  è un campo tensoriale di ordine  $r$  definito in  $S$ .

Fissato  $P \in S$ , consideriamo ora l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(P, \cdot) : I &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ \lambda &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

L'applicazione  $\tilde{t}(P, \cdot)$  è una funzione tensoriale di ordine  $r$  definita in  $I$ .

Poiché  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  è uno spazio metrico,  $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$  è un'applicazione tensoriale definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico.

Pertanto se  $(P_0, \lambda_0)$  è un punto di accumulazione per  $S \times I$  e  $\tilde{l}$  un tensore di ordine  $r$ , è noto il significato della scrittura:

$$\lim_{(P, \lambda) \rightarrow (P_0, \lambda_0)} \tilde{t}(P, \lambda) = \tilde{l},$$

dal momento che la definizione di limite per un campo tensoriale dipendente da una variabile reale rientra nella definizione generale data nel paragrafo 3.1.

Analogamente non è necessario ridare la definizione di continuità.

Fissato in  $\mathcal{E}$  il riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ , al campo tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$ , dipendente da una variabile reale, resta associata un'applicazione di quattro variabili reali:  $\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3, \lambda)$  con  $(x_1, x_2, x_3, \lambda) \in S_{\mathcal{E}} \times I$ , detta *rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  nel riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$* , ottenuta nel modo seguente:

$$\tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \tilde{t}(\xi^{-1}(x_1, x_2, x_3), \lambda) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, \lambda) \in S_{\mathcal{E}} \times I.$$

Vediamo ora di introdurre opportuni operatori differenziali.

Sia dato il campo tensoriale dipendente da una variabile reale  $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$  di ordine  $r$ , definito in  $S \times I$  dove  $S$  è un aperto dello spazio geometrico e  $I$  è un aperto di  $\mathbb{R}$ . Dunque  $S \times I$  è un aperto dello spazio metrico  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ .

Fissato  $\lambda$  in  $I$ , può accadere che il campo tensoriale  $\tilde{t}(\cdot, \lambda)$ , definito in  $S$ , ammetta gradiente in un punto  $P \in S$ . Questo è detto *gradiente di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$*  ed è denotato con  $\text{grad} \tilde{t}(P, \lambda)$  o  $\nabla \tilde{t}(P, \lambda)$ .

Fissato un riferimento cartesiano  $[O, (\vec{e}_i)]$ , denotiamo con  $t_{i_1 \dots i_r, j}(P, \lambda)$  le componenti rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  di  $\text{grad} \tilde{t}(P, \lambda)$ . E' facile provare che:

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P, \lambda) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3, \lambda)$$

dove  $\tilde{t}^o$  è la rappresentazione analitica del campo e  $(x_1, x_2, x_3)$  è la successione delle coordinate cartesiane di  $P$ .

Se in corrispondenza di ogni valore  $\lambda$  fissato in  $I$ , esiste  $\text{grad}\tilde{t}(P, \lambda)$  in ogni punto  $P \in S$ , resta definito in  $S \times I$  un nuovo campo tensoriale dipendente da una variabile reale, di ordine  $r + 1$ , il campo del gradiente di  $\tilde{t}$ , fatto rispetto al punto con  $\lambda$  fissato:

$$\text{grad}\tilde{t} = \text{grad}\tilde{t}(P, \lambda).$$

Tale campo, a sua volta, per  $\lambda$  fissato, può ammettere gradiente in un punto  $P \in S$ ; questo tensore, di ordine  $r + 2$ , è detto *gradiente secondo o di ordine 2 di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$*  e denotato con  $\text{grad}^{(2)}\tilde{t}(P, \lambda)$  o  $\nabla^{(2)}\tilde{t}(P, \lambda)$ .

In maniera analoga si può definire il gradiente di ordine  $p$  di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$  con  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > 2$ , denotato con  $\text{grad}^{(p)}\tilde{t}(P, \lambda)$  o  $\nabla^{(p)}\tilde{t}(P, \lambda)$ . Questo è un tensore di ordine  $r + p$ .

Ora fissiamo  $P \in S$ . Può avvenire che la funzione tensoriale  $\tilde{t}(P, \cdot)$  definita in  $I$  in corrispondenza di un dato valore di  $\lambda$  ammetta derivata. Questa è ancora un tensore di ordine  $r$ , è detta *derivata rispetto a  $\lambda$  di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$*  e denotata con  $\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\lambda}(P, \lambda)$  o  $\partial_\lambda\tilde{t}(P, \lambda)$ .

È evidente che, fissato un riferimento cartesiano  $[O, (\vec{e}_i)]$ , si ha:

$$\frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}}{\partial \lambda}(P, \lambda) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial \lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda).$$

Se tale derivata esiste  $\forall P \in S$  fissato in ogni  $\lambda \in I$ , allora in  $S \times I$  è definito un nuovo campo tensoriale dipendente da una variabile reale di ordine  $r$ , detto campo della derivata rispetto a  $\lambda$  di  $\tilde{t}$ :

$$\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\tilde{t}}{\partial\lambda}(P, \lambda).$$

Il campo della derivata rispetto a  $\lambda$  di  $\tilde{t}$  può a sua volta ammettere derivata per un dato valore di  $\lambda$ , fissato  $P$ ; questa, che è un tensore di ordine  $r$ , la chiamiamo *derivata seconda rispetto a  $\lambda$  di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$*  e la denotiamo con  $\frac{\partial^2\tilde{t}}{\partial\lambda^2}(P, \lambda)$  o  $\partial_\lambda^2\tilde{t}(P, \lambda)$ .

Analogamente si può definire la derivata rispetto a  $\lambda$  di ordine  $q$  di  $\tilde{t}$  in  $(P, \lambda)$  con  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 2$ , denotata con  $\frac{\partial^q\tilde{t}}{\partial\lambda^q}(P, \lambda)$  o  $\partial_\lambda^q\tilde{t}(P, \lambda)$ .

Diamo ora una definizione che ci sarà utile in seguito.

**Definizione 3.32.** Diremo che il campo tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  dipendente da una variabile reale, definito in  $S \times I$ , con  $S$  e  $I$  aperti è di classe  $\mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$

con  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e scriveremo  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$  se esistono in  $S \times I$  e sono ivi continui i seguenti campi tensoriali dipendenti da una variabile reale:

$$\text{grad}^{(l)} \frac{\partial^m \tilde{t}}{\partial \lambda^m} = \text{grad}^{(l)} \frac{\partial^m \tilde{t}}{\partial \lambda^m}(P, \lambda)$$

dove

$$l \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad m \in \{0, 1, \dots, q\}, \quad l + m \leq \max\{p, q\}$$

e

$$\text{grad}^{(0)} \tilde{t} := \tilde{t}, \quad \frac{\partial^0 \tilde{t}}{\partial \lambda^0} := \tilde{t}.$$

Se  $p = q$ , diremo che  $\tilde{t}$  è di classe  $\mathcal{C}^p(S \times I)$ , se  $p = q = 0$ , cioè se  $\tilde{t}$  è continuo in  $S \times I$ , allora diremo che  $\tilde{t}$  è di classe  $\mathcal{C}(S \times I)$ .

E' evidente che  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$  se e solo se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$ ,  $\tilde{t}^\circ \in \mathcal{C}^{p,q}(S_\xi \times I)$ , dove  $\tilde{t}^\circ$  è la rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$ .

Quanto visto per i campi tensoriali dipendenti da una variabile reale si estende facilmente ai campi tensoriali dipendenti da più variabili reali.

### 3.9 Funzioni tensoriali di una variabile tensoriale

Considerato l'insieme dei tensori di ordine  $s$ :  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$ , questo, com'è noto, è uno spazio vettoriale normato e quindi diviene in modo naturale uno spazio metrico. Infatti, considerata l'applicazione così definita:

$$d : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \times \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\tilde{A}, \tilde{A}_0) \longmapsto |\tilde{A} - \tilde{A}_0|$$

si vede subito che gode delle proprietà di una distanza.

**Definizione 3.33.** Sia  $\mathcal{S}$  un sottoinsieme di  $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$ . Chiamiamo funzione tensoriale di ordine  $r$  di una variabile tensoriale di ordine  $s$ , definita in  $\mathcal{S}$ , una qualsiasi applicazione del tipo:

$$\tilde{t} : \mathcal{S} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

$$\tilde{A} \longmapsto \tilde{t}(\tilde{A}).$$

Per l'osservazione precedente,  $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$  è un'applicazione tensoriale definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico. Limite e continuità sono perciò definiti nel modo usuale.

Fissiamo una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$  e osserviamo che ad ogni tensore  $\tilde{A}$  di ordine  $s$  è associata la successione delle sue componenti:  $(A_{j_1 \dots j_s})$ , successione di  $3^s$  scalari. Consideriamo poi l'applicazione

$$\Xi: \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^{3^s}$$

$$\tilde{A} \longmapsto (A_{11\dots 1}, \dots, A_{33\dots 3})$$

dove  $(A_{11\dots 1}, \dots, A_{33\dots 3})$  è la disposizione ordinata ottenuta mediante le  $3^s$  componenti di  $\tilde{A}$  disposte in un dato ordine.

E' facile provare che  $\Xi$  è un omeomorfismo analogo all'applicazione:

$$\xi: \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P(x_i) \longmapsto (x_1, x_2, x_3).$$

Considerata la funzione tensoriale di una variabile tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$ , se si fissa in  $\vec{\mathcal{E}}$  una base  $(\vec{e}_i)$ , a  $\tilde{t}$  resta associata la funzione tensoriale  $\tilde{t}^*$  di  $3^s$  variabili reali definita in  $\mathcal{S}_\Xi \subset \mathbb{R}^{3^s}$  ottenuta nel modo seguente:

$$\tilde{t}^* = \tilde{t} \circ \Xi^{-1}|_{\mathcal{S}_\Xi}.$$

Tale funzione è detta *rappresentazione analitica di  $\tilde{t}$  nella base  $(\vec{e}_i)$*  ed è analoga alla rappresentazione analitica di un campo tensoriale in un riferimento cartesiano ortonormale.

Diamo ora la definizione di differenziabilità di una funzione tensoriale di una variabile tensoriale.

**Definizione 3.34.** Sia  $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$  una funzione tensoriale di una variabile tensoriale, definita in  $\mathcal{S} \subset \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$ . Dato il tensore  $\tilde{A}_0$ , punto interno per  $\mathcal{S}$ ,

diciamo che  $\tilde{t}$  è differenziabile in  $\tilde{A}_0$  se esiste un'applicazione lineare, dipendente da  $\tilde{A}_0$ ,  $L_{\tilde{A}_0}: \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$  tale che

$$\lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_0} \frac{\tilde{t}(\tilde{A}) - \tilde{t}(\tilde{A}_0) - L_{\tilde{A}_0}(\tilde{A} - \tilde{A}_0)}{|\tilde{A} - \tilde{A}_0|} = \tilde{0}.$$

L'applicazione  $L_{\tilde{A}_0}$  è detta *differenziale della funzione tensoriale di una variabile tensoriale  $\tilde{t}$  in  $\tilde{A}_0$* .



Per quanto visto nel Capitolo 2, in corrispondenza di  $L_{\tilde{A}_0}$  esiste un tensore, dipendente da  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{B}_{\tilde{A}_0}$ , di ordine  $r + s$ , tale che:

$$\forall \tilde{A} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \quad L_{\tilde{A}_0}(\tilde{A}) = \tilde{B}_{\tilde{A}_0} \cdot \tilde{A}.$$

Il tensore  $\tilde{B}_{\tilde{A}_0}$  è detto *derivata di  $\tilde{t}$  in  $\tilde{A}_0$*  e viene denotato nel modo seguente:

$$\tilde{B}_{\tilde{A}_0} =: \partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}_0).$$

Analogamente a quanto abbiamo visto per i campi tensoriali, si può dimostrare la seguente

**Proposizione 3.10.** *Data la funzione tensoriale di ordine  $r$  di una variabile tensoriale di ordine  $s$   $\tilde{t} = \tilde{t}(A)$ , definita in  $\mathcal{S}$ , questa è differenziabile in  $\tilde{A}_0$ , punto interno di  $\mathcal{S}$ , se e solo se, fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  in  $\vec{\mathcal{E}}$ , la sua rappresentazione analitica  $\tilde{t}^*$  lo è nel punto corrispondente di  $\tilde{A}_0$  in  $\mathbb{R}^{3^s}$ . Inoltre le componenti della derivata di  $\tilde{t}$  in  $\tilde{A}_0$  si ottengono tramite le derivate delle componenti di  $\tilde{t}^*$  nel modo seguente:*

$$\left[ \partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}_0) \right]_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^*}{\partial A_{j_1 \dots j_s}}(\Xi(\tilde{A}_0)).$$

Se  $\mathcal{S}$  è un aperto, può avvenire che  $\tilde{t}$  sia differenziabile in ogni punto di  $\mathcal{S}$ ; si ottiene così una nuova funzione tensoriale di una variabile tensoriale definita in  $\mathcal{S}$  di ordine  $r + s$ :

$$\partial_{\tilde{A}} \tilde{t} = \partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}).$$

Questa, a sua volta, può essere differenziabile in un determinato punto  $\tilde{A}_0$  di  $\mathcal{S}$  e quindi avere derivata; tale derivata, che è un tensore di ordine  $r + 2s$ , viene detta *derivata seconda o di ordine 2 di  $\tilde{t}$  in  $\tilde{A}_0$*  e denotata con  $\partial_{\tilde{A}}^2 \tilde{t}(\tilde{A}_0)$ .

In maniera analoga si definisce la derivata di ordine  $p \in \mathbb{N}, p > 2$ , denotata con  $\partial_{\tilde{A}}^p \tilde{t}(\tilde{A}_0)$

**Definizione 3.35.** *Diremo che la funzione tensoriale  $\tilde{t}$  di ordine  $r$  di una variabile tensoriale di ordine  $s$ , definita in  $\mathcal{S}$  con  $\mathcal{S}$  aperto è di classe  $\mathcal{C}^p(\mathcal{S})$  con  $p \in \mathbb{N}$  e scriveremo  $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{S})$  se  $\tilde{t}$  ammette in  $\mathcal{S}$  derivate continue fino all'ordine  $p$ .*

In maniera analoga a quanto abbiamo fatto, potremmo anche considerare funzioni tensoriali di più variabili tensoriali, ma su ciò non insistiamo.

### 3.10 Appendice

**Definizione 3.36.** Sia  $K \subset \mathbb{R}^2$  compatto, connesso, chiusura dell'aperto  $\overset{\circ}{K}$ . Definiamo superficie dello spazio geometrico l'applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi: K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (u, v) &\longmapsto P = \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Chiamiamo  $\varphi(K)$  il sostegno della superficie e  $\varphi(\partial K)$  bordo della superficie.

Sia  $O \in \mathcal{E}$ ; allora  $\forall P \in \varphi(K)$ , abbiamo:

$$P - O = \varphi(u, v) - O =: \vec{r}_\varphi(u, v) \quad (u, v) \in K.$$

Il vettore posizione rispetto ad  $O$  dei punti del sostegno della superficie è una funzione vettoriale di due variabili reali definita in  $K$ .

**Definizione 3.37.** Diciamo che la superficie  $\varphi$  è regolare se:

1.  $\varphi|_{\overset{\circ}{K}}$  è iniettiva
2.  $\vec{r}_\varphi \in \mathcal{C}^1(K)$
3.  $\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \neq \vec{0}$  in  $\overset{\circ}{K}$  con  $\frac{\partial P}{\partial u} := \frac{\partial \vec{r}_\varphi}{\partial u}$ .

**Definizione 3.38.** Siano  $\varphi, \psi$  due superfici regolari:

$$\begin{aligned} \varphi: K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \psi: H &\longrightarrow \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Diciamo che  $\varphi$  e  $\psi$  sono equivalenti, cioè  $\varphi \sim \psi$ , se esiste un diffeomorfismo  $\tau: K \longrightarrow H$  tale che:  $\varphi = \psi \circ \tau$ .

Rispetto alla relazione di equivalenza introdotta potremo considerare le classi di equivalenza; se  $\sigma$  è una classe di equivalenza, diremo che  $\varphi \in \sigma$  è una sua *rappresentazione parametrica*.

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 3.11.** Due superfici regolari sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno.

Ogni classe di equivalenza è allora individuata in maniera completa dal sostegno comune a tutte le superfici regolari equivalenti che stanno nella classe considerata. Per tale regione viene usato il termine *superficie* per indicare l'applicazione, la classe di equivalenza e il sostegno comune a tutte le rappresentazioni parametriche della stessa classe di equivalenza.

**Definizione 3.39.** Sia  $\varphi: K \longrightarrow \mathcal{E}$  una superficie regolare. Definiamo area di  $\varphi$  lo scalare dato da

$$A(\varphi) = \int \int_K \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv. \quad (3.10.1)$$

Si può dimostrare che se  $\varphi \sim \psi$ , allora  $A(\varphi) = A(\psi)$ .

**Definizione 3.40.** Si definisce area della classe di equivalenza  $\sigma$  nell'insieme delle superfici regolari lo scalare

$$A(\sigma) = A(\varphi),$$

dove  $\varphi$  è una qualsiasi rappresentazione parametrica di  $\sigma$ .

Come detto in precedenza, usualmente si denota con  $\sigma$  anche il sostegno comune a tutte le superfici regolari che appartengono alla stessa classe di equivalenza e la sua area è data dalla (3.10.1) dove  $\varphi$  è una sua qualsiasi rappresentazione parametrica.

**Definizione 3.41.** Data la superficie regolare  $\sigma$  (intesa come luogo di punti di  $\mathcal{E}$ ), sia  $\varphi: K \longrightarrow \mathcal{E}$  una sua rappresentazione parametrica. Fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , si abbia:

$$\vec{r}_\varphi(u, v) = x_i(u, v) \vec{e}_i \quad \forall (u, v) \in K.$$

Allora le tre equazioni:

$$x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (u, v) \in K$$

sono dette equazioni parametriche cartesiane della superficie  $\sigma$ .

**Definizione 3.42.** Dato la superficie regolare  $\sigma$  (intesa come luogo di punti di  $\mathcal{E}$ ), sia  $P$  un punto di  $\sigma$  non appartenente al bordo. Consideriamo tutti i cammini regolari sulla superficie passanti per  $P$ . Il piano contenente tutte le rette tangenti in  $P$  a tali cammini è detto piano tangente alla superficie in  $P$ . La retta passante per  $P$  e normale al piano tangente è detta retta normale alla superficie nel punto  $P$ .

Si potrebbe dimostrare che i due versori di tale retta sono dati da

$$\vec{n}^\pm = \pm \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v}}{\left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right|}.$$



# Capitolo 4

## Corpi continui deformabili

### 4.1 Definizione di corpo continuo

La Fisica Matematica si propone di ricondurre lo studio dei fenomeni fisici a problemi differenziali. A tal fine vengono introdotti dei modelli matematici atti a schematizzare il comportamento dei corpi reali. Un modello particolarmente importante è quello del corpo continuo che è applicabile a tutti quei fenomeni fisici nei quali non interviene la natura particellare della materia. Lo scopo di questo capitolo è appunto di introdurre tale modello e studiarne alcune conseguenze.

Richiamiamo dapprima alcune definizioni già note.

**Definizione 4.1.** *Dati un insieme  $V \neq \emptyset$  e una famiglia di suoi sottoinsiemi  $\mathcal{I}$ , diciamo che  $(V, \mathcal{I})$  è uno spazio topologico se sono soddisfatte tre condizioni:*

- 1)  $V, \emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- 2)  $A, B \in \mathcal{I} \implies A \cap B \in \mathcal{I}$ ;
- 3) *se  $\{A_i\}_{i=1,2,..}$  è un'infinità numerabile di sottoinsiemi di  $V$  che stanno in  $\mathcal{I}$ , allora*

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{I}.$$

*I sottoinsiemi di  $V$  che stanno in  $\mathcal{I}$  sono detti insiemi aperti.*

Dalla proprietà 3) segue immediatamente che

$$A, B \in \mathcal{I} \implies A \cup B \in \mathcal{I}.$$

**Definizione 4.2.** Un sottoinsieme  $B$  di  $V$  è detto insieme chiuso se

$$B = \mathcal{C}(A)$$

dove  $\mathcal{C}(A)$  denota il complementare di  $A$  rispetto a  $V$  e  $A$  è un insieme aperto (cioè  $A \in \mathcal{I}$ ).

**Osservazione 4.1.** Dalle leggi di de Morgan discende che:

- i) se  $B, C$  sono insiemi chiusi, allora anche  $B \cup C$  e  $B \cap C$  sono insiemi chiusi;
- ii) se  $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi chiusi, allora  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i$  è un insieme chiuso.

In genere, una volta precisata la famiglia  $\mathcal{I}$ , cioè la sua *topologia*, lo spazio topologico  $(V, \mathcal{I})$  lo si denota semplicemente con  $V$ .

Come in uno spazio metrico, si danno le seguenti definizioni.

**Definizione 4.3.** Si definisce intorno di un punto  $x \in V$  ogni insieme aperto  $I \subset V$  contenente il punto  $x$ ; un punto  $x \in V$  è detto punto aderente per l'insieme  $A \subset V$  se ogni intorno di  $x$  contiene almeno un punto di  $A$ ; si dice che  $x \in V$  è punto di accumulazione per l'insieme  $A \subset V$  se ogni intorno di  $x$  contiene almeno un punto di  $A$  diverso da  $x$ . L'insieme dei punti aderenti per l'insieme  $A$  è detto chiusura di  $A$  ed è denotato con  $\overline{A}$ .

Si può dimostrare che gli insiemi chiusi sono gli unici sottoinsiemi di  $V$  che verificano la condizione di coincidere con la propria chiusura. Come nel caso di uno spazio metrico,  $\overline{A}$  è il più piccolo insieme chiuso che include  $A$ .

Ricordiamo che agli spazi topologici si può estendere la definizione di applicazione continua che si dà per uno spazio metrico.

**Definizione 4.4.** Si dice che l'applicazione  $f$  dallo spazio topologico  $V$  allo spazio topologico  $W$  è continua nel punto  $x_0 \in V$  se per ogni intorno  $I_{y_0}$  del punto  $y_0 = f(x_0)$  esiste un intorno  $J_{x_0}$  del punto  $x_0$  tale che

$$f(J_{x_0}) \subset I_{y_0}.$$

L'applicazione  $f$  da  $V$  a  $W$  è detta continua se è continua in ogni punto  $x \in V$ .

Si potrebbero poi dimostrare i due teoremi seguenti che ci limitiamo ad enunciare.

**Teorema 4.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione  $f$  dallo spazio topologico  $V$  allo spazio topologico  $W$  sia continua è che l'immagine inversa  $f^{-1}(A)$  di ogni insieme aperto  $A \subset W$  sia un insieme aperto (ovviamente in  $V$ ).*

**Teorema 4.2.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione  $f$  dallo spazio topologico  $V$  allo spazio topologico  $W$  sia continua è che l'immagine inversa  $f^{-1}(B)$  di ogni insieme chiuso  $B \subset W$  sia un insieme chiuso (ovviamente in  $V$ ).*

Diamo ora altre definizioni che ci saranno utili.

**Definizione 4.5.** *Dato l'insieme  $V \neq \emptyset$ , una famiglia  $\mathcal{A}$  di suoi sottoinsiemi è detta algebra dell'insieme  $V$  se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

- 1)  $V \in \mathcal{A}$
- 2)  $A \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A) \in \mathcal{A}$
- 3)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .

**Proposizione 4.1.** *Se  $\mathcal{A}$  è un'algebra, allora si ha*

- i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

Dimostrazione

Proviamo prima i).

Per definizione di algebra,  $V \in \mathcal{A}$  da cui

$$\emptyset = \mathcal{C}(V) \in \mathcal{A}.$$

Proviamo ora ii).

$$A, B \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \in \mathcal{A}.$$

Ma

$$A \cap B = \mathcal{C}\mathcal{C}(A \cap B) \in \mathcal{A}.$$

**Definizione 4.6.** *L'algebra  $\mathcal{A}$  è detta  $\sigma$ -algebra se soddisfa all'ulteriore proprietà:*

- 4) *se  $\{A\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , allora*

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 4.2.** Per le leggi di De Morgan, se  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra, anche l'intersezione di un'infinità numerabile di insiemi che stanno in  $\mathcal{A}$  sta in  $\mathcal{A}$ .

**Definizione 4.7.** La coppia  $(V, \mathcal{A})$  dove  $V$  è un insieme diverso dall'insieme vuoto e  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di  $V$  è detta spazio misurabile ed ogni sottoinsieme di  $V$  che sta in  $\mathcal{A}$  è detto insieme misurabile.

**Definizione 4.8.** Dato un insieme  $V \neq \emptyset$  e una sua  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ , chiamiamo misura ( $\sigma$ -addittiva) per l'insieme  $V$  una qualsiasi applicazione  $M$  a valori reali non negativi definita su  $\mathcal{A}$  che gode delle due proprietà seguenti:

- $M(\emptyset) = 0$
- se  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  disgiunti a due a due si ha

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} M(A_i).$$

La terna  $(V, \mathcal{A}, M)$  è detta spazio misura.

Un esempio ben noto di spazio misura è la terna  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$  dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue e  $m$  è la misura di Lebesgue.

Dalla definizione data di misura discende la seguente proposizione:

**Proposizione 4.2.** Se  $(V, \mathcal{A}, M)$  è uno spazio misura, la misura  $M$  gode della proprietà di finita additività, cioè

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \cap B = \emptyset \quad M(A \cup B) = M(A) + M(B).$$

Dimostrazione

Siano  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  e poniamo  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  per  $i = 3, 4, \dots$

Per definizione di misura avremo

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = M(A) + M(B) + \sum_{i=3}^{+\infty} M(\emptyset) = M(A) + M(B).$$

**Definizione 4.9.** Se  $V$  è uno spazio topologico, definiamo  $\sigma$ -algebra di Borel di  $V$  la  $\sigma$ -algebra minimale che contiene tutti gli insiemi aperti di  $V$ .



**Osservazione 4.3.** La  $\sigma$ -algebra di Borel di  $V$ , essendo un'algebra, contiene anche tutti gli insiemi chiusi di  $V$ .

Vediamo ora di dare la definizione di *corpo continuo tridimensionale*.

Teniamo presente che i corpi reali sono caratterizzati dal fatto che occupano determinate regioni dello spazio fisico e che sono dotati di una particolare struttura materiale. Dunque una definizione matematica di corpo continuo, poichè tale modello schematizza il comportamento dei corpi reali, deve tenere conto di queste due proprietà.

**Definizione 4.10.** *Definiamo corpo continuo tridimensionale uno spazio misura  $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, m)$ , dove:*

- $\mathcal{C}$  è uno spazio topologico dotato di una famiglia  $\Phi$  di omeomorfismi del tipo  

$$\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow S_\varphi \text{ con } S_\varphi \text{ chiusura di un aperto dello spazio geometrico;}$$
- $\mathcal{A}$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel dello spazio topologico  $\mathcal{C}$ ;
- $m$  è una misura, che prende il nome di distribuzione di massa.

Ogni omeomorfismo  $\varphi$  è detto *configurazione possibile per il corpo continuo*,  $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$  è detta *regione occupata da  $\mathcal{C}$  nella configurazione  $\varphi$*  e  $\Phi$  rappresenta la famiglia delle configurazioni possibili del corpo continuo.

**Osservazione 4.4.** Si noti che aver associato a  $\mathcal{C}$  la famiglia delle sue possibili configurazioni tiene conto del fatto che i corpi reali occupano determinate regioni dello spazio geometrico, mentre la distribuzione di massa  $m$  sintetizza, almeno in parte, la struttura materiale del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo.

Osserviamo inoltre che la distribuzione di massa di un corpo continuo è indipendente dalle sue possibili configurazioni.

**Definizione 4.11.** *Preso un sottoinsieme  $A \in \mathcal{A}$ , definiamo  $m(A)$  massa di  $A$  e, in particolare,  $m(\mathcal{C})$  è detta massa totale del corpo continuo.*

Nel seguito per brevità denoteremo un corpo continuo semplicemente con  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 4.12.** *Un sottocorpo di un corpo continuo  $\mathcal{C}$  è un qualsiasi suo sottoinsieme  $\mathcal{C}^*$  che sia la chiusura di un aperto.*

Si prova che ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  si può far assumere la struttura di corpo continuo tridimensionale. Diamone un cenno senza entrare nei dettagli.

In primo luogo,  $\mathcal{C}^*$ , come sottoinsieme di uno spazio topologico, è a sua volta

uno spazio topologico e la famiglia che induce su  $\mathcal{C}^*$  una topologia è costituita da tutti gli insiemi del tipo  $\mathcal{C}^* \cap A$  con  $A$  aperto di  $\mathcal{C}$ .

Inoltre  $\mathcal{C}^*$  è dotato di una famiglia di configurazioni possibili, data da :

$$\Phi^* = \{\varphi^* = \varphi|_{\mathcal{C}^*} \mid \varphi \text{ configurazione possibile di } \mathcal{C}\}.$$

Si tenga presente che, essendo ogni configurazione possibile un omeomorfismo,  $\varphi(\mathcal{C}^*)$  è la chiusura di un aperto di  $\mathcal{E}$  poiché  $\mathcal{C}^*$  è la chiusura di un aperto di  $\mathcal{C}$ . Se poi si considera la famiglia  $\mathcal{A}^*$  costituita dai sottoinsiemi di  $\mathcal{C}^*$  che stanno in  $\mathcal{A}$ , si può provare che è la  $\sigma$ -algebra di Borel di  $\mathcal{C}^*$ .

Infine introduciamo la misura  $m^*$  per  $\mathcal{C}^*$  così definita:

$$m^* = m|_{\mathcal{A}^*}.$$

Dunque la terna  $(\mathcal{C}^*, \mathcal{A}^*, m^*)$  risulta un corpo continuo tridimensionale.

**Definizione 4.13.** *Gli elementi di un corpo continuo  $\mathcal{C}$  sono detti particelle di  $\mathcal{C}$  e li denoteremo con  $X, Y, Z, \dots$*

**Definizione 4.14.** *Se  $\varphi$  è una configurazione possibile per il corpo continuo  $\mathcal{C}$  e  $X$  è una particella di  $\mathcal{C}$ , il punto  $P = \varphi(X) \in S_\varphi$  è detto posizione occupata dalla particella  $X$  nella configurazione  $\varphi$ .*

Essendo  $\varphi$  un omeomorfismo, si ha:

$$P = \varphi(X) \iff X = \varphi^{-1}(P).$$

Potremmo dare anche la definizione di corpo continuo bidimensionale o unidimensionale, ma su ciò non insistiamo.

**Definizione 4.15.** *Diciamo che il corpo continuo  $\mathcal{C}$ , dotato della famiglia  $\Phi$  delle sue possibili configurazioni, è rigido se  $\forall \varphi, \varphi' \in \Phi$ , si ha:*

$$|\varphi(X) - \varphi(X^*)| = |\varphi'(X) - \varphi'(X^*)| \quad \forall X, X^* \in \mathcal{C}.$$

Dunque se  $\mathcal{C}$  è un corpo rigido, prese due sue qualsiasi configurazioni possibili, per ogni coppia di particelle la distanza tra le posizioni che queste occupano in entrambe le configurazioni è la stessa.

**Definizione 4.16.** *Se il corpo continuo  $\mathcal{C}$  non è rigido, diciamo che  $\mathcal{C}$  è un corpo continuo deformabile.*

Noi ci occuperemo della meccanica dei corpi continui deformabili. Per la Meccanica dei corpi rigidi si rimanda al corso di Modelli della Fisica Matematica.

## 4.2 Cinematica dei corpi continui

Per studiare il moto di un corpo continuo occorre in primo luogo fissare un osservatore. Sia  $[O, (\vec{e}_i)]$  il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore.

**Definizione 4.17.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$ , chiamiamo moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  rispetto all'osservatore fissato una qualsiasi famiglia di possibili configurazioni  $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ .*

La regione occupata da  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ , ossia nella configurazione  $\varphi_t$ , con  $t \in [t_0, t_1]$ , è denotata con  $S(t)$ .

Ovviamente il moto di  $\mathcal{C}$  è noto se ad ogni istante è nota la posizione occupata da ogni sua particella.

Dunque il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  è descritto dall'equazione puntuale:

$$P = \varphi_t(X) \quad \forall X \in \mathcal{C}, \forall t \in [t_0, t_1]$$

che fornisce la posizione occupata dalla particella  $X$  all'istante  $t$ .

Nel seguito per motivi di convenienza useremo la seguente notazione:

$$\varphi(X, t) = \varphi_t(X)$$

per cui  $t$  non viene più riguardato come un parametro, ma come una variabile indipendente. Dunque l'equazione precedente assume la forma:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (4.2.1)$$

D'altra parte, presa una qualsiasi particella  $X$ , siano  $\varphi_i(X, t)$   $i = 1, 2, 3$  le applicazioni (a valori reali) che forniscono le coordinate  $x_i$  della posizione occupata dalla particella  $X$  all'istante  $t$ .

Allora il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  può anche essere descritto mediante le tre equazioni scalari:

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2.2)$$

Inoltre, presa una qualsiasi particella  $X$ , possiamo anche introdurre il vettore posizione rispetto ad  $O$  della posizione  $P$  occupata da  $X$  all'istante  $t$ :

$$P - O = \varphi_i(X, t) \vec{e}_i =: \vec{\varphi}(X, t)$$

dove  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(X, t)$  è un'applicazione vettoriale definita in  $\mathcal{C} \times [t_0, t_1]$ . Perciò il moto di  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  può anche essere descritto mediante l'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (4.2.3)$$

In conclusione il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad (4.2.4)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (4.2.5)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2.6)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella  $X$ .

Tutte le funzioni al secondo membro delle equazioni scritte sopra hanno come variabili indipendenti  $X$  e  $t$ . Tuttavia è conveniente assumere come variabile indipendente non la generica particella del corpo continuo, ma la sua posizione in una configurazione fissata, detta *configurazione di riferimento*.

Fissiamo dunque una configurazione  $\varphi_0 \in \Phi$  che assumiamo come configurazione di riferimento. Tale configurazione non deve necessariamente coincidere con una configurazione assunta dal corpo continuo durante il moto, ma è del tutto arbitraria. Talvolta può essere opportuno scegliere come configurazione di riferimento la configurazione di  $\mathcal{C}$  all'istante  $t_0$ , cioè all'istante iniziale del moto.

La configurazione di riferimento  $\varphi_0$  sia l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathcal{C} &\longrightarrow S_0 \\ X &\longmapsto P_0 = \varphi_0(X). \end{aligned}$$

Poiché, per definizione di configurazione,  $\varphi_0$  è un omeomorfismo, ammette inversa ed abbiamo:

$$P_0 = \varphi_0(X) \quad \Longleftrightarrow \quad X = \varphi_0^{-1}(P_0).$$

Ciò consente di far comparire nella (4.2.1), anziché la generica particella  $X$ , la posizione  $P_0$  che questa occupa nella configurazione di riferimento.

Infatti poniamo:

$$\forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1] \quad x(P_0, t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (4.2.1) si può scrivere come:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Se poi, per brevità, introduciamo la notazione:

$$\mathcal{S}_0 := S_0 \times [t_0, t_1],$$

l'equazione puntuale assume la forma:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Analogamente si può operare per l'equazione vettoriale (4.2.2). In tal caso si pone:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \vec{x}(P_0, t) = \vec{\varphi}(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (4.2.2) si può scrivere come:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Consideriamo la rappresentazione analitica del campo vettoriale dipendente da una variabile reale  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ :

$$\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate del punto  $P_0$  ed abbiamo ommesso, per brevità, l'apice  $o$ .

Ricordiamo che, fissato il riferimento  $[O, (\vec{e}_i)]$ , resta definita l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ovviamente avremo:

$$P_0(x_{0i}) \in S_0 \implies (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0) \subset \mathbb{R}^3.$$

Dunque  $\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$  è una funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(S_0) \times [t_0, t_1]$ .

Per brevità poniamo:

$$\xi(\mathcal{S}_0) := \xi(S_0) \times [t_0, t_1].$$

A questo punto, nelle equazioni scalari (4.2.3) al secondo membro sostituiamo le componenti della rappresentazione analitica del campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$  per cui, in luogo delle (4.2.3), possiamo scrivere le tre equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

In conclusione, se viene fissata una configurazione di riferimento, un moto di un corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (4.2.7)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (4.2.8)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (4.2.9)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

**Osservazione 4.5.** Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , indichiamo con  $x(\cdot, t)$  l'applicazione:

$$\begin{aligned} x(\cdot, t) : \mathcal{S}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}(t) \\ P_0 &\longmapsto P = x(P_0, t). \end{aligned}$$

Tale applicazione è un omeomorfismo, essendo ottenuta componendo due omeomorfismi:

$$x(\cdot, t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(\cdot), t) = \varphi_t \circ \varphi_0^{-1}(\cdot)$$

Quindi, per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$ , l'applicazione  $x(\cdot, t)$  ammette inversa  $x^{-1}(\cdot, t)$ , per cui

$$\forall t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad P = x(P_0, t) \iff P_0 = x^{-1}(P, t).$$

**Definizione 4.18.** Il moto di un corpo continuo è detto regolare se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

1)  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  o equivalentemente  $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$   $i = 1, 2, 3$ ;

2)  $J(P_0, t) = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) > 0 \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \mathcal{S}_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ .

Nel seguito considereremo sempre moti regolari.

**Osservazione 4.6.** Se  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ , ossia se si assume come configurazione di riferimento quella iniziale del moto, e vale la 1), alla condizione 2) possiamo sostituire la condizione:

$$2') \quad J(P_0, t) \neq 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Infatti, come ora proveremo, dalla 2') discende la 2).

Consideriamo  $J(P_0, t_0)$  e teniamo presente che, essendo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ , abbiamo dalle (4.2.9):

$$x_{0i} = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0).$$

Dunque all'istante  $t = t_0$  le funzioni  $x_i$  assumono il valore  $x_{0i}$  per  $i = 1, 2, 3$  e perciò:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0) = \delta_{ij} \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0).$$

Segue

$$J(P_0, t_0) = 1 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

D'altra parte, valendo la condizione 1),  $J \in \mathcal{C}(S_0)$ , per cui, grazie alla continuità, se  $J$  è positivo in  $S_0$  all'istante iniziale  $t_0$  e sussiste la 2'),  $J$  si manterrà positivo in  $S_0 \forall t \in ]t_0, t_1]$ , come volevamo dimostrare.

**Osservazione 4.7.** Come abbiamo precedentemente osservato, fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , l'applicazione  $x(\cdot, t)$  è un omeomorfismo e quindi stabilisce una corrispondenza biunivoca tra  $S_0$  e  $S(t)$ . Ne segue che le (4.2.9) vengono a stabilire una corrispondenza biunivoca tra  $\xi(S_0)$  e  $\xi(S(t))$ . Se il moto è regolare, noti risultati di Analisi Matematica ci consentono di concludere che, fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , le equazioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$  sono invertibili e possiamo quindi esprimere le  $x_{0i}$  in funzione di  $(x_1, x_2, x_3, t)$ :

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Le funzioni  $x_{0i}$  godono delle stesse proprietà di regolarità delle  $x_i$ , ovviamente con le opportune modifiche.

Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , introduciamo per brevità le seguenti notazioni:

$$\mathcal{S} = \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\};$$

$$\xi(\mathcal{S}) = \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Come abbiamo visto, il moto può essere descritto mediante l'equazione:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

**Definizione 4.19.** *Definiamo velocità all'istante  $t$  della particella  $X$  del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$  la derivata rispetto al tempo del campo vettoriale  $\vec{x}$  in  $(P_0, t)$ :*

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché  $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , istante per istante possiamo considerare la velocità di ogni particella. Risulta quindi definito in  $\mathcal{S}_0$  il campo vettoriale dipendente dalla variabile reale  $t$ :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t),$$

che ad ogni istante  $t$  durante il moto fornisce la velocità di ogni particella del corpo continuo in funzione della posizione che questa occupa nella configurazione di riferimento.

D'altra parte, al campo vettoriale  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t)$  definito in  $\mathcal{S}_0$  possiamo associare un nuovo campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  definito in  $\mathcal{S}$  nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t),$$

essendo  $P$  la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ .

Mettiamo in rilievo la differenza tra i due campi  $\dot{\vec{x}}$  e  $\vec{v}$ :

$\dot{\vec{x}}(P_0, t)$  è la velocità all'istante  $t$  della particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ , mentre  $\vec{v}(P, t)$  è la velocità all'istante  $t$  della particella che in tale istante occupa la posizione  $P$ .

Poiché  $\dot{\vec{x}}$  e  $\vec{v}$  sono campi vettoriali, dipendenti anche da  $t$ , possiamo considerare la rappresentazione analitica nel riferimento associato all'osservatore:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(\mathcal{S}_0)$ ;

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in  $\xi(\mathcal{S})$ .

Ovviamente delle rappresentazioni analitiche si possono prendere in considerazione anche le componenti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) & \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned}$$



Abbiamo dunque mostrato che la velocità delle particelle nel moto di un corpo continuo si può rappresentare mediante un campo vettoriale, dipendente da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}_0$  o un campo vettoriale, dipendente da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}$ .

Ciò che abbiamo visto riguardo la velocità delle particelle si può estendere a qualsiasi grandezza fisica scalare, vettoriale o tensoriale legata al moto del corpo continuo.

Ogni grandezza infatti si può rappresentare mediante un campo (scalare, vettoriale o tensoriale), dipendente anche da  $t$ , definito in  $\mathcal{S}_0$  o definito in  $\mathcal{S}$ . Nel primo caso, nello studio del moto si utilizzano come variabili indipendenti la posizione  $P_0$  occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo  $t$ ; nel secondo caso le variabili indipendenti sono la posizione  $P$  occupata dalla generica particella all'istante  $t$  e il tempo  $t$ . Se ci rifacciamo alle rappresentazioni analitiche dei campi, nel primo caso le variabili indipendenti sono la successione  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  delle coordinate cartesiane della posizione  $P_0$  occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo  $t$ , mentre nel secondo sono la successione  $(x_1, x_2, x_3)$  delle coordinate cartesiane della posizione  $P$  occupata dalla generica particella all'istante  $t$  e il tempo  $t$ .

**Definizione 4.20.** *Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in  $\mathcal{S}_0$  o in un suo sottoinsieme, è detto campo materiale (o lagrangiano).*

*Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in  $\mathcal{S}$  o in un suo sottoinsieme, è detto campo spaziale (o euleriano).*

Vediamo di meglio comprendere la differenza tra campo materiale e campo spaziale.

Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

Rivolgiamo la nostra attenzione ad una grandezza fisica scalare legata a tale moto rappresentata mediante il campo scalare materiale:  $g = g(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ . Fissiamo  $P_0 \in \mathcal{S}_0$ , ossia fissiamo la particella del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ , e consideriamo la funzione del tempo  $g(P_0, \cdot)$  facendo variare  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo  $g$  al trascorrere del tempo per la particella che occupa la posizione  $P_0$  nella configurazione di riferimento.

Assumiamo ora che la grandezza scalare considerata prima sia rappresentata mediante il campo scalare spaziale  $f = f(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ . Fissiamo un punto  $P$  nella regione dello spazio geometrico in cui si muove  $\mathcal{C}$  e consideriamo la funzione del tempo  $f(P, \cdot)$  facendo variare  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo  $f$  al trascorrere del tempo nel punto  $P$  fissato, che verrà occupato via via da particelle diverse del corpo continuo.

Ciò che abbiamo detto per i campi scalari si estende ovviamente a campi vettoriali e tensoriali.

E' evidente che se una grandezza è rappresentata mediante un campo materiale è sempre possibile rappresentarla mediante un campo spaziale, così come abbiamo visto per la velocità delle particelle. Vale naturalmente anche il viceversa: se una grandezza è rappresentata mediante un campo spaziale possiamo sempre rappresentarla anche mediante un campo materiale.

Vediamo dapprima come si passa dalla rappresentazione materiale a quella spaziale.

Sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo materiale  $g = g(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ . Vogliamo dedurne la rappresentazione spaziale; questa è il campo spaziale che denotiamo con  $g_s = g_s(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad g_s(P, t) = g(x^{-1}(P, t), t),$$

dove abbiamo tenuto presente che per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$

$$P = x(P_0, t) \quad \Longleftrightarrow \quad P_0 = x^{-1}(P, t).$$

Viceversa, sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo spaziale  $f = f(P, t)$ , definito in  $\mathcal{S}$ . Vogliamo dedurne la rappresentazione materiale; questa è il campo materiale che denotiamo con  $f_m = f_m(P_0, t)$ , definito in  $\mathcal{S}_0$ , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad f_m(P_0, t) = f(x(P_0, t), t).$$

Ciò che abbiamo visto per una grandezza scalare si estende a grandezze vettoriali e tensoriali.

E' facile dimostrare la seguente

**Proposizione 4.3.** *Dato un corpo continuo in moto, se  $f$  è un campo spaziale e  $g$  è un campo materiale, si ha:*

$$(f_m)_s = f \quad e \quad (g_s)_m = g.$$

Dimostrazione

Dimostriamo la prima relazione.

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad (f_m)_s(P, t) = f_m(x^{-1}(P, t), t).$$

D'altra parte, tenendo presente come si passa dalla rappresentazione spaziale a quella materiale, si ha:

$$f_m(x^{-1}(P, t), t) = f(x(x^{-1}(P, t), t), t) = f(P, t)$$

e quindi:

$$\forall(P, t) \in \mathcal{S} \quad (f_m)_s(P, t) = f(P, t)$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

In maniera analoga si procede per provare la seconda relazione.

**Definizione 4.21.** *Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze che intervengono sono rappresentate dal punto di vista materiale si dice che il moto è studiato dal punto di vista materiale (o lagrangiano).*

*Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze sono rappresentate dal punto di vista spaziale si dice che il moto è studiato dal punto di vista spaziale (o euleriano).*

Quando si studia il moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale si segue il moto di ogni particella, mentre quando lo si studia dal punto di vista spaziale si osserva come variano le grandezze legate al moto al trascorrere del tempo in punti fissati della regione dello spazio geometrico in cui il corpo si muove.

E' evidente che se si affrontano problemi tecnici ed ingegneristici si segue il punto di vista spaziale.

Tenendo presente la differenza tra i due punti di vista risultano naturali le due seguenti definizioni.

**Definizione 4.22.** *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale i tre tipi di equazioni che abbiamo già considerato in precedenza:*

$$\begin{aligned} P &= x(P_0, t) & \forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ P - O &= \vec{x}(P_0, t) & \forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ x_i &= x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \end{aligned}$$

**Definizione 4.23.** *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale i tre tipi seguenti di equazioni:*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}(P, t) & \forall(P, t) \in \mathcal{S} \\ \vec{v} &= \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) & \forall(x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}) \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall(x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Rileviamo che la (4.2.10)<sub>1</sub> fornisce il campo spaziale della velocità, cioè ci dice qual è la velocità all'istante  $t$  della particella che in tale istante occupa la posizione  $P$ , la (4.2.10)<sub>2</sub> ci dà la rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità ed infine le (4.2.10)<sub>3</sub> forniscono le componenti della rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità.

Vediamo ora come sia possibile passare dalle equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale e viceversa.

Consideriamo dapprima il passaggio dalle equazioni dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale.

Partiamo dall'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Se deriviamo rispetto al tempo il campo vettoriale  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ , otteniamo il campo materiale della velocità:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di questo possiamo poi dare la rappresentazione spaziale, così come abbiamo visto in precedenza:

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Potremmo anche partire dalle tre equazioni scalari:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \quad (4.2.11)$$

Derivando rispetto al tempo le tre funzioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ , otteniamo le tre componenti della rappresentazione analitica del campo materiale della velocità:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t).$$

D'altra parte, come sappiamo, invertendo le (4.2.11), possiamo ricavare le  $x_{0i}$  in funzione di  $x_1, x_2, x_3, t$  e sostituendo tali espressioni nelle  $\dot{x}_i$ , arriviamo alle equazioni:

$$\forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$$

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{x}_i(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t).$$

Mostriamo ora come sia possibile passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ .

Rivolgiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante  $t_0$  si trova in  $P_0$  e denotiamo con  $P(t)$  la posizione che tale particella occupa all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  per cui  $P(t) = x(P_0, t)$  e  $P(t_0) = P_0$ .

Essendo il moto descritto dal punto di vista spaziale, è noto il campo spaziale della velocità. Se allora la particella all'istante  $t$  si trova in  $P$ , la sua velocità,

data da  $\frac{dP}{dt}$ , è uguale a  $\vec{v}(P, t)$ .

Deduciamo perciò che la curva  $P(t)$  che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (4.2.12)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Il sistema è in forma normale e supponiamo che i secondi membri delle tre equazioni soddisfino alle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy relativo all'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora per risolvere il problema di Cauchy (4.2.13) ci procuriamo dapprima la soluzione generale del sistema che, come è noto, è una terna di funzioni che dipende da tre costanti arbitrarie  $C_1, C_2, C_3$ :

$$x_i = \hat{x}_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Determiniamo poi i valori che devono essere attribuiti alle tre costanti in modo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali; ovviamente tali valori dipendono dai dati iniziali  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ . Se nella soluzione generale sostituiamo alle tre costanti i valori trovati, otteniamo la soluzione cercata che risulta dipendere oltre che da  $t$  anche da  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4.2.14)$$

Le (4.2.14) sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale  $t_0$  occupa la posizione  $P_0$  avente come terna delle sue coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ . Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\xi(\mathcal{S}_0)$ , determiniamo le equazioni cartesiane del moto di tutte le particelle, ossia otteniamo le equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Consideriamo un campo materiale che per semplicità assumiamo scalare:

$$g = g(P_0, t)$$

definito in  $\mathcal{S}_0$  o in un suo sottoinsieme.

**Definizione 4.24.** Fissato  $P_0$  in  $S_0$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo istante  $t \in [t_0, t_1]$  esista la derivata di  $g$  fatta rispetto al tempo. Tale derivata prende il nome di derivata materiale fatta rispetto al tempo del campo materiale  $g$  in  $(P_0, t)$  e viene denotata nel modo seguente:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{g}(P_0, t).$$

Dunque la derivata materiale rispetto al tempo di  $g$  in  $(P_0, t)$  è la derivata rispetto al tempo del campo materiale calcolata all'istante  $t$  fissando la particella che occupa la posizione  $P_0$  nella configurazione di riferimento.

Se  $\dot{g}(P_0, t)$  è definita  $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  (oppure in un suo sottoinsieme), abbiamo un nuovo campo materiale scalare definito in  $\mathcal{S}_0$  (o in un suo sottoinsieme), il campo della derivata materiale di  $g$  fatta rispetto al tempo:

$$\dot{g} = \dot{g}(P_0, t).$$

**Definizione 4.25.** Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo  $P_0 \in S_0$  il campo  $g$  ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di gradiente materiale di  $g$  in  $(P_0, t)$  e viene denotato con  $\text{grad}_m g(P_0, t)$ .

Se il gradiente materiale di  $g$  esiste per ogni  $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo materiale vettoriale, il campo del gradiente materiale di  $g$ , cioè:

$$\text{grad}_m g = \text{grad}_m g(P_0, t).$$

Le due definizioni date per un campo scalare materiale sussistono ovviamente anche per campi vettoriali o tensoriali materiali.

A partire dal campo del gradiente materiale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicati a tale campo che vengono detti *operatori differenziali materiali*.

Ovviamente se il campo materiale è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate materiali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti materiali ed altri operatori differenziali materiali di ordine 2, 3, ...

Sia ora dato un campo spaziale, che per semplicità supponiamo scalare, definito in  $\mathcal{S}$  (oppure in un suo sottoinsieme):

$$f = f(P, t).$$

**Definizione 4.26.** Fissato  $P$  in  $S(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza dell'istante  $t$  esista la derivata di  $f$  rispetto al tempo. Tale derivata viene detta derivata locale di  $f$  fatta rispetto al tempo in  $(P, t)$  ed è denotata nel modo seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P, t) =: f'(P, t).$$

Tale derivata è detta locale perché è effettuata mettendosi in un punto fissato appartenente alla regione in cui si muove il corpo continuo senza tenere conto del fatto che al trascorrere del tempo tale punto è occupato da particelle diverse.

Se la derivata locale di  $f$  rispetto al tempo esiste per ogni  $(P, t) \in \mathcal{S}$  (o in suo sottoinsieme), è definito in  $\mathcal{S}$  (o in un suo sottoinsieme) un nuovo campo spaziale scalare, il campo della derivata locale di  $f$  fatta rispetto al tempo:

$$f' = f'(P, t).$$

**Definizione 4.27.** *Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , supponiamo che in corrispondenza di un certo  $P \in S$  il campo  $f$  ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di gradiente spaziale di  $f$  in  $(P, t)$  e viene denotato con  $\text{grad } f(P, t)$ .*

Se il gradiente spaziale di  $f$  esiste per ogni  $(P, t) \in \mathcal{S}$  (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo spaziale vettoriale, il campo del gradiente spaziale di  $f$ , cioè:

$$\text{grad } f = \text{grad } f(P, t).$$

Le definizioni date per un campo scalare spaziale si estendono ovviamente anche a campi vettoriali e tensoriali spaziali.

A partire dal campo del gradiente spaziale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale spaziale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicabili a tale campo che vengono detti *operatori differenziali spaziali*.

Ovviamente se il campo spaziale considerato è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate locali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti spaziali ed altri operatori differenziali spaziali di ordine 2, 3, ....

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 4.4.** *Dato un corpo continuo in moto regolare, il campo spaziale  $f = f(P, t)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  se e solo se la sua rappresentazione materiale  $f_m = f_m(P_0, t)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}_0$ .*

#### Dimostrazione

Dimostriamo dapprima la condizione necessaria.

Per ipotesi  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$  e dobbiamo provare che  $f_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ .

A tal fine consideriamo le rappresentazioni analitiche di  $f$  e  $f_m$  nel riferimento cartesiano ortonormale  $[O, (\vec{e}_i)]$  associato all'osservatore. Per dimostrare la tesi è sufficiente provare che  $f_m^o \in \mathcal{C}^1(\xi(\mathcal{S}_0))$ .

In primo luogo osserviamo che la rappresentazione analitica di  $f$ , cioè  $f^o = f^o(x_1, x_2, x_3, t)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\xi(\mathcal{S})$ .

D'altra parte, poiché

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad f_m(P_0, t) = f(x(P_0, t), t),$$

avremo:

$$\forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0)$$

$$f_m^o(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = f^o(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t).$$

Dunque  $f_m^o$  è una funzione composta ottenuta componendo  $f^o$  con le tre funzioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ . Per ipotesi  $f^o$  ha le derivate parziali prime continue in  $\xi(\mathcal{S})$  e le funzioni  $x_i$ , essendo il moto regolare, sono pure dotate di derivate prime continue in  $\xi(\mathcal{S}_0)$ . Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, deduciamo allora che  $f_m^o \in \mathcal{C}^1(\xi(\mathcal{S}_0))$  e che quindi  $f_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , come ci proponevamo di dimostrare.

Proviamo ora la condizione sufficiente.

Per ipotesi  $f_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$  e dobbiamo dimostrare che  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Consideriamo ancora le rappresentazioni analitiche di  $f$  e  $f_m$  e teniamo presente che per l'ipotesi che abbiamo assunto  $f_m^o \in \mathcal{C}^1(\xi(\mathcal{S}_0))$ .

D'altra parte, poiché

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad f(P, t) = f_m(x^{-1}(P, t), t),$$

avremo:

$$\forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$$

$$f^o(x_1, x_2, x_3, t) = f_m^o(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t).$$

Per ipotesi  $f_m^o$  ha le derivate parziali prime continue in  $\xi(\mathcal{S}_0)$  e le funzioni  $x_{0i}$ , essendo il moto regolare, sono pure dotate di derivate prime continue in  $\xi(\mathcal{S})$ . Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, deduciamo allora che  $f^o \in \mathcal{C}^1(\xi(\mathcal{S}))$  e che quindi  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , come ci proponevamo di dimostrare.

Ovviamente la proposizione sussiste sostituendo  $\mathcal{C}^1$  con  $\mathcal{C}^2$ , oppure  $\mathcal{S}$  con un suo sottoinsieme e  $\mathcal{S}_0$  con il sottoinsieme corrispondente. Inoltre la proposizione vale anche per campi vettoriali e tensoriali.

Noi abbiamo dato la definizione di derivata materiale rispetto al tempo per un campo materiale, ma in alcune situazioni può essere conveniente determinare la derivata rispetto al tempo di un campo spaziale non tenendo fissi i punti nella regione del moto, come avviene nella derivata locale rispetto al tempo, ma tenendo fisse le particelle, ossia seguendo ogni particella nel suo moto.

**Definizione 4.28.** *Dato il campo spaziale scalare  $f$ , definiamo derivata materiale di  $f$  rispetto al tempo nel modo seguente:*

$$\dot{f} = ((f_m)')_s.$$



Dunque, presi  $(P, t) \in \mathcal{S}$  e  $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  in modo tale che  $P_0 = x^{-1}(P, t)$ , abbiamo:

$$\dot{f}(P, t) = \left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)}.$$

Analoga definizione sussiste per un campo spaziale vettoriale o tensoriale.

**Proposizione 4.5.** *La derivata materiale rispetto al tempo commuta con la rappresentazione materiale e spaziale, ossia, dati il campo spaziale  $f$  e il campo materiale  $g$ , si ha:*

$$(\dot{f})_m = (f_m)^\cdot \quad (\dot{g})_s = (g_s)^\cdot.$$

Dimostrazione

Dimostriamo dapprima la relazione per un campo spaziale tenendo presente la definizione di derivata materiale di un campo spaziale rispetto al tempo e la proposizione 4.3:

$$(\dot{f})_m = (((f_m)^\cdot)_s)_m = (f_m)^\cdot.$$

La relazione per un campo materiale si deduce nel modo seguente partendo dal secondo membro:

$$(g_s)^\cdot = (((g_s)_m)^\cdot)_s = (\dot{g})_s.$$

Grazie alla proposizione dimostrata sopra, possiamo scrivere semplicemente

$$\dot{f}_m := (\dot{f})_m = (f_m)^\cdot,$$

$$\dot{g}_s := (\dot{g})_s = (g_s)^\cdot.$$

Stabiliamo ora il legame che sussiste tra derivata materiale e derivata locale rispetto al tempo per campi spaziali sufficientemente regolari.

**Proposizione 4.6.** *Dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo spaziale scalare  $f$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  (o in un sottoinsieme di  $\mathcal{S}$ ), si ha:*  
 $\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{f}(P, t) = f'(P, t) + \text{grad } f(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Dimostrazione

Per definizione di derivata materiale di un campo spaziale rispetto al tempo, possiamo scrivere:

$\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{f}(P, t) = \left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)}.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) = \frac{\partial f_m^o}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t),$$

essendo  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  la successione delle coordinate di  $P_0$ .

Ma, come abbiamo già osservato nella dimostrazione di una precedente proposizione,:

$$\forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0)$$

$$f_m^o(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = f^o(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t).$$

Dunque  $f_m^o$  si ottiene componendo la funzione  $f^o$  con le funzioni  $x_i$ .

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte tenendo presente che c'è dipendenza dal tempo sia direttamente sia tramite le funzioni  $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) &= \frac{\partial f_m^o}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \\ &= \frac{\partial f^o}{\partial t}(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f^o}{\partial x_i}(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) \frac{\partial x_i}{\partial t}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(x(P_0, t), t) + \text{grad } f(x(P_0, t), t) \cdot \dot{\vec{x}}(P_0, t) = \\ &= f'(x(P_0, t), t) + \text{grad } f(x(P_0, t), t) \cdot \dot{\vec{x}}(P_0, t). \end{aligned}$$

Allora

$$\left[ \frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)} = f'(P, t) + \text{grad } f(P, t) \cdot \vec{v}(P, t)$$

e dunque la proposizione è dimostrata.

**Osservazione 4.8.** Procedendo per componenti si dimostra che la relazione della proposizione precedente vale anche per campi vettoriali e tensoriali.

In particolare, dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo spaziale vettoriale  $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $\mathcal{S}$  (o in un sottoinsieme di  $\mathcal{S}$ ), si ha:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \text{ (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)}$$

$$\dot{\vec{u}}(P, t) = \vec{u}'(P, t) + \text{grad } \vec{u}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

In componenti la relazione scritta sopra fornisce:

$$\dot{u}_i = u'_i + u_{i,j} v_j.$$

Introduciamo ora una nuova definizione.

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

**Definizione 4.29.** *Definiamo accelerazione all'istante  $t$  della particella  $X$  del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$  la derivata seconda rispetto al tempo del campo vettoriale  $\vec{x}$  in  $(P_0, t)$ :*

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}(P_0, t) =: \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ , è definita l'accelerazione di ogni particella ad ogni istante appartenente all'intervallo di moto.

Resta così definito in  $\mathcal{S}_0$  il campo materiale:

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di tale campo possiamo dare la rappresentazione spaziale che denotiamo con  $\vec{a} = \vec{a}(P, t)$ . Precisamente si ha:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \ddot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t).$$

Dunque:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})\dot{\cdot})_s.$$

Ma poichè la rappresentazione spaziale commuta con la derivata materiale, deduciamo:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})\dot{\cdot})_s = ((\dot{\vec{x}}_s)\dot{\cdot}) = \dot{\vec{v}}.$$

L'accelerazione spaziale perciò coincide con la derivata materiale della velocità spaziale e di conseguenza è esprimibile nella forma:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \vec{v}'(P, t) + \text{grad } \vec{v}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Enunciamo, senza dimostrarlo, un teorema che utilizzeremo spesso, il **teorema del trasporto**.

**Teorema 4.3.** *Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $f = f(P, t)$  una campo spaziale scalare di classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Allora per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , indicata con  $S^*(t)$  la regione occupata da  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \left[ \dot{f}(P, t) + f(P, t) \text{div } \vec{v}(P, t) \right] dS.$$

Il teorema sussiste anche per campi spaziali vettoriali e tensoriali.

Stabiliamo ora un lemma che, come vedremo, giocherà un ruolo importante nel seguito.

**Lemma 4.1.** *Sia  $f = f(P)$  un campo scalare continuo in un aperto  $S$  dello spazio geometrico. Se*

$$\int_A f(P) dS = 0 \quad \forall A \text{ sottoinsieme aperto di } S,$$

allora

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in S.$$

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che  $\exists \bar{P} \in S$  tale che  $f(\bar{P}) \neq 0$ . Assumiamo, ad esempio,  $f(\bar{P}) > 0$ .

Essendo il campo  $f$  continuo in  $S$ , per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno  $U(\bar{P})$  di  $\bar{P}$  tale che

$$\forall P \in U(\bar{P}) \text{ si ha } f(P) > 0.$$

Ma allora

$$\int_{U(\bar{P})} f(P) dS > 0$$

che è in contraddizione con l'ipotesi cui soddisfa il campo  $f$ .

Dunque  $f(P) = 0 \quad \forall P \in S$  c.v.d.

Il lemma sussiste anche se si considera un campo vettoriale o tensoriale oppure se  $S$  è la chiusura di un aperto e sono nulli tutti gli integrali del campo preso in considerazione estesi a tutti i sottoinsiemi di  $S$  chiusura di un aperto.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di moto incompressibile.

**Definizione 4.30.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $\mathcal{C}^*$  un suo qualsiasi sottocorpo occupante all'istante  $t$  la regione  $S^*(t)$  di volume  $V^*(t) = \int_{S^*(t)} dS$ . Diciamo che in  $[t_0, t_1]$  il moto di  $\mathcal{C}$  è incompressibile se  $\forall \mathcal{C}^*$  si ha:*

$$V^*(t) = \text{costante} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Perciò in un moto incompressibile, al trascorrere del tempo, può cambiare la forma della regione occupata da ogni sottocorpo, ma non ne cambia il volume.

**Definizione 4.31.** Diciamo che un corpo continuo è *incomprimibile* se gli sono consentiti solo moti *incomprimibili*.

E' evidente che ogni corpo continuo rigido è incomprimibile.

Determiniamo la condizione di incomprimibilità per il moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale.

**Teorema 4.4.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto regolare di un corpo continuo sia incomprimibile nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  è che:*

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dimostrazione

Dimostriamo la condizione necessaria. Per ipotesi il moto è incomprimibile e dobbiamo mostrare che  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  in  $\mathcal{S}$ .

Per definizione di moto incomprimibile, abbiamo che

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{dV^*}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ossia

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Grazie al teorema del trasporto possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS$$

e quindi:

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$  si ha:

$$\int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS = 0 \quad \forall S^*(t), \text{ chiusura di un aperto } \subset S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Ma, essendo il moto regolare,

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \operatorname{div} \vec{v} \in \mathcal{C}(S(t)),$$

poiché  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Allora, sfruttando il lemma 4.1, concludiamo che

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{ossia in } \mathcal{S},$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Per quanto riguarda la dimostrazione della condizione sufficiente basta ripercorrere il cammino inverso tenendo presente che per ipotesi

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e che dobbiamo provare che il moto del corpo continuo è incomprimibile.

**Definizione 4.32.** *Un campo vettoriale a divergenza nulla in una regione  $S$  è detto solenoidale in  $S$ .*

Dunque se un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , il campo spaziale della velocità è solenoidale in  $S(t)$  per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ .

### 4.3 Cinetica dei corpi continui

Nello studio della cinematica non abbiamo fatto intervenire la distribuzione di massa che, per definizione, è associata ad ogni corpo continuo.

Nella cinetica la distribuzione di massa svolge invece un ruolo importante.

In primo luogo facciamo un'ipotesi di notevole rilevanza sulla distribuzione di massa.

Sia  $\mathcal{C}$  un corpo continuo e sia  $\mathcal{A}$  la sua  $\sigma$ -algebra di Borel su cui è definita la distribuzione di massa  $m$ .

Richiediamo che  $m$  goda della seguente proprietà.

**Ipotesi 4.1.** *In corrispondenza di ogni possibile configurazione di  $\mathcal{C}$  esiste un campo scalare dipendente da  $\varphi$ :  $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$  definito in  $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$ , strettamente positivo e integrabile secondo Lebesgue in  $S_\varphi$  tale che:*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad m(A) = \int_{\varphi(A)} \rho_\varphi(P) dS.$$

**Definizione 4.33.** *Il campo scalare  $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$  è detto densità di massa del corpo continuo nella configurazione  $\varphi$ .*

**Osservazione 4.9.** Mettiamo in evidenza che, mentre la distribuzione di massa  $m$  è indipendente dalle configurazioni possibili del corpo continuo, la densità di massa dipende dalla particolare configurazione considerata.

Suuponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Il moto di  $\mathcal{C}$  è una famiglia di configurazioni  $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ . In

corrispondenza di ogni configurazione  $\varphi_t$  con  $t \in [t_0, t_1]$  è definita la densità di massa:

$$\rho_{\varphi_t} = \rho_{\varphi_t}(P) \quad \forall P \in S(t).$$

Poniamo:

$$\rho_{\varphi_t}(P) =: \rho(P, t) \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Resta così definito in  $\mathcal{S}$  il campo spaziale  $\rho = \rho(P, t)$ , detto *campo spaziale della densità di massa del corpo continuo*.

Su tale campo facciamo la seguente ipotesi di regolarità:  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Ovviamente del campo spaziale della densità di massa possiamo anche dare la rappresentazione materiale  $\rho_m = \rho_m(P_0, t)$ , definita in  $\mathcal{S}_0$  nel modo seguente:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \rho_m(P_0, t) = \rho(x(P_0, t), t).$$

Notiamo che per la proposizione 4.4, essendo per ipotesi  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , si deduce  $\rho_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ .

Ci proponiamo ora di dedurre dal punto di vista spaziale l'equazione nota come equazione di continuità della massa, equazione che traduce in forma locale il fatto che la distribuzione di massa è indipendente dalle configurazioni del corpo continuo e quindi da ogni suo moto.

Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e consideriamo un suo qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ . Indichiamo con  $S^*(t)$  la regione occupata da  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  durante il moto.

Per quanto visto prima:

$$m(\mathcal{C}^*) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Poiché la massa di  $\mathcal{C}^*$  non varia al trascorrere del tempo, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applicando il teorema del trasporto, otteniamo:

$$\int_{S^*(t)} [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v}] dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4.3.1)$$

Ma per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , deduciamo che la relazione (4.3.1) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un aperto contenuto in  $S(t)$  qualunque sia  $t$  in  $[t_0, t_1]$ . D'altra parte il campo che appare sotto integrale nella (4.3.1) è continuo in  $S(t)$  per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ . Allora per il lemma 4.1 concludiamo che

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (4.3.2)$$

La (4.3.2) è detta **equazione di continuità della massa** dal punto di vista spaziale.

Tale equazione si può scrivere anche in un'altra forma.

Infatti se esplicitiamo la derivata materiale di  $\rho$  rispetto al tempo, la (4.3.2) diviene:

$$\rho' + \text{grad } \rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Per una proprietà della divergenza otteniamo:

$$\rho' + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

**Osservazione 4.10.** Se il moto del corpo continuo è incomprimibile, abbiamo:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque dall'equazione di continuità (4.3.2) deduciamo:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

**Corollario 4.1. (del teorema del trasporto)** Dato il corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sia  $f$  un campo spaziale scalare  $\in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Allora, preso un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  occupante all'istante  $t$  la regione  $S^*(t)$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \dot{f}(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4.3.3)$$

Dimostrazione

Per il teorema del trasporto, preso un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho f dS &= \int_{S^*(t)} \left[ \dot{\rho} f + \rho \dot{f} + \rho f \text{div } \vec{v} \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{f} + f(\dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v}) \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \dot{f} dS, \end{aligned}$$

dove abbiamo ommesso sotto integrale la dipendenza da  $P$  e da  $t$  e nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'equazione di continuità della massa.

Nell'ambito della cinetica definiamo ora le principali grandezze cinetiche che useremo in dinamica nello studio del moto di un corpo continuo.

Supponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .



**Definizione 4.34.** *Definiamo quantità di moto all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  la grandezza vettoriale data da:*

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (4.3.4)$$

Analoga definizione sussiste per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$ :

$$\vec{Q}(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (4.3.5)$$

**Definizione 4.35.** *Il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo  $O \in \mathcal{E}$  per un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è così definito:*

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

Analogamente per l'intero corpo il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo  $O$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è dato da

$$\vec{K}_O(t) = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

**Definizione 4.36.** *Definiamo energia cinetica all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  la grandezza scalare data da:*

$$T^*(t) = \frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (4.3.6)$$

Analoga definizione sussiste per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$ :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (4.3.7)$$

Infine concludiamo il paragrafo esaminando i possibili sistemi di forze che assumeremo applicati ad un generico corpo continuo.

A tal fine supporremo di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano in qualsiasi configurazione possibile solo regioni che siano la chiusura di domini regolari.

In primo luogo assumeremo che sul corpo continuo  $\mathcal{C}$  agiscano soltanto due tipi di forze:

- forze di massa
- forze di contatto.

Più precisamente sui sistemi di forze agenti sul corpo continuo  $\mathcal{C}$  faremo alcune ipotesi.

**Ipotesi 4.2.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  il campo  $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$ , detto densità delle forze esterne di massa. Noi assumeremo  $\vec{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ .

**Definizione 4.37.** Per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  chiamiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne di massa agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ , i seguenti integrali:

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS,$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS.$$

Analoghe definizioni si danno per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ ; in tal caso gli integrali sono estesi a  $S(t)$ .

Un esempio di forze esterne di massa agenti su un corpo continuo è costituito dalle forze peso per le quali la densità  $\vec{F}$  è data da  $\vec{g}$ , accelerazione di gravità.

**Ipotesi 4.3.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , sia associato un campo vettoriale  $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$ ,  $P \in \partial S^*(t)$ , detto densità delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ . Supponiamo  $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$  continuo per  $P \in \partial S^*(t)$  e  $t \in [t_0, t_1]$ .

Si suppone che anche a  $\mathcal{C}$  sia associata la densità delle forze esterne di contatto.

**Definizione 4.38.** Chiamiamo risultante delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

Il momento risultante delle forze esterne di contatto rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è dato da:

$$\int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

E' immediato estendere le due definizioni date sopra a tutto il corpo.

Vediamo di interpretare fisicamente risultante e momento risultante delle forze di contatto.

Consideriamo dapprima l'intero corpo  $\mathcal{C}$ . Risultante risultante e momento risultante delle forze di contatto agenti su  $\mathcal{C}$  rappresentano l'azione esercitata dall'ambiente esterno sul corpo reale che schematizziamo con  $\mathcal{C}$  attraverso la frontiera della regione che il corpo occupa nello spazio istante per istante.

Consideriamo ora un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Risultante e momento risultante rappresentano l'azione che la porzione restante del corpo esercita su  $\mathcal{C}^*$  attraverso la frontiera della regione che questo occupa istante per istante.

Consideriamo infine un sottocorpo  $\bar{\mathcal{C}}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \partial_1 S^*(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Poniamo:

$$\partial_2 S^*(t) := \partial S^*(t) \setminus \partial_1 S^*(t).$$

Allora:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma = \int_{\partial_1 S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma + \int_{\partial_2 S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma &= \int_{\partial_1 S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma + \\ &+ \int_{\partial_2 S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma. \end{aligned}$$

Gli integrali estesi a  $\partial_2 S^*(t)$  rappresentano l'azione che la porzione restante del corpo esercita su  $\mathcal{C}^*$  attraverso la parte  $\partial_2 S^*(t)$  della frontiera della regione che  $\mathcal{C}^*$  occupa istante per istante.

Gli integrali estesi a  $\partial_1 S^*(t)$  rappresentano l'azione che l'ambiente esterno esercita su  $\mathcal{C}^*$  attraverso la parte  $\partial_1 S^*(t)$  della frontiera della regione che  $\mathcal{C}^*$  occupa istante per istante.

**Ipotesi 4.4.** *Supponiamo che non siano distribuite nel corpo continuo delle coppie di massa o di contatto.*

I corpi per i quali sussiste tale proprietà sono detti *corpi continui non polari*, mentre quelli nei quali sono presenti delle coppie sono detti *corpi continui polari*. Noi ci limiteremo a prendere in considerazione solo corpi non polari.

Tenendo presente l'ipotesi 4.4, possiamo dare le seguenti definizioni:

**Definizione 4.39.** *Definiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo  $O$  delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  i due integrali seguenti:*

$$\begin{aligned}\vec{R}^*(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma. \\ \vec{\Omega}_O^*(t) &= \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.\end{aligned}$$

Analoghe definizioni valgono per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

**Osservazione 4.11.** La presenza di coppie nei corpi continui polari ovviamente non dà contributo al risultante delle forze esterne, ma solo al momento risultante. Il termine aggiuntivo nel momento risultante delle forze esterne dovuto alle coppie comporta, tra l'altro, per i continui polari la non simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy, tensore che introdurremo tra breve.

Supponiamo che valga il seguente **assioma degli sforzi**.

**Ipotesi 4.5.** *Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  esiste un campo vettoriale dipendente da  $t$   $\vec{T} = \vec{T}(P, t, \vec{u})$ , definito per  $P \in S(t)$ ,  $\vec{u}$  versore arbitrario, tale che per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  risulti:*

$$\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) = \vec{T}(P, t, \vec{n}),$$

dove  $P \in \partial S^*(t)$ ,  $\vec{n}$  è il versore normale a  $\partial S^*(t)$ , rivolto verso l'esterno di  $S^*(t)$ .

Si assume  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  continuo rispetto ad ogni suo argomento ed inoltre si suppone che fissati  $t$  ed  $\vec{u}$  ad arbitrio, il campo  $\vec{T}(\cdot, t, \vec{u}) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

**Definizione 4.40.**  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è detto sforzo specifico relativo a  $P$  e a  $t$ , e coordinato alla direzione orientata di versore  $\vec{u}$ . Inoltre  $\vec{T}(P, t, \vec{n})$ , con  $P \in \partial S(t)$  ed  $\vec{n}$  il versore normale a  $\partial S(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S(t)$ , è detto trazione superficiale e viene denotato con  $\vec{f}(P, t)$ .

**Definizione 4.41.** Se lo sforzo specifico  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è parallelo a  $\vec{u}$ , si dice che è uno sforzo normale; in particolare uno sforzo normale è detto pressione se ha il verso opposto di  $\vec{u}$ , tensione se ne ha lo stesso verso.

Se lo sforzo specifico  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è normale a  $\vec{u}$ , si dice che è uno sforzo di taglio.

In generale un qualsiasi sforzo specifico può sempre essere decomposto nella somma di uno sforzo normale e di uno sforzo di taglio.

## 4.4 Dinamica dei corpi continui

Com'è noto, la meccanica dei corpi continui è governata dalle due *equazioni cardinali*, che vengono assunte come assiomi.

Richiamiamo tali equazioni.

**Ipotesi 4.6.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , sussistono le due equazioni seguenti:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}}{dt}(t) = \vec{R}(t) \quad (4.4.1)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O(t) \quad (4.4.2)$$

con  $O$  punto fisso dello spazio geometrico.

La (4.4.1) è nota come **I equazione cardinale**, la (4.4.2) come **II equazione cardinale**.

Le due equazioni cardinali sussistono anche per qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$ , dal momento che ogni sottocorpo di un corpo continuo è a sua volta un corpo continuo. In tal caso scriveremo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \vec{R}^*(t) \quad (4.4.3)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O^*(t). \quad (4.4.4)$$

Vediamo ora quale forma specifica assumono le equazioni (4.4.3), (4.4.4) e le equazioni (4.4.1), (4.4.2) tenendo conto delle definizioni introdotte precedentemente.

Consideriamo un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo  $\mathcal{C}$ . Rivilgiamo la nostra attenzione dapprima alla (4.4.3). Per definizione di quantità di moto

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS$$

ed applicando il corollario 4.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS.$$

D'altra parte:

$$\vec{R}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma.$$

Dunque la (4.4.3) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (4.4.5)$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  la I equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma. \quad (4.4.6)$$

Consideriamo ora la (4.4.4). Per definizione di momento delle quantità di moto

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{v} dS = \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] dS$$

ed applicando il corollario 4.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] \cdot dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \left[ (P - O) \cdot \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS. \end{aligned}$$

D'altra parte, se  $P$  è la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ , abbiamo

$$P - O = \vec{x}(P_0, t)$$

per cui il campo vettoriale  $P - O$  definito in  $S(t)$  con  $t$  che varia in  $[t_0, t_1]$  è la rappresentazione spaziale del campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$  definito in  $\mathcal{S}_0$ . Allora

$$(P - O) \cdot = (\dot{\vec{x}})_s = \dot{\vec{v}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \left[ \dot{\vec{v}} \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho (P - O) \times \dot{\vec{v}} dS. \end{aligned}$$

Se poi teniamo presente che:

$$\vec{\Omega}_0^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma,$$

otteniamo che la (4.4.4) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (4.4.7)$$

Per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$  la II equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \quad (4.4.8)$$

Se in  $[t_0, t_1]$  il corpo continuo è in quiete, allora  $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ , dove  $S$  è una regione fissa dello spazio ed inoltre  $\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}} = \vec{0}$  in  $S \times [t_0, t_1]$ , per cui le due equazioni cardinali per tutto il corpo si riducono a:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} \vec{f} d\Sigma, \\ \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \end{aligned}$$

Tali equazioni sono dette *Equazioni cardinali della statica per un corpo continuo* e si possono scrivere anche per ogni sottocorpo.

Utilizzando la I equazione cardinale e scegliendo opportuni sottocorpi si potrebbe dimostrare il seguente

**Teorema 4.5. Teorema di Cauchy sugli sforzi** Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , per ogni  $P \in S(t)$ , per ogni versore  $\vec{u}$ , si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u},$$

dove  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è un campo tensoriale del secondo ordine, detto  *tensore degli sforzi di Cauchy*.

#### Dimostrazione

La dimostrazione di tale teorema si svolge in due fasi: nella prima fase si deduce la cosiddetta **formula di Cauchy**, nella seconda fase si perviene alla tesi del teorema partendo dalla formula di Cauchy.

Noi omettiamo la prima fase, per cui ci limitiamo ad enunciare la formula di

Cauchy senza fornirne la dimostrazione:

fissata una qualsiasi base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , si ha

$\forall t \in [t_0, t_1], \forall P \in S(t), \forall \vec{u}$  versore

$$\vec{T}(P, t \vec{u}) = \vec{T}_j(P, t) u_j,$$

dove

$$\vec{T}_j(P, t) = \vec{T}(P, t \vec{e}_j),$$

$u_j =$  componente di  $\vec{u}$  rispetto ad  $\vec{e}_j$ .

Dimostriamo ora come si deduce dalla formula di Cauchy la tesi del teorema.

Fissiamo  $t \in [t_0, t_1], P \in S(t)$  ed omettiamo per brevità la dipendenza da  $P$  e  $t$ .

Dunque scriveremo la formula di Cauchy nella forma:

$$\vec{T}(\vec{u}) = \vec{T}_j u_j, \quad \text{con } \vec{T}_j = \vec{T}(\vec{e}_j).$$

Denotiamo con  $T_{ij}$  la componente di  $\vec{T}_j$  rispetto ad  $\vec{e}_i$ .

Ci proponiamo dapprima di dimostrare che la successione doppia di scalari  $(T_{ij})$  ha carattere tensoriale.

In primo luogo osserviamo che l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) & \longmapsto & (T_{ij}) \end{array}$$

è un sistema doppio di componenti su  $\vec{\mathcal{E}}$ . Infatti ad ogni base  $(\vec{e}_i)$  l'applicazione fa corrispondere una successione doppia di scalari il cui termine generale  $T_{ij}$ , per come è stato definito, è associato alla coppia ordinata di vettori di base  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ . Vogliamo mostrare che tale sistema doppio di componenti ha carattere tensoriale, ossia che se  $(T_{ij})$  è la successione associata alla base  $(\vec{e}_i)$  e  $(\bar{T}_{hk})$  è la successione associata alla base  $(\vec{e}_h)$ , allora si ha:

$$\bar{T}_{hk} = \alpha_{ih} \alpha_{jk} T_{ij},$$

con  $\alpha_{ih} =$  componente di  $\vec{e}_h$  rispetto ad  $\vec{e}_i$ .

Infatti per la formula di Cauchy (con  $\vec{u} = \vec{e}_h$ ) abbiamo:

$$\vec{T}_k = \vec{T}(\vec{e}_k) = \vec{T}_j \alpha_{jk}$$

per cui

$$\bar{T}_{hk} = \vec{T}_k \cdot \vec{e}_h = \alpha_{jk} \vec{T}_j \cdot \alpha_{ih} \vec{e}_i = \alpha_{ih} \alpha_{jk} T_{ij},$$

come volevamo dimostrare.

Deduciamo ora la tesi del teorema di Cauchy.



Poiché il sistema doppio che alla base  $(\vec{e}_i)$  associa la successione  $(T_{ij})$  ha carattere tensoriale, individua un tensore doppio  $\tilde{T}$  che dipende da  $P \in S(t)$  e da  $t \in [t_0, t_1]$ . Dunque in  $\mathcal{S}$  risulta definito un campo tensoriale di ordine 2 dipendente da  $t$ :  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$ , rappresentato in ambito spaziale, detto *tensore degli sforzi di Cauchy*.

D'altra parte, se scriviamo la formula di Cauchy in componenti, abbiamo:

$$T_i(P, t \vec{u}) = T_{ij}(P, t) u_j$$

da cui

$$\forall t \in [t_0, t_1], \forall P \in S(t), \forall \vec{u} \text{ versore} \quad \vec{T}(P, t \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u}.$$

La dimostrazione del teorema di Cauchy è così completata.

**Osservazione 4.12.** Tenendo presenti le ipotesi di regolarità imposte allo sforzo specifico, si deduce che  $\tilde{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  e che inoltre  $\forall t \in [t_0, t_1] \tilde{T}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

Come abbiamo visto, le due equazioni cardinali sono equazioni scritte in forma globale; da queste ci proponiamo ora di dedurre due equazioni che traducono in forma locale le equazioni cardinali, cioè equazioni che devono essere soddisfatte in ogni punto di  $S(t)$  ed in ogni istante  $t \in [t_0, t_1]$ . Tali equazioni sono dette I e II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui. Noi otterremo le due equazioni rimanendo in ambito spaziale.

Deduciamo dapprima la I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Consideriamo un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e scriviamo la I equazione cardinale per un suo sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il teorema di Cauchy.

D'altra parte, poiché abbiamo supposto di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano la chiusura di domini regolari, grazie anche alle proprietà di regolarità del tensore degli sforzi di Cauchy, all'integrale di superficie della (4.4.9) possiamo applicare il teorema della divergenza che ci fornisce:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \tilde{T} dS.$$

Ovviamente la divergenza di  $\tilde{T}$  nell'integrale di volume scritto sopra è il campo vettoriale che si ottiene contraendo il secondo indice di  $\tilde{T}$  e l'indice di derivazione. Sostituendo nella (4.4.9) e portando tutto al primo membro sotto un unico segno di integrale, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} [\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T}] dS = \vec{0}. \quad (4.4.10)$$

Ma per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , la (4.4.10) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un domino regolare contenuto in  $S(t)$  ed inoltre

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \in \mathcal{C}(S(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applichiamo allora il lemma 4.1, tenendo presente che questo continua a sussistere se supponiamo che l'insieme  $S$  e i suoi sottoinsiemi arbitrari che intervengono nel lemma siano la chiusura di domini regolari.

Così, grazie all'arbitrarietà di  $t$  in  $[t_0, t_1]$  e di  $S^*(t)$ , abbiamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \text{ ossia in } \mathcal{S}. \quad (4.4.11)$$

La (4.4.11) è la **I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Deduciamo ora la II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

A tal fine consideriamo la II equazione cardinale per un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo  $\mathcal{C}$  dopo aver applicato la formula di Cauchy:

$\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (4.4.12)$$

Scriviamo l'integrale di superficie a secondo membro di tale equazione in componenti supponendo di associare all'osservatore rispetto al quale si studia il moto un riferimento cartesiano ortonormale con origine in  $O$ :

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma \right]_i &= \int_{\partial S^*(t)} \vartheta_{ilp} x_l T_{pj} n_j d\Sigma \\ &= \int_{S^*(t)} (\vartheta_{ilp} x_l T_{pj} n_j)_{,j} dS, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato le formule integrali di Gauss-Ostrogradski.

Tenendo poi presente che le componenti del tensore di Ricci  $\tilde{\vartheta}$  sono costanti, otteniamo:

$$\left[ \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma \right]_i = \int_{S^*(t)} (\vartheta_{ilp} x_{l,j} T_{pj} n_j + \vartheta_{ilp} x_l T_{pj,j}) dS.$$

D'altra parte,  $x_{l,j} = \delta_{lj}$  per cui nell'integrale a secondo membro dell'equazione scritta sopra della somma su  $l$  resta solo il termine con  $l = j$  e l'equazione assume la forma:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma \right]_i &= \int_{S^*(t)} \left[ (\vartheta_{ijp} T_{pj} + \vartheta_{ilp} x_l (\operatorname{div} \tilde{T})_p \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \left\{ (\tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t)_i + [(P - O) \times \operatorname{div} \tilde{T}]_i \right\} dS. \end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere:

$$\int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma = \int_{S^*(t)} \left[ \tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t + (P - O) \times \operatorname{div} \tilde{T} \right] dS. \quad (4.4.13)$$

Sostituendo la (4.4.13) nella (4.4.12) e portando tutto al primo membro sotto un unico segno di integrale, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[ (P - O) \times \left( \rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \right) - \tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t \right] dS = \vec{0}. \quad (4.4.14)$$

Ma il termine nelle parentesi tonde è il primo membro della I equazione indefinita e dunque è nullo in  $S^*(t) \forall t \in [t_0, t_1]$  e la (4.4.14) si riduce a:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t dS = \vec{0}. \quad (4.4.15)$$

D'altra parte, per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , la (4.4.15) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un domino regolare contenuto in  $S(t)$  ed inoltre il campo vettoriale sotto integrale è continuo in  $S(t)$  per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ . Grazie al lemma 4.1 deduciamo:

$$\tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t dS = \vec{0} \quad \text{in } S(t) \forall t \in [t_0, t_1], \text{ ossia in } \mathcal{S}. \quad (4.4.16)$$

La (4.4.16) è la **II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Come ora mostriamo, da questa equazione discende la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

**Teorema 4.6.** *In un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  il tensore degli sforzi di Cauchy è simmetrico, ossia*

$$\tilde{T}(P, t) = \tilde{T}^t(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Dimostrazione

Se scriviamo in componenti la II equazione indefinita (4.4.16) abbiamo:

$$\vartheta_{ijr} T_{rj} = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Per  $i = 1$ , otteniamo:

$$\vartheta_{1jr} T_{rj} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ma  $\vartheta_{1jr} = \epsilon_{1jr}$  e per la definizione di alternatore a tre indici, discende:

$$\epsilon_{123} T_{32} + \epsilon_{132} T_{23} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

ossia:

$$T_{32} = T_{23} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Considerando poi  $i = 2$  e  $i = 3$ , si ottiene :

$$T_{31} = T_{13}, \quad T_{12} = T_{21} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dunque

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e il teorema risulta così dimostrato.

A questo punto introduciamo alcune definizioni che sono un'indispensabile premessa al teorema dell'energia cinetica che dimostreremo subito dopo.

**Definizione 4.42.** *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo potenza delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:*

$$\Pi_e^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

*La potenza delle forze esterne agenti su tutto il corpo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è la grandezza scalare:*

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

**Definizione 4.43.** *Dato un intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ , chiamiamo lavoro delle forze esterne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  la seguente grandezza scalare:*

$$L_{e, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_e^*(t) \, dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

Come sappiamo, in un moto regolare  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ ; è quindi possibile dare la seguente definizione.

**Definizione 4.44.** Prende il nome di *tensore di velocità di deformazione il campo tensoriale dipendente da  $t$ , rappresentato in ambito spaziale,  $\tilde{D} = \tilde{D}(P, t)$ , così definito:*

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \tilde{D}(P, t) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{v}(P, t) + \text{grad}^t \vec{v}(P, t)].$$

Si potrebbe facilmente dimostrare la seguente proposizione:

**Proposizione 4.7.** *Se un corpo continuo  $\mathcal{C}$  ad un dato istante  $t$  possiede un atto di moto rigido, ossia se il campo spaziale della velocità di  $\mathcal{C}$  in tale istante è della forma:*

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\bar{O}, t) + \omega(t) \times (P - \bar{O}) \quad \forall P \in S(t)$$

con  $\bar{O}$  punto fissato arbitrariamente in  $S(t)$ , allora

$$\tilde{D}(P, t) = \tilde{0} \quad \forall P \in S(t).$$

**Definizione 4.45.** *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo potenza delle forze interne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:*

$$\Pi_i^*(t) = - \int_{S^*(t)} \tilde{T}(P, t) \cdot \tilde{D}(P, t) dS = - \int_{S^*(t)} T_{ij}(P, t) D_{ij}(P, t) dS.$$

La definizione si estende immediatamente a tutto il corpo.

**Definizione 4.46.** *Dato un intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ , chiamiamo lavoro delle forze interne agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  la seguente grandezza scalare:*

$$L_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_i^*(t) dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

**Osservazione 4.13.** La definizione data sopra è conforme al risultato, noto dal corso di Modelli della Fisica Matematica, che ogni sistema di forze interne agenti su un corpo rigido ha potenza nulla ad ogni istante. Infatti, se il corpo

continuo in un dato intervallo di tempo, si muove di moto rigido, ad ogni istante la potenza delle forze interne agenti sul corpo e su ogni suo sottocorpo è nulla poiché, per la proposizione 4.7, ad ogni istante il tensore di velocità di deformazione è nullo nella regione occupata dal corpo.

Possiamo ora dimostrare il teorema dell'energia cinetica.

**Teorema 4.7. Teorema dell'energia cinetica** *Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t). \quad (4.4.17)$$

Dimostrazione

Il teorema è conseguenza della I equazione indefinita:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Fissiamo  $t$  nell'intervallo di moto  $[t_0, t_1]$  e moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della I equazione indefinita relativa a  $(P, t)$  con  $P \in S(t)$  per  $\vec{v}(P, t)$ , integrando poi su  $S(t)$  l'equazione scalare risultante. Otteniamo così:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS. \quad (4.4.18)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS &= \int_{S(t)} \rho \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right)' dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} dS = \frac{dT}{dt}(t), \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

avendo applicato il corollario del teorema del trasporto.

Ricordiamo poi che per definizione:

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

con  $\vec{f}(\cdot, t) = \vec{T}(\cdot, t, \vec{n})|_{\partial S(t)}$ .

Dunque al II membro della (4.4.18) compare il termine di  $\Pi_e(t)$  rappresentato dall'integrale di volume.

Vediamo ora di operare opportunamente sul secondo integrale al II membro della

(4.4.18). Precisamente consideriamone la funzione integranda e scriviamola in un modo più conveniente esprimendola in componenti:

$$\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} = T_{ij,j} v_i = (T_{ij} v_i)_{,j} - T_{ij} v_{i,j}.$$

Allora

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} (T_{ij} v_i)_{,j} dS - \int_{S(t)} T_{ij} v_{i,j} dS.$$

Applicando al primo integrale a secondo membro le formule integrali di Gauss-Ostrogradski, si ottiene:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} T_{ij} v_i n_j d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} dS.$$

D'altra parte, su  $\partial S(t)$ , per la formula di Cauchy:

$$T_{ij} n_j = T_i(\vec{n}) = f_i$$

per cui:

$$\int_{\partial S(t)} T_{ij} v_i n_j d\Sigma = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma.$$

Inoltre, essendo  $\operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{D} + \tilde{E}$  dove  $\tilde{E}$  è la parte emisimmetrica di  $\operatorname{grad} \vec{v}$ , si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \tilde{T} \cdot \tilde{E} = \tilde{T} \cdot \tilde{D},$$

poiché  $\tilde{T} \cdot \tilde{E} = 0$  a causa della contrazione dei due indici di simmetria di  $\tilde{T}$  con i due di emisimmetria di  $\tilde{E}$ .

In conclusione deduciamo:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \Pi_i(t).$$

Sostituendo i risultati trovati nella (4.4.18), otteniamo la (4.4.17), c.v.d.

Ovviamente il teorema dell'energia cinetica vale anche per qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  ed in tal caso scriviamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \Pi_i^*(t).$$

Come abbiamo visto, in questo capitolo abbiamo dedotto in ambito spaziale alcune equazioni indefinite per i corpi continui: la condizione di incomprimibilità, l'equazione di continuità per la massa, la I e la II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui. Ovviamente tali equazioni di possono dedurre anche in ambito materiale, ma, poichè nel seguito rimarremo sempre in ambito spaziale, su ciò non insistiamo.





# Capitolo 5

## Termomeccanica dei corpi continui

### 5.1 Introduzione

Ci chiediamo a questo punto se tramite le due equazioni indefinite della meccanica dei corpi continui e l'equazione di continuità per la massa siamo in grado di determinare il moto di un corpo reale schematizzato con il modello di corpo continuo deformabile.

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, in ambito spaziale, tali equazioni, che devono essere verificate in  $\mathcal{S}$ , sono le seguenti:

- l'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t.$$

Il moto, dal punto di vista spaziale, è noto se è noto il campo spaziale della velocità  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ . Tale campo introduce nel problema tre incognite scalari, cioè le sue tre componenti  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sono comunque a priori incogniti anche la densità di massa  $\rho = \rho(P, t)$  e il tensore degli sforzi di Cauchy  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  che equivalgono ad altre 10 incognite scalari, poiché  $\tilde{T}$  è individuato mediante le 9 componenti  $T_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . E' invece nota la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$ .

Perciò in tutto abbiamo 13 incognite scalari.

Vediamo ora quante sono le equazioni scalari indipendenti che abbiamo a disposizione. L'equazione di continuità è una singola equazione scalare, la I equazione indefinita equivale a tre equazioni scalari e la relazione tensoriale che esprime la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy equivale a tre equazioni scalari indipendenti. Dunque le equazioni scalari sono in tutto 7, mentre le incognite scalari sono 13.

Perciò il problema del moto non è impostato in maniera completa.

Per ottenere pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni dobbiamo aggiungere altre 6 equazioni scalari indipendenti. Tali equazioni aggiuntive non possono essere ricavate da nozioni meccaniche generali perchè queste le abbiamo già sfruttate in maniera completa, ma occorre rilevare che le equazioni considerate valgono per ogni corpo continuo e non tengono conto della proprietà meccaniche specifiche del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo. L'esperienza ci mostra che i corpi reali presentano un comportamento meccanico diverso a seconda della loro struttura materiale. Le 6 equazioni da aggiungere devono quindi essere ottenute sperimentalmente per caratterizzare il corpo reale che stiamo schematizzando con il modello di corpo continuo. Tali equazioni mettono in relazione grandezze che descrivono lo stato di sforzo del corpo con grandezze che descrivono lo stato di deformazione: sono dette **relazioni sforzo-deformazione** e fanno parte delle **equazioni costitutive** o **leggi di comportamento**.

Le relazioni sforzo-deformazione, suggerite dall'esperienza, danno luogo esattamente a 6 equazioni scalari, ma l'esperienza stessa ci mostra che spesso in tali relazioni compaiono altre grandezze incognite che non hanno carattere meccanico, bensì termodinamico, come ad esempio la temperatura.

Questo fatto non è sicuramente sorprendente poichè tutti sappiamo che c'è uno stretto legame tra effetti meccanici ed effetti termici. E' ben noto, ad esempio, che se si riscalda una sbarra metallica, questa si allunga: mediante un effetto termico si ottiene un effetto meccanico. Se invece facciamo espandere un gas adiabaticamente, ossia senza fornirgli calore, questo si raffredda: mediante un effetto meccanico si ottiene un effetto termico.

Dunque per un corpo continuo deformabile in generale non è possibile impostare in maniera completa il problema del moto rimanendo in un ambito puramente meccanico, ma bisogna considerare un problema più generale: **il problema termomeccanico**.

Tenendo presente quanto asserito, è opportuno in primo luogo enunciare i due assiomi della termodinamica per i corpi continui.

## 5.2 I due assiomi della termodinamica

Occupiamoci prima di tutto del I assioma della termodinamica. In tale assioma svolgono un ruolo fondamentale i concetti di energia interna e di potenza calorica.

Supponiamo di avere un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

Facciamo le seguenti ipotesi:

**Ipotesi 5.1.**  $\forall t \in [t_0, t_1]$  è definito in  $S(t)$ , un campo scalare:

$$k = k(P, t), \quad k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}),$$

detto energia interna specifica del corpo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ .

**Definizione 5.1.** Preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo energia interna di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) k(P, t) dS.$$

Chiamiamo energia totale di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$W^*(t) = T^*(t) + K^*(t).$$

Analoghe definizioni vengono date per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

L'energia interna fisicamente rappresenta la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale delle molecole che costituiscono il corpo reale schematizzato con  $\mathcal{C}$ .

Per quanto riguarda la potenza calorica, distinguiamo tra potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore e potenza calorica dovuta a calore di contatto (che fluisce nel corpo attraverso la frontiera della regione occupata istante per istante).

Precisamente faremo le seguenti assunzioni.

**Ipotesi 5.2.** Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , sia definito in  $S(t)$  un campo scalare:

$$r = r(P, t), \quad r \in \mathcal{C}(\mathcal{S}),$$

detto densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore.

**Definizione 5.2.** Preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$

$$\mathcal{Q}_i^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

La potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è:

$$\mathcal{Q}_i(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

**Ipotesi 5.3.** Per quanto riguarda il calore di contatto, supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  sia associato un campo scalare:

$$q = q(P, t; \mathcal{C}^*),$$

dove  $P \in \partial S^*(t)$ , continuo per  $P \in \partial S^*(t)$  e per  $t \in [t_0, t_1]$ , detto densità della potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ . Tale campo è definito anche in corrispondenza di tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 5.3.** Chiamiamo potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\mathcal{Q}_c^*(t) = \int_{\partial S^*(t)} q(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

La potenza calorica dovuta a contatto per  $\mathcal{C}$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  è:

$$\mathcal{Q}_c(t) = \int_{\partial S(t)} q(P, t; \mathcal{C}) d\Sigma.$$

**Definizione 5.4.** Definiamo potenza calorica (totale) per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\mathcal{Q}^*(t) = \mathcal{Q}_i^*(t) + \mathcal{Q}_c^*(t).$$

Analoga definizione si dà per tutto il corpo.

**Definizione 5.5.** Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  a causa delle sorgenti interne di calore la grandezza scalare:

$$\mathcal{Q}_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  il calore ricevuto nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  a causa delle sorgenti interne di calore è dato da

$$\mathcal{Q}_{i, [t', t'']} = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i(t) dt.$$

$Q_{i,[t',t'']}^*$  o  $Q_{i,[t',t'']}$  dal punto di vista fisico rappresentano il calore ricevuto da  $\mathcal{C}^*$  o  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$  a causa del fenomeno dell'irraggiamento o a causa di reazioni chimiche interne.

**Definizione 5.6.** *Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  dovuto a contatto la grandezza scalare:*

$$Q_{c,[t',t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_c^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo  $\mathcal{C}$  il calore ricevuto nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  dovuto a contatto è dato da

$$Q_{c,[t',t'']} = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_c(t) dt.$$

Vediamo di interpretare fisicamente anche quest'ultima grandezza.

Per tutto il corpo  $Q_{c,[t',t'']}$  rappresenta il calore fluito nel corpo dall'ambiente esterno attraverso la frontiera della regione occupata da  $\mathcal{C}$ .

Per quanto riguarda i sottocorpi, distinguiamo due casi. Supponiamo dapprima che  $\mathcal{C}^*$  sia tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S^*(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Allora  $Q_{c,[t',t'']}^*$  rappresenta la quantità di calore che in  $[t', t'']$  è fluita in  $\mathcal{C}^*$  dalla porzione restante di  $\mathcal{C}$  attraverso la frontiera della regione occupata da  $\mathcal{C}^*$ .

Consideriamo poi un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S^*(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

$Q_{c,[t',t'']}^*$  rappresenta la quantità di calore che in  $[t', t'']$  è fluita in  $\mathcal{C}^*$  attraverso la frontiera della regione da esso occupata in parte dalla porzione restante di  $\mathcal{C}$  in parte dall'ambiente esterno.

**Definizione 5.7.** *Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  nell'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  la grandezza scalare:*

$$Q_{[t',t'']}^* = Q_{i,[t',t'']}^* + Q_{c,[t',t'']}^*.$$

Analoga definizione si dà per tutto il corpo.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi che è analoga all'assioma degli sforzi.

**Ipotesi 5.4.** Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , sia definito in  $S(t)$  un campo vettoriale

$$\vec{q} = \vec{q}(P, t),$$

detto vettore flusso di calore, tale che  $\forall t \in [t_0, t_1]$ ,  $\forall C^*$ , sottocorpo di  $C$ :

$$q(P, t; C^*) = -\vec{q}(P, t) \cdot \vec{n},$$

con  $P \in \partial S^*(t)$ , ed  $\vec{n}$  versore della normale esterna in  $\partial S^*(t)$ . Inoltre supponiamo che  $\vec{q} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  e che  $\forall t \in [t_0, t_1]$  fissato,  $\vec{q}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

Tenendo conto di queste ipotesi, risulta:

$$\mathcal{Q}_c^*(t) = - \int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = - \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{q} dS,$$

avendo applicato il teorema della divergenza.

Otteniamo dunque:

$$\mathcal{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} [\rho r - \operatorname{div} \vec{q}] dS.$$

Siamo ora in grado di enunciare il primo assioma della termodinamica per un corpo continuo.

**Assioma 5.1. Primo assioma della termodinamica.** Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (5.2.1)$$

Tale assioma vale anche per ogni sottocorpo ed è espresso mediante l'equazione:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \mathcal{Q}^*(t). \quad (5.2.2)$$

In genere, tuttavia, tale assioma non lo si usa in questa forma, ma in una forma ridotta, che si ottiene tenendo presente anche l'equazione che traduce il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad (5.2.3)$$

Poiché  $W = T + K$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}(T + K)(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t),$$

Sottraendo membro a membro da quest'ultima equazione la (5.2.3) si ottiene la seguente formulazione del primo assioma della termodinamica:

$$\frac{dK}{dt}(t) = \mathcal{Q}(t) - \Pi_i(t). \quad (5.2.4)$$

Per un sottocorpo

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \mathcal{Q}^*(t) - \Pi_i^*(t). \quad (5.2.5)$$

Nel seguito ci rifaremo sempre a questa seconda formulazione.

Ora vogliamo enunciare il secondo assioma della termodinamica.

In tale assioma svolgono un ruolo fondamentale i concetti di temperatura assoluta e di entropia.

Facciamo dunque le seguenti ipotesi:

**Ipotesi 5.5.** *Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo scalare  $\vartheta = \vartheta(P, t)$ ,  $\vartheta > 0$ ,  $\vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , detto temperatura assoluta del corpo continuo  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$ .*

**Ipotesi 5.6.**  *$\forall t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo scalare  $h = h(P, t)$ ,  $h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , detto entropia specifica.*

**Definizione 5.8.** *Considerato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , definiamo entropia di  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  la grandezza scalare data da:*

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

Analogamente si dà per l'entropia di  $\mathcal{C}$ :

$$H(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

**Definizione 5.9.** *Definiamo produzione totale di entropia per un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  la seguente grandezza scalare:*

$$\Gamma^*(t) = \frac{dH^*}{dt}(t) - \int_{S^*(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma, \quad (5.2.6)$$

dove ricordiamo che  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S^*(t)$ .

Analogamente si dà per il corpo  $\mathcal{C}$ :

$$\Gamma(t) = \frac{dH}{dt}(t) - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma. \quad (5.2.7)$$

Nella definizione di  $\Gamma^*(t)$  o  $\Gamma(t)$  il secondo termine rappresenta la variazione di entropia dovuta a sorgenti interne di calore, mentre l'integrale di superficie preceduto dal segno  $-$  è il flusso di entropia entrante in  $S^*(t)$  o in  $S(t)$  attraverso  $\partial S^*(t)$  o  $\partial S(t)$ , dovuto a calore di contatto.

**Assioma 5.2. Secondo assioma della termodinamica.** Dato un corpo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \Gamma(t) \geq 0.$$

Tale assioma vale ovviamente anche per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  di  $\mathcal{C}$ , essendo ogni sottocorpo un corpo.

I due assiomi della termodinamica sono enunciati in forma globale, cioè si riferiscono a tutto  $\mathcal{C}$  o a tutto  $\mathcal{C}^*$ , come le due equazioni cardinali. Ci proponiamo di dedurre da questi un'equazione ed una disequazione valide in ogni punto ed in ogni istante, cioè un'equazione ed una disequazione indefinite così come abbiamo dedotto le due equazioni indefinite della meccanica dalle equazioni cardinali. Rimarremo comunque sempre dal punto di vista spaziale, pur potendo ottenere l'equazione e la disequazione conseguenza dei due assiomi della termodinamica anche dal punto di vista materiale.

### 5.3 Equazione e disequazione indefinite della termodinamica per i corpi continui

Vediamo di dedurre l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica.

A tal fine consideriamo la seguente equazione, valida per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , che traduce in forma ridotta il I assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dK^*}{dt} = \mathcal{Q}^* - \Pi_i^*. \quad (5.3.1)$$

Teniamo presente che:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho k dS,$$

da cui, poichè  $k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ , per il corollario del teorema del trasporto, deduciamo:

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS.$$



Ricordando le espressioni viste per la potenza calorica e per la potenza delle forze interne, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S^*(t)} (\rho r - \operatorname{div} \vec{q}) dS + \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS.$$

Se nella precedente equazione portiamo tutto a primo membro, e riuniamo le funzioni integrande sotto un unico segno di integrale, abbiamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{k} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \tilde{T} \cdot \tilde{D} \right] dS = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , l'equazione scritta sopra sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S(t)$ . Inoltre, per le ipotesi fatte, il campo scalare sotto integrale è continuo in  $\mathcal{S}$ .

Allora per il lemma 4.1, deduciamo **l'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica per i corpi continui**:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}. \quad (5.3.2)$$

**Osservazione 5.1** Nell'equazione (5.3.2) a secondo membro è possibile sostituire  $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$  con  $\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$  grazie alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Deduciamo ora la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica.

Considerato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario, allora:

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS,$$

da cui, per il corollario del teorema del trasporto:

$$\frac{dH^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{h} dS.$$

Consideriamo ora, nella (5.2.6) il termine:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma.$$

Per il teorema della divergenza abbiamo che:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) dS.$$

Tenendo presente i risultati precedenti, possiamo riscrivere nel modo seguente la disequazione (5.2.6) che traduce il secondo assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \right] dS \geq 0. \quad (5.3.3)$$

Osserviamo che per l'arbitrarietà di  $\mathcal{C}^*$ , la (5.3.3) sussiste per ogni  $S^*(t)$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S(t)$  e il campo scalare sotto integrale è continuo in  $\mathcal{S}$ .

D'altra parte, ragionando in maniera analoga a quanto fatto per provare il lemma 4.1, si ottiene facilmente un lemma analogo sostituendo al segno di uguaglianza a zero il segno di disuguaglianza  $\geq 0$ . Perciò, stante l'arbitrarietà di  $S^*(t)$  e di  $t$ , deduciamo

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3.4)$$

Osserviamo ora che:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) = \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} + \operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} \cdot \vec{q}$$

ed inoltre:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} = -\frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta.$$

Possiamo quindi riscrivere la disequazione (5.3.4) nel modo seguente:

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3.5)$$

Se moltiplichiamo ambo i membri della (5.3.5) per  $\vartheta$ , deduciamo:

$$\rho \vartheta \dot{h} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3.6)$$

Abbiamo così ottenuto una disequazione che traduce in forma locale il II assioma della termodinamica.

Tuttavia è conveniente dare una forma differente a tale disequazione eliminando  $r$ , ossia la densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore, che è un termine noto. A tal fine riscriviamo l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica nella forma seguente:

$$\rho r - \operatorname{div} \vec{q} = \rho \dot{k} - \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Sostituendo nella (5.3.6), si ottiene:

$$\rho \left( \vartheta \dot{h} - \dot{k} \right) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3.7)$$

La (5.3.7) è la **disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica**.

Tale disequazione si può scrivere in altra forma introducendo la definizione di energia libera specifica.

**Definizione 5.10.** *Definiamo energia libera specifica la grandezza scalare denotata con  $\psi$  data da:*

$$\psi = k - \vartheta h.$$

Osserviamo che:

$$\psi = k - \vartheta h \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{k} - \vartheta \dot{h} - \dot{\vartheta} h \quad \Rightarrow \quad \dot{k} - \vartheta \dot{h} = \dot{\psi} + h \dot{\vartheta}.$$

Allora possiamo riscrivere la disequazione (5.3.7) nella forma:

$$\rho (\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \text{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3.8)$$

Quest'ultima prende il nome di **disequazione di Clausius-Duhem per i corpi continui**.

## 5.4 Problema termomeccanico per un corpo continuo

Rimaniamo in ambito spaziale come nei due precedenti paragrafi e ricordiamo le equazioni indefinite di carattere generale, cioè valide per ogni corpo continuo, ottenute finora e che devono essere soddisfatte in  $\mathcal{S}$ .

- L'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita della meccanica

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \text{div } \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita della meccanica

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t;$$

- l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

In tali equazioni le incognite scalari sono:

$$v_i (i = 1, 2, 3), \rho, T_{ij} (i, j = 1, 2, 3), k, \vartheta, h, q_i (i = 1, 2, 3).$$

In totale abbiamo 19 incognite scalari, mentre le equazioni scritte sopra danno luogo a 8 equazioni scalari indipendenti. Per poter impostare in maniera completa il problema termomeccanico dobbiamo aggiungere altre 11 equazioni scalari indipendenti. Queste devono caratterizzare il comportamento termomeccanico del corpo reale schematizzato tramite il modello del corpo continuo e quindi dipendono dalla struttura materiale del corpo. Tali equazioni ci sono fornite dall'esperienza e sono dette **equazioni costitutive o leggi di comportamento**. Tra le 11 equazioni costitutive scalari 6 sono le relazioni sforzo-deformazione di cui abbiamo già parlato, le altre 5 caratterizzano il comportamento termodinamico del corpo.

Nelle equazioni generali elencate sopra non abbiamo scritto la disuguaglianza indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica, proprio perché non è un'equazione e quindi non contribuisce direttamente a risolvere il problema termomeccanico.

Ricordiamo che tale disequazione si può scrivere come:

$$\rho (\vartheta \dot{h} - \dot{k}) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0$$

o nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\rho (\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0.$$

Poiché tale disequazione deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}$  qualunque sia il moto o più in generale l'evoluzione del corpo continuo, le equazioni costitutive devono essere tali da consentire ciò. Quindi il II assioma della termodinamica dei corpi continui svolge il ruolo di imporre delle restrizioni sulla forma delle equazioni costitutive affinché queste siano compatibili con tale assioma.

**Osservazione 5.2** Tra le incognite del problema termomeccanico possiamo far comparire in luogo dell'energia interna specifica  $k$  l'energia libera specifica  $\psi$  tenendo presente che  $\psi = k - \vartheta h$ . In tal caso ogni volta che compare  $k$  a questa dobbiamo ovviamente sostituire  $\psi + \vartheta h$  e la disequazione che traduce

in forma locale il II assioma della termodinamica deve apparire nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem.

Nelle equazioni costitutive distinguiamo tra

- grandezze *costitutive*, cioè grandezze espresse mediante altre grandezze;
- grandezze *fondamentali*, cioè grandezze mediante le quali vengono espresse quelle costitutive.

Si richiede che le equazioni soddisfino tre assiomi:

1) **Assioma dell'azione locale**

I valori che le grandezze costitutive assumono in ogni punto dello spazio geometrico dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto.

2) **Assioma di determinismo**

I valori che le grandezze costitutive assumono ad ogni istante dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso istante ed eventualmente anche in tutti gli istanti precedenti, cioè dipendono dalla storia delle grandezze fondamentali. I corpi per i quali i valori assunti dalle grandezze costitutive ad ogni istante dipendono non solo dai valori che quelle fondamentali assumono nello stesso istante, ma anche dalla loro storia sono detti **corpi con memoria**.

3) **Assioma dell'obiettività o dell'indifferenza materiale**

La forma delle equazioni costitutive è indipendente dall'osservatore, cioè le equazioni costitutive sono invarianti rispetto ai moti rigidi (poiché gli osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rigido).

Se nelle equazioni generali, valide per tutti i corpi continui, eliminiamo le grandezze costitutive sostituendo ad esse le loro espressioni in funzione di quelle fondamentali, otteniamo un sistema di equazioni in cui i campi incogniti dipendono da  $P$  e da  $t$  e ai quali sono applicati operatori differenziali, eventualmente anche di ordine superiore al I, relativi sia a  $P$  sia a  $t$ .

Per poter affrontare il problema termomeccanico con metodi analitici è opportuno sostituire ai campi scalari, vettoriali e tensoriali che compaiono nel sistema le loro rappresentazioni analitiche nel riferimento associato all'osservatore. In tal modo otteniamo un sistema di equazioni (in genere) differenziali alle derivate parziali in cui le funzioni incognite dipendono dalle quattro variabili reali  $x_1, x_2, x_3, t$ . Le prime tre sono variabili spaziali, mentre l'ultima è la variabile temporale. Se il corpo di cui si studia l'evoluzione è dotato di memoria, il

sistema di equazioni risulta di forma più complessa ed è precisamente un sistema integro-differenziale.

E' evidente che un sistema di equazioni differenziali (o integro-differenziali) ammette infinite soluzioni se non aggiungiamo delle ulteriori condizioni che devono essere soddisfatte dalla soluzione. Per avere l'unicità della soluzione, dobbiamo perciò associare al sistema delle opportune condizioni, dette **condizioni ai limiti**, e suggerite in genere dall'esperienza.

Le condizioni ai limiti sono di due tipi:

- **condizioni iniziali**: consistono nell'assegnare all'istante iniziale del moto ( $t_0$ ) i valori che assumono alcuni campi incogniti o alcune loro derivate;
- **condizioni al contorno**: consistono nell'assegnare istante per istante sul bordo della regione occupata dal corpo i valori che assumono alcuni campi incogniti od alcune loro derivate o alcune combinazioni di campi e derivate.

Ovviamente anche ai campi che compaiono nelle condizioni ai limiti si sostituiscono le rappresentazioni analitiche.

Tutto quanto abbiamo detto in ambito spaziale continua a sussistere anche in ambito materiale. Infatti, come già abbiamo osservato a proposito della condizione di incomprimibilità, dell'equazione di continuità e delle due equazioni indefinite della meccanica, anche l'equazione e la disequazione indefinite conseguenza dei due assiomi della termodinamica si possono ottenere dal punto di vista materiale. E' evidente che, se ci si mette in ambito materiale, anche nelle equazioni costitutive i campi devono essere rappresentati dal punto di vista materiale.

Osserviamo infine che le equazioni costitutive definiscono le varie classi di corpi continui, dette *classi costitutive*, che a loro volta corrispondono a diverse classi di corpi reali.

# Capitolo 6

## Fluidi perfetti

### 6.1 Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti

In questo capitolo studieremo una particolare classe costitutiva di corpi continui, quella dei fluidi perfetti che a sua volta è una sottoclasse di una classe più generale, quella dei fluidi propriamente detti.

Rileviamo che i fluidi sono corpi continui che schematizzano il comportamento dei liquidi e dei gas reali. In particolare i liquidi sono rappresentati mediante fluidi incomprimibili.

In genere i fluidi sono studiati dal punto di vista spaziale.

**Definizione 6.1.** *Un fluido propriamente detto è un corpo continuo che, in ambito spaziale, da un punto di vista strettamente meccanico, è caratterizzato dalla seguente relazione sforzo-deformazione:*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}},$$

dove

$\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è il tensore degli sforzi di Cauchy;

$p = p(P, t)$  è la pressione del fluido ( $p > 0$  in ogni punto ed in ogni istante);

$\tilde{a}$  è il tensore fondamentale;

$\tilde{\hat{T}}$  è un'applicazione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ), tale che

$\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta, P)$ , con  $\tilde{D}$  tensore di velocità di deformazione e  $\vartheta$  temperatura assoluta, soddisfacente alla condizione  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta, P) = \tilde{0}$ .

La funzione  $\tilde{\hat{T}}$ , detta *parte viscosa del tensore degli sforzi*, è fornita dall'esperienza.

Ricordiamo che il tensore di velocità di deformazione ha la seguente espressione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}),$$

dove  $\vec{v}$  è il campo spaziale della velocità.

**Definizione 6.2.** *Un fluido per il quale la parte viscosa del tensore degli sforzi è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, si dice non viscoso.*

**Osservazione 6.1.** Si osservi che per un fluido propriamente detto che sia in quiete o si muova di moto rigido la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla poiché nelle condizioni dette sopra il campo tensoriale  $\tilde{D}$  è identicamente nullo.

**Definizione 6.3.** *Un fluido perfetto o fluido ideale è un fluido propriamente detto, caratterizzato, da un punto di vista puramente meccanico, dalla relazione sforzo-deformazione*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}.$$

Dunque un fluido perfetto è un fluido propriamente detto non viscoso. La relazione sforzo-deformazione mostra che in un fluido perfetto il tensore degli sforzi di Cauchy è isotropo; l'isotropia di  $\tilde{T}$  traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che i liquidi e i gas reali schematizzabili con il modello di fluido perfetto hanno proprietà meccaniche indipendenti dalla direzione.

Può essere interessante vedere che forma assume in un fluido perfetto lo sforzo specifico in un punto  $P$  all'istante  $t$  coordinato alla direzione orientata di versore arbitrario  $\vec{u}$ , cioè  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ .

Per il teorema di Cauchy sugli sforzi si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u} = -p(P, t)\tilde{a} \cdot \vec{u},$$

da cui discende:

$$T_i(P, t, \vec{u}) = T_{ij}(P, t) u_j = -p(P, t) a_{ij} u_j = -p(P, t) \delta_{ij} u_j = -p(P, t) u_i,$$

ossia

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = -p(P, t) \vec{u}.$$

Allora deduciamo che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale, e questo è tradotto dal fatto che  $\vec{T}(\vec{u}) \parallel \vec{u}$ , ed inoltre ha carattere di pressione, e questo è tradotto dal fatto che essendo  $p > 0$ ,  $\vec{T}(\vec{u})$  e  $\vec{u}$  hanno verso opposto, qualunque sia  $\vec{u}$ .

**Osservazione 6.2.** La pressione in un fluido perfetto non dipende da  $\vec{u}$ . Questo fatto traduce in termini matematici il principio di Pascal che si osserva sperimentalmente: nei liquidi e nei gas reali schematizzati con il modello di fluido perfetto la pressione è uguale in tutte le direzioni.



I fluidi perfetti schematizzano abbastanza bene alcuni liquidi reali, come ad esempio l'acqua, e molti gas reali, come ad esempio l'aria.

Per il momento abbiamo dato solo la relazione sforzo-deformazione per un fluido perfetto. Vogliamo caratterizzare il comportamento di un fluido perfetto anche dal punto di vista termodinamico. A tal fine dobbiamo distinguere tra fluidi perfetti comprimibili e fluidi perfetti incomprimibili.

### 1) Fluido perfetto comprimibile

Le equazioni costitutive che caratterizzano la natura termodinamica di un fluido perfetto comprimibile sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ p &= \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ h &= \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di stato} \quad (6.1.1)$$

cui associamo la **legge di propagazione del calore**

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta. \quad (6.1.2)$$

Nelle (6.1.1) si ha:

$\psi$  = energia libera specifica,  $\mathcal{V} = 1/\rho$  = volume specifico,  $\vartheta$  = temperatura assoluta,  $h$  = entropia specifica.

Le funzioni  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$  e  $\widehat{h}$  sono funzioni note fornite dall'esperienza dette *funzioni risposta*.

Ovviamente  $\widehat{p}$  deve essere strettamente positiva poichè è la funzione risposta per la pressione.

Assumiamo poi  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{h}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  da cui discende  $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^2$ .

Le cinque grandezze che intervengono nelle tre equazioni di stato prendono il nome di variabili di stato;  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  sono variabili di stato fondamentali, mentre  $\psi$ ,  $p$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive.

La funzione risposta  $\widehat{\psi}$  è detta *potenziale termodinamico*, perchè tramite le sue derivate siamo in grado di determinare le altre due funzioni risposta e la prima equazione di stato è chiamata *equazione di stato fondamentale*, perchè tramite questa si ricavano le altre due.

$p$ ,  $\mathcal{V}$  e  $h$ ,  $\theta$  costituiscono coppie di *variabili di stato coniugate*.

Per quanto riguarda la legge di propagazione del calore,  $\vec{q}$  è il vettore flusso di calore, mentre  $\beta = \beta(\vartheta, \text{grad} \vartheta, P)$  è detto *coefficiente di conducibilità termica* e la sua espressione si ottiene sperimentalmente. Da tale legge vediamo che

in ogni punto e in ogni istante  $\vec{q}$  è parallelo a  $\text{grad } \vartheta$ ; quando si verifica tale condizione, si dice che la **propagazione del calore è isotropa**. L'isotropia della propagazione del calore traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che nei corpi reali schematizzati con il modello considerato le proprietà termiche sono indipendenti dalla direzione.

Se il coefficiente di conducibilità termica  $\beta$  è costante, la legge di propagazione del calore (6.1.2) prende il nome di **legge di Fourier**.

**Osservazione 6.3.** E' immediato ottenere la funzione risposta dell'energia interna specifica  $k$  in termini di  $\vartheta$  e di  $\mathcal{V}$ , tenendo presente che:

$$k = \psi + \vartheta h.$$

Precisamente si ha:

$$\widehat{k}(\vartheta, \mathcal{V}) = \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) + \vartheta \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Dunque anche l'energia interna specifica è una variabile di stato.

Mostriamo ora che nelle equazioni di stato si può assumere  $h$  come variabile di stato fondamentale in luogo di  $\vartheta$ .

Premettiamo una definizione:

**Definizione 6.4.** *Dato un fluido perfetto caratterizzato dalle equazioni di stato scritte sopra, definiamo calore specifico a volume costante relativo a  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  la grandezza scalare data da:*

$$C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) = \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

L'esperienza mostra che  $C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0$ , qualunque sia l'evoluzione del fluido. Dalla definizione 6.4, deduciamo:

$$\vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}),$$

da cui, essendo  $\vartheta > 0$ , segue:

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione:

$$h = \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni  $\mathcal{V}$  fissato, si può ricavare, almeno localmente, la temperatura  $\vartheta$  in funzione di  $h$ :

$$\vartheta = \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale  $h$  al posto di  $\vartheta$ , purché le equazioni di stato si scrivano nella forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h, \mathcal{V}) \\ p &= \bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}), \end{aligned} \right\} \text{Nuove equazioni di stato} \quad (6.1.3)$$

dove

$$\bar{k}(h, \mathcal{V}) = \hat{\psi}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) h, \quad \bar{p}(h, \mathcal{V}) = \hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}).$$

Assumendo come variabili di stato fondamentali  $h$  e  $\mathcal{V}$ , si ha perciò che il potenziale termodinamico non è più la funzione risposta per l'energia libera specifica, ma quella per l'energia interna specifica.

Proviamo che:

$$\bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}).$$

Se deriviamo  $\bar{k}$  rispetto a  $\mathcal{V}$ , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) - \hat{h}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = -\bar{p}(h, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra:

$$\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}).$$

Si potrebbe anche provare che, tenendo  $\vartheta$  come variabile di stato fondamentale, è possibile sostituire a  $\mathcal{V}$  la pressione  $p$  come variabile di stato fondamentale. Infatti l'esperienza ci mostra che

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) < 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V})$$

e che quindi tale derivata non è mai nulla. Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione

$$p = \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni  $\vartheta$  fissato, si può ricavare, almeno localmente, il volume specifico  $\mathcal{V}$  in funzione di  $p$ :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^*(\vartheta, p).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale  $p$  al posto di  $\mathcal{V}$ , purché nelle equazioni di stato compaia come nuovo potenziale termodinamico, la funzione risposta dell'*entalpia libera specifica*  $G$ , così definita:

$$G = k + p\mathcal{V} - \vartheta h = \psi + p\mathcal{V},$$

ma su ciò non insistiamo.

Introduciamo la seguente definizione:

**Definizione 6.5.** *Dato un fluido perfetto comprimibile, chiamiamo calore specifico a pressione costante relativo a  $\vartheta$  e  $p$  la grandezza scalare data da:*

$$C_p(\vartheta, p) = \vartheta \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta}(\vartheta, p),$$

dove  $h^*(\vartheta, p)$  è la funzione risposta di  $h$  in termini di  $\vartheta$  e  $p$ .

Dall'esperienza si vede che:

$$C_p(\vartheta, p) > C_v(\vartheta, \mathcal{V}^*(\vartheta, p)) > 0 \quad \forall(\vartheta, p).$$

## 2) Fluido perfetto incomprimibile

Per un fluido perfetto incomprimibile, qualunque sia il suo moto, deve essere soddisfatta la condizione di incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

da cui dunque l'equazione di continuità della massa assume la forma:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Di conseguenza  $\mathcal{V} = 1/\rho$  non è più variabile di stato, e quindi non è più variabile di stato nemmeno la sua coniugata  $p$ , che diventa così una grandezza puramente meccanica.

Le variabili di stato si riducono a 3:  $\psi$ ,  $\vartheta$  e  $h$ .

Le equazioni di stato assumono allora la forma:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta), \\ h &= \widehat{h}(\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}\widehat{\psi}(\vartheta). \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$

cui associamo la legge di propagazione del calore ancora data da:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad}\vartheta \quad \text{con} \quad \beta = \beta(\vartheta, \text{grad}\vartheta, P).$$

Lo stato termodinamico di un fluido perfetto incomprimibile è quindi individuato da tre variabili di stato:  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $h$ .  $\vartheta$  è variabile di stato fondamentale, mentre  $\psi$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive. Il potenziale termodinamico è  $\widehat{\psi}$  e la sua derivata rispetto a  $\vartheta$ , cambiata di segno, è la funzione risposta per  $h$ .

Come per i fluidi perfetti comprimibili, possiamo sostituire  $h$  a  $\vartheta$  come variabile di stato fondamentale e le equazioni di stato sono allora:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h), \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h) = \frac{d}{dh}\bar{k}(h) \end{aligned} \right\} \text{nuove equazioni di stato}$$

**Osservazione 6.4.** I fluidi incomprimibili schematizzano bene il comportamento dei liquidi reali.

**Osservazione 6.5.** Si vede immediatamente che le equazioni costitutive di un fluido perfetto comprimibile o incomprimibile soddisfano gli assiomi dell'azione locale e di determinismo poiché i valori assunti dalle grandezze costitutive in ogni punto ed in ogni istante dipendono solo dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto e nello stesso istante. I fluidi perfetti non sono corpi continui con memoria.

Si potrebbe dimostrare che è anche soddisfatto l'assioma dell'obiettività.

## 6.2 Problema del moto per un fluido perfetto

In primo luogo vediamo quale forma assume per un fluido perfetto la I equazione indefinita della meccanica sfruttando la relazione sforzo-deformazione

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}$$

che scritta in componenti fornisce:

$$T_{ij} = -p a_{ij} = -p \delta_{ij}.$$

Osserviamo che per le ipotesi di regolarità imposte a  $\tilde{T}$  si ha

$$p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}).$$

Ricordiamo la I equazione indefinita nella sua forma generale:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}.$$

La  $i$ -esima componente della divergenza di  $\tilde{T}$  è:

$$(\operatorname{div} \tilde{T})_i = T_{ij,j} = (-p \delta_{ij})_{,j} = -p_{,j} \delta_{ij} = -p_{,i} = -(\operatorname{grad} p)_i,$$

per cui in forma vettoriale si ha:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p.$$

Sostituendo nella I equazione indefinita otteniamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \quad (6.2.1)$$

La (6.2.1) è detta **equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti o equazione di Eulero**.

Se nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  il fluido è in quiete, si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{v} = \vec{0} \implies \dot{\vec{v}} = \vec{0},$$

per cui l'equazione (6.2.1) si riduce a:

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \quad (6.2.2)$$

detta **equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti**.

Da tale equazione deduciamo che condizione necessaria affinché un fluido perfetto sia in quiete è che  $\rho \vec{F}$  provenga da un potenziale scalare.

**Osservazione 6.6.** La (6.2.2) governa non solo la statica dei fluidi perfetti, ma anche la statica di qualsiasi fluido propriamente detto, poiché, quando il fluido è in quiete, la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla.

Ci proponiamo di mostrare ora come si imposta il problema del moto per un fluido perfetto. Proviamo dapprima la seguente:

**Proposizione 6.1.** *Per un fluido perfetto incomprimibile il problema del moto si imposta in maniera completa in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

Vediamo quali sono le equazioni che abbiamo a disposizione in ambito puramente meccanico per un fluido perfetto incomprimibile:

- condizione di incomprimibilità

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- equazione di continuità associata alla condizione di incomprimibilità

$$\dot{\rho} = 0;$$

- equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p.$$

Teniamo poi presente che la pressione  $p$  in un fluido perfetto incomprimibile è una grandezza puramente meccanica, ossia non è una variabile di stato.

Allora le incognite scalari del problema sono cinque:  $v_i (i = 1, 2, 3)$ ,  $\rho$ ,  $p$ , ma anche le equazioni scalari sono cinque. Perciò il numero delle incognite è pari al numero delle equazioni e il problema del moto è impostato in maniera completa, per quanto riguarda il bilancio tra incognite ed equazioni.

Per determinare effettivamente il moto del fluido alle equazioni scritte sopra dobbiamo associare le condizioni ai limiti che distinguiamo in condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Se assumiamo  $t_0 = 0$ , le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho(P, 0) &= \rho_0(P) & \forall P \in S(0) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) & \forall P \in S(0), \end{aligned}$$

dove  $\rho_0 = \rho_0(P)$  e  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(P)$  sono campi assegnati.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che  $\partial S(t)$  sia costituita da pareti materiali rigide di cui è noto l'atto di moto:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t), \quad P \in \partial S(t), \quad t \in [0, t_1].$$

L'esperienza mostra che le particelle di fluido a contatto con le pareti non le possono attraversare: quindi la condizione al contorno suggerita dall'esperienza è la seguente:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}. \quad (6.2.3)$$

La (6.2.3), nella quale  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S(t)$ , è detta **condizione di impenetrabilità**.

In particolare se le pareti rigide sono fisse:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial S(t)} = 0.$$

Si potrebbero utilizzare anche altri tipi di condizioni al contorno suggerite dall'esperienza, a seconda delle caratteristiche fisiche del particolare moto che si studia, ma su ciò non insistiamo.

Dunque abbiamo impostato in maniera completa il problema del moto per un fluido perfetto incomprimibile.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi sul fluido: supponiamo che, oltre ad essere incomprimibile, sia anche omogeneo, cioè che la densità di massa  $\rho$  non dipenda da  $P$  per cui  $\text{grad } \rho = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ . Allora per definizione di derivata materiale rispetto al tempo, abbiamo:

$$\dot{\rho} = \rho' + \text{grad } \rho \cdot \vec{v} = \rho'.$$

Ma, essendo il fluido incomprimibile,

$$\dot{\rho} = \rho' = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

D'altra parte, poiché  $\rho$  non dipende da  $P$ , possiamo scrivere:

$$\rho'(t) = \frac{d\rho}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dunque  $\rho$  non dipende neppure da  $t$  e quindi è una costante nota.

Il moto per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo si imposta perciò mediante il seguente sistema, equivalente a quattro equazioni scalari

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \text{grad } p \end{aligned}$$

con  $\rho$  costante positiva nota.

E' evidente che in tal caso al sistema scritto sopra si associa una sola la condizione iniziale, cioè quella relativa alla velocità. Se poi  $\partial S(t)$  è costituita da pareti materiali rigide come condizione al contorno assumiamo quella di impenetrabilità.

Aggiungiamo una nuova ipotesi: il campo  $\vec{v}$  provenga da un potenziale scalare  $f = f(P, t)$ , cioè sia tale che:

$$\vec{v} = \text{grad } f \quad \text{in } \mathcal{S}.$$



Il campo  $f$  è detto *potenziale cinetico* ed è di classe  $\mathcal{C}^2(\mathcal{S})$ , essendo  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ . Poiché il fluido è incomprimibile, abbiamo  $\text{div } \vec{v} = 0$ , ma  $\vec{v} = \text{grad } f$  e quindi

$$\text{div grad } f = \Delta f = 0.$$

Perciò il potenziale cinetico soddisfa alla seguente equazione:

$$\Delta f(P, t) = 0 \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Tale equazione è nota come **equazione di Laplace** ed in essa il tempo compare come parametro, poichè l'operatore differenziale laplaciano è relativo ai punti dello spazio geometrico e non agli istanti di tempo.

Se  $\partial S(t)$  è formato da pareti materiali rigide, all'equazione associamo la condizione al contorno:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \text{grad } f \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \varphi,$$

dove  $\varphi = \vec{V} \cdot \vec{n}$  è un campo noto e  $\text{grad } f \cdot \vec{n} =: \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$  è la **derivata di  $f$  nella direzione orientata di versore  $\vec{n}$** .

Come vedremo nell'ultima parte del corso, la condizione al contorno:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial S(t)} = \varphi$$

è detta **condizione al contorno di Neumann**.

Una volta determinato il potenziale cinetico  $f$  e quindi  $\vec{v}$  come soluzione del problema scritto sopra, si determina la pressione mediante l'equazione

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p.$$

Si noti che  $p$  è comunque determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo.

Infatti se la coppia  $(\vec{v}, p)$  è soluzione dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti scritta sopra, è soluzione della stessa equazione anche la coppia  $(\vec{v}, p^*)$  dove  $p^* = p + \alpha$  con  $\alpha = \alpha(t)$  funzione arbitraria del tempo, poichè  $\text{grad } p^* = \text{grad } p$ .

Ciò che abbiamo detto per la pressione vale per un qualsiasi fluido perfetto incomprimibile, tenendo presente che  $p$  per un tale fluido non è data mediante un'equazione di stato, ma è un'incognita puramente meccanica.

Occupiamoci ora dell'impostazione del problema del moto per un fluido perfetto comprimibile. Se restiamo in ambito puramente meccanico, abbiamo a disposizione le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \text{grad } p \end{aligned}$$

che sono chiaramente insufficienti ad impostare il problema del moto poiché equivalgono a 4 equazioni scalari, mentre le incognite scalari sono 5:  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\rho$ ,  $p$ . Occorre perciò impostare il problema termomeccanico.

Alle due equazioni precedenti dovremo aggiungere l'equazione indefinita che è conseguenza del I assioma della termodinamica:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Vediamo quale forma particolare assume tale equazione per un fluido perfetto se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione. In particolare si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = T_{ij} v_{i,j} = -p \delta_{ij} v_{i,j} = -p v_{i,i} = -p \operatorname{div} \vec{v}.$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità (essendo  $\rho > 0$ ), si deduce:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

e dunque:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione conseguenza del I assioma della termodinamica, otteniamo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (6.2.4)$$

La (6.2.4) è nota come **equazione dell'energia per un fluido perfetto comprimibile**.

**Osservazione 6.7.** Per un fluido perfetto incomprimibile, grazie alla condizione di incomprimibilità, risulta:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = -p \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

per cui l'equazione dell'energia per un fluido perfetto incomprimibile si riduce a:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Per impostare il problema termomeccanico per un fluido perfetto comprimibile scriviamo le seguenti equazioni, che devono tutte essere verificate in  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ \rho \dot{k} &= \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} \end{aligned}$$

cui associamo le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad } \vartheta.$$

In tutto abbiamo 11 equazioni scalari ed anche le incognite scalari sono 11:  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\rho$ ,  $p$ ,  $k$  (o  $\psi$  o  $G$ ),  $h$ ,  $\vartheta$ ,  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Il problema termomeccanico è perciò impostato in maniera completa per quanto riguarda numero di incognite e numero di equazioni.

Se vogliamo effettivamente determinare l'evoluzione del fluido, dobbiamo aggiungere le condizioni ai limiti (iniziali e al contorno), ma su ciò non insistiamo. Ci limitiamo ad osservare che se  $\partial S(t)$  è formato da pareti materiali rigide, per il campo della velocità si ha la condizione di impenetrabilità:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n},$$

dove  $\vec{V}$  è l'atto di moto delle pareti, che viene riguardato come noto.

Mostriamo ora quale influenza ha il II assioma della termodinamica sulle equazioni costitutive dei fluidi perfetti.

**Teorema 6.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido perfetto siano compatibili con il secondo assioma della termodinamica è che  $\beta \geq 0$ .*

#### Dimostrazione

Come sappiamo, il II assioma della termodinamica è espresso localmente dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h \dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \text{grad } \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0$$

che deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}$ , qualunque sia l'evoluzione del fluido.

Vediamo quale forma assume il I membro di tale disuguaglianza per un fluido perfetto comprimibile ed incomprimibile tenendo presenti le loro equazioni costitutive.

Consideriamo dapprima un fluido perfetto comprimibile. Ricordiamo che per un tale fluido:

$$\psi = \hat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \quad \text{con} \quad \mathcal{V} = \frac{1}{\rho}.$$

Allora per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per le due restanti equazioni di stato, deduciamo:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathcal{V}} = -\hat{h} \dot{\vartheta} - \hat{p} \dot{\mathcal{V}} = -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}.$$

Inoltre

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = \tilde{T} \cdot \text{grad } \vec{v} = \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad \vec{q} = -\beta \text{grad } \vartheta.$$

Sostituendo le relazioni precedenti al I membro dell'equazione di Clausius-Duhem, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \dot{\psi} + h \dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \text{grad } \vartheta \cdot \vec{q} = \\ & = \rho \left( -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 = \\ & = \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 = -\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2. \end{aligned}$$

Dunque per un fluido perfetto comprimibile le equazioni costitutive sono compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se:

$$-\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

qualunque sia l'evoluzione del fluido.

E' evidente che la disuguaglianza scritta sopra è verificata se e solo se  $\beta \geq 0$ , come ci proponevamo di dimostrare.

Consideriamo ora un fluido perfetto incomprimibile.

In tal caso si ha:

$$\psi = \hat{\psi}(\vartheta) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{d\vartheta} = -\hat{h} \dot{\vartheta}.$$

Inoltre, essendo il fluido incomprimibile:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 0.$$

Se sostituiamo le relazioni trovate al I membro della disuguaglianza di Clausius-Duhem, deduciamo:

$$\rho \left( -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 = -\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2,$$

come per un fluido perfetto comprimibile. In maniera analoga concludiamo che le equazioni costitutive di un fluido perfetto incomprimibile sono compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se  $\beta \geq 0$ , c.v.d.

## 6.3 Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti

**Definizione 6.6.** *Un fluido perfetto barotropico è un fluido perfetto comprimibile tale che la pressione è funzione solo della densità di massa e precisamente:*

$$p = g(\rho)$$

dove  $g$  è una funzione definita in  $(0, +\infty)$ , positiva, di classe  $\mathcal{C}^1$  con  $\frac{dg}{d\rho} > 0$ .

Si osservi che  $g$ , essendo strettamente crescente, è invertibile per cui:

$$\rho = g^{-1}(p).$$

**Proposizione 6.2.** *Per un fluido perfetto barotropico il problema del moto si imposta in ambito puramente meccanico.*

### Dimostrazione

In ambito meccanico le equazioni che abbiamo a disposizione sono:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ p &= g(\rho).\end{aligned}$$

Le equazioni scalari sono 5, esattamente come le incognite scalari e dunque il problema del moto è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Mostriamo ora che in particolari condizioni un generico fluido perfetto comprimibile si comporta come un fluido barotropico.

Premettiamo una definizione.

**Definizione 6.7.** *Diciamo che un corpo continuo, studiato dal punto di vista spaziale, evolve isotermicamente o in condizioni isotermiche se*

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 6.3.** *Se un fluido perfetto comprimibile evolve isotermicamente, si comporta come un fluido perfetto barotropico.*

### Dimostrazione

Per ipotesi

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Nelle equazioni di stato del fluido assumiamo come variabili di stato fondamentali  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ , per cui:

$$p = \widehat{p}(\vartheta_0, \mathcal{V}).$$

Poniamo:

$$g(\rho) = \widehat{p}(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}).$$

E' evidente che  $g > 0$ ,  $g \in \mathcal{C}^1$ , poiché  $\widehat{p} > 0$ ,  $\widehat{p} \in \mathcal{C}^1$  e  $\rho \neq 0$ .

Inoltre

$$\frac{dg}{d\rho}(\rho) = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}) \frac{1}{\rho^2} > 0,$$

perchè, come abbiamo osservato, l'esperienza mostra che  $\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \mathcal{V}} < 0$ .

Il fluido in condizioni isoterme si comporta dunque come un fluido barotropico, c.v.d.

**Definizione 6.8.** *Un gas perfetto è un fluido perfetto comprimibile per il quale vale la seguente equazione di stato:*

$$p = R \frac{\vartheta}{\mathcal{V}}, \quad R = \text{costante} > 0. \quad (6.3.1)$$

Molti gas reali, come ad esempio l'aria, possono essere schematizzati mediante questo modello di fluido.

I gas perfetti godono di interessanti proprietà.

- Per un gas perfetto la funzione risposta  $\widehat{k}$  dell'energia interna specifica in termini di  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  dipende solo da  $\vartheta$ , cioè

$$k = \widehat{k}(\vartheta).$$

- Il calore specifico a volume costante  $C_{\mathcal{V}}$ , che per un generico fluido perfetto comprimibile dipende da  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ , per un gas perfetto dipende solo da  $\vartheta$ .
- Per un gas perfetto  $C_p - C_{\mathcal{V}} = R$ , da cui segue che per un gas perfetto, se uno dei due calori specifici è costante, lo è anche l'altro.
- Per un gas perfetto in condizioni isoterme sussiste la legge di Boyle-Mariotte, tradotta dalla seguente equazione:

$$p = C_0 \rho, \quad C_0 = \text{costante} > 0. \quad (6.3.2)$$

Proviamo solo l'ultima proprietà relativa alla legge di Boyle-Mariotte. Questa si deduce immediatamente dall'equazione di stato dei gas perfetti. Infatti se il gas evolve isotermicamente  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{costante}$  e dunque dalla (6.3.1) segue:

$$p = R \frac{\vartheta_0}{\mathcal{V}} = R \vartheta_0 \rho.$$

Posto  $C_0 = R \vartheta_0$ , otteniamo la relazione espressa dalla legge di Boyle-Mariotte. Si noti che in condizioni isoterme un gas perfetto si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $g(\rho) = C_0 \rho$ .

**Definizione 6.9.** *Dato un corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale, diciamo che evolve isentropicamente o in condizioni isentropiche se*

$$h(P, t) = h_0 = \text{costante} \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 6.4.** *Se un gas perfetto ha costante uno dei due calori specifici ed evolve in condizioni isentropiche, si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $g(\rho) = C \rho^\gamma$  dove  $C$  è una costante positiva e  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .*

## 6.4 Propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile

Consideriamo l'equazione dell'energia per un fluido perfetto comprimibile:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (6.4.1)$$

A questa equazione si può dare una diversa forma se si utilizzano le equazioni di stato in cui le variabili di stato fondamentali sono  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ .

In primo luogo l'equazione dell'energia si può scrivere nel modo seguente:

$$\rho \left( \dot{k} - \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} \right) = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (6.4.2)$$

Se poi teniamo presente che  $\dot{\mathcal{V}} = -\frac{1}{\rho^2} \dot{\rho}$ , la (6.4.2) si riduce a:

$$\rho(\dot{k} + p \dot{\mathcal{V}}) = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (6.4.3)$$

D'altra parte:

$$k = \psi + \vartheta h \quad \Longrightarrow \quad \dot{k} = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} h + \vartheta \dot{h}.$$

Se assumiamo come variabili di stato fondamentali  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$ , si ha

$$\psi = \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}), \quad h = \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}), \quad p = \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V})$$

per cui

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathcal{V}} + \dot{\vartheta} h + \vartheta \dot{h} = \\ &= -\widehat{h} \dot{\vartheta} - \widehat{p} \dot{\mathcal{V}} + \dot{\vartheta} h + \vartheta \dot{h} = \\ &= -\widehat{p} \dot{\mathcal{V}} + \vartheta \dot{h}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (6.4.3), questa diventa:

$$\rho \left( -\widehat{p} \dot{\mathcal{V}} + \vartheta \dot{h} + p \dot{\mathcal{V}} \right) = \rho r - \operatorname{div} \vec{q},$$

ossia

$$\rho \vartheta \dot{h} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (6.4.4)$$

La (6.4.4) è la forma in cui si può scrivere l'equazione dell'energia per un fluido perfetto comprimibile.

**Osservazione 6.8** All'equazione (6.4.4) si perviene anche utilizzando le equazioni di stato in cui le variabili di stato fondamentali sono  $h$  e  $\mathcal{V}$ .

**Osservazione 6.9** L'equazione dell'energia si può scrivere nella forma (6.4.4) anche per un fluido perfetto incomprimibile.

Sfruttando la (6.4.4) cerchiamo l'equazione che governa la propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile che evolve in condizioni di incomprimibilità.

Poiché siamo in condizioni di incomprimibilità:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathcal{V}}.$$

Se prendiamo  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  come variabili di stato fondamentali, abbiamo:

$$h = \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{h} = \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathcal{V}} = \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la condizione di incomprimibilità. Inoltre

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$



Sostituendo nella (6.4.4), deduciamo:

$$\rho \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = \rho r + \operatorname{div}(\beta \operatorname{grad} \vartheta).$$

D'altra parte

$$\vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta} = C_V, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{v},$$

per cui arriviamo all'equazione:

$$\rho C_V \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{v} \right) - \operatorname{div}(\beta \operatorname{grad} \vartheta) = \rho r. \quad (6.4.5)$$

La (6.4.5) è l'equazione che governa la propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile che evolve in condizioni di incomprimibilità.

Se nella (6.4.5) supponiamo  $\vec{v} \equiv \vec{0}$  (il fluido è in quiete),  $\rho = \rho_0$  costante  $> 0$  (il fluido è omogeneo),  $C_V = \text{costante} > 0$ ,  $\beta = \text{costante} > 0$  (la legge di propagazione del calore è la legge di Fourier), l'equazione si riduce a

$$\rho_0 C_V \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \beta \operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta = \rho_0 r.$$

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione scritta sopra per  $\beta$  e teniamo presente che  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta = \Delta \vartheta$ . Otteniamo allora:

$$\frac{\rho_0 C_V}{\beta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta = = \frac{\rho_0}{\beta} r.$$

Se poniamo:

$$a^2 := \frac{\beta}{\rho_0 C_V}, \quad F := \frac{\rho_0}{\beta} r,$$

perveniamo all'equazione:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta = = F. \quad (6.4.6)$$

La (6.4.6) è l'**equazione del calore o di Fourier**.

Si potrebbe dimostrare che la (6.4.6) governa anche la propagazione del calore in un solido rigido, omogeneo, in quiete, per il quale la propagazione del calore sia isotropa e la legge di propagazione del calore sia quella di Fourier.

Il campo scalare noto  $F$  è legato alle sorgenti interne di calore, per cui se non vi sono sorgenti interne di calore  $F = 0$  e quindi si ottiene l'equazione:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta = = 0,$$

ossia l'equazione del calore omogenea.

Assumiamo ora che il calore si propaghi in condizioni stazionarie per cui  $\vartheta = \vartheta(P)$ , ossia la temperatura è indipendente dal tempo.

In tal caso la (6.4.6) si riduce a:

$$\Delta \vartheta = -F \quad \text{con } F = \frac{\rho_0}{\beta} r, \quad (6.4.7)$$

La (6.4.7) è detta **equazione di Poisson**.

Se non sono presenti sorgenti interne di calore, dalla (6.4.7) otteniamo:

$$\Delta \vartheta = 0. \quad (6.4.8)$$

che è l'**equazione di Laplace**.

Infine ci proponiamo di studiare la propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile che evolve in condizioni isobariche.

**Definizione 6.10.** *Diciamo che un fluido perfetto evolve in condizioni isobariche nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  se*

$$p(P, t) = p_0 = \text{costante} > 0 \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Se allora un fluido perfetto comprimibile evolve in condizioni isobariche, abbiamo:

$$\dot{p} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Consideriamo ancora l'equazione

$$\rho \vartheta \dot{h} = \rho r - \text{div } \vec{q}.$$

Assumiamo nelle equazioni di stato come variabili di stato fondamentali  $\vartheta$  e  $p$  per cui

$$h = h^*(\vartheta, p) \quad \Longrightarrow \quad \dot{h} = \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial h^*}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}.$$

Sostituendo nella (6.4.4) la relazione precedente insieme alla legge di propagazione del calore, otteniamo:

$$\rho \vartheta \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = \rho r + \text{div} (\beta \text{grad } \vartheta),$$

ossia

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \text{grad } \vartheta \cdot \vec{v} \right) - \text{div} (\beta \text{grad } \vartheta) = \rho r, \quad (6.4.9)$$

dove abbiamo tenuto presente la definizione della calore specifico a pressione costante  $C_p$ .

La (6.4.9) governa la propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile che evolve in condizioni isobariche. Notiamo che l'equazione è formalmente uguale a quella che governa la propagazione del calore in un fluido perfetto comprimibile che evolve in condizioni di incomprimibilità eccetto la presenza di  $C_p$  in luogo di  $C_v$ .

## 6.5 Piccoli moti di un fluido perfetto barotropico

Come abbiamo visto, per un fluido perfetto barotropico il problema del moto si imposta tramite le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ p &= g(\rho).\end{aligned}\tag{6.5.1}$$

Per definizione di fluido barotropico, si ha

$$\frac{dg}{d\rho}(\rho) > 0.$$

Poniamo:

$$B^2(\rho) := \frac{dg}{d\rho}(\rho).$$

Riscriviamo le (6.5.1) nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\rho' + \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \vec{v}' + \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ p &= g(\rho).\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

D'altra parte,

$$\operatorname{grad} p = \frac{dg}{d\rho} \operatorname{grad} \rho = B^2 \operatorname{grad} \rho.$$

Se facciamo l'ulteriore posizione  $\alpha(\rho) := \frac{B^2}{\rho}$ , possiamo scrivere:

$$\operatorname{grad} p = \rho \alpha \operatorname{grad} \rho.$$

Se sostituiamo nella (6.5.2)<sub>2</sub>, questa assume la forma:

$$\vec{v}' + \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} - \alpha \operatorname{grad} \rho.$$

Il moto del fluido barotropico, se aggiungiamo anche l'ipotesi  $\vec{F} = \vec{0}$ , ossia che siano assenti forze di massa esterne, è dunque governato dal seguente sistema di due equazioni in cui i campi incogniti sono  $\vec{v}$  e  $\rho$ :

$$\begin{aligned}\rho' + \text{grad } \rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \vec{v}' + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\alpha \text{grad } \rho.\end{aligned}\tag{6.5.3}$$

Il sistema (6.5.3) è non lineare e quindi di difficile risoluzione.

Noi ci limiteremo a studiare i "piccoli" moti di un fluido perfetto barotropico in assenza di forze di massa.

Vediamo di precisare cosa si intende con "piccoli" moti.

Supponiamo che in una configurazione  $\bar{\varphi}$  si abbia

$$\rho_{\bar{\varphi}} = \rho_0 = \text{costante} > 0$$

e che  $\bar{S}$  sia la regione occupata dal fluido nella configurazione  $\bar{\varphi}$ . Osserviamo che quel particolare moto in corrispondenza del quale il fluido resta nella posizione  $\bar{S}$  assunta nella configurazione  $\bar{\varphi}$  è un moto possibile in un qualsiasi intervallo di tempo  $[0, t_1]$ . Infatti la coppia costituita dai due campi

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \rho = \rho_0 \quad \text{in } \bar{S} \times [0, t_1]$$

è soluzione del sistema (6.5.3). Tale particolare moto è la quiete nella configurazione  $\bar{\varphi}$ .

Chiamiamo "piccoli" moti del fluido barotropico attorno alla quiete nella configurazione  $\bar{\varphi}$  quei moti per i quali  $\vec{v}$  e  $\rho$  sono tali che  $|\vec{v}|$ ,  $|\text{grad } \vec{v}|$ ,  $|\rho - \rho_0|$ ,  $|\text{grad } \rho|$  sono abbastanza prossimi a zero.

Più precisamente, fissato  $\delta \in (0, \delta_0)$ , supponiamo che in corrispondenza di questo esista una coppia  $(\vec{v}_\delta, \rho_\delta)$  soluzione del sistema (6.5.3) tale che:

$$|\vec{v}_\delta| \leq \delta, \quad |\text{grad } \vec{v}_\delta| \leq \delta, \quad |\rho_\delta - \rho_0| \leq \delta, \quad |\text{grad } \rho_\delta| \leq \delta.\tag{6.5.4}$$

Diremo che  $(\vec{v}_\delta, \rho_\delta)$  per  $\delta \rightarrow 0^+$  è un "piccolo" moto attorno alla quiete nella configurazione  $\bar{\varphi}$ .

Diamo ora una definizione che useremo subito dopo.

**Definizione 6.11.** *Sia data una famiglia di tensori di ordine  $r$ , con  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , dipendente dalla variabile reale  $\delta \in (0, \delta_0)$ :  $\{\tilde{t}_\delta\}_{\delta \in (0, \delta_0)}$ . Diciamo che  $\tilde{t}_\delta = o(\delta)$  per  $\delta \rightarrow 0^+$  se*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|\tilde{t}_\delta|}{\delta} = 0$$

o equivalentemente se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{t}_\delta}{\delta} = \tilde{0}.$$

Consideriamo un piccolo moto attorno alla quiete del fluido barotropico preso in esame, per il quale  $\vec{v}_\delta$  e  $\rho_\delta$  soddisfano alle disuguaglianze (6.5.4). Grazie a tali disuguaglianze possiamo in via approssimata omettere nel sistema non lineare (6.5.3) tutti i termini che sono  $o(\delta)$  per  $\delta \rightarrow 0^+$ , in modo da ottenere un sistema lineare.

Nel seguito per brevità ometteremo il pedice  $\delta$  in  $\vec{v}$  e  $\rho$ .

Osserviamo dapprima che:

$$\alpha(\rho) \operatorname{grad} \rho = \alpha(\rho_0) \operatorname{grad} \rho + [\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)] \operatorname{grad} \rho.$$

Ci proponiamo di mostrare che

$$[\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)] \operatorname{grad} \rho = o(\delta) \quad \text{per} \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Poiché  $|\rho - \rho_0| \leq \delta$ , si ha  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho = \rho_0$  da cui per continuità

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(\rho) = \alpha(\rho_0).$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|[\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)] \operatorname{grad} \rho|}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)| \frac{|\operatorname{grad} \rho|}{\delta} \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)| = 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$[\alpha(\rho) - \alpha(\rho_0)] \operatorname{grad} \rho = o(\delta) \quad \text{per} \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Possiamo perciò scrivere:

$$\alpha(\rho) \operatorname{grad} \rho = \alpha(\rho_0) \operatorname{grad} \rho + o(\delta) \quad \text{per} \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Mostriamo ora che:

$$\operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} = o(\delta) \quad \text{per} \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Infatti per la disuguaglianza di Schwarz e per le (6.5.4) si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v}|}{\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{grad} \rho| |\vec{v}|}{\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |\vec{v}| = 0,$$

per cui abbiamo ottenuto ciò che volevamo dimostrare.

In maniera analoga si ottiene che

$$\operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = o(\delta) \quad \text{per} \quad \delta \rightarrow 0^+,$$

tenendo presente che, come si dimostra,  $|\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}| \leq |\text{grad } \vec{v}| |\vec{v}|$ .

Infine

$$\rho \text{div } \vec{v} = \rho_0 \text{div } \vec{v} + (\rho - \rho_0) \text{div } \vec{v} = \rho_0 \text{div } \vec{v} + o(\delta) \text{ per } \delta \rightarrow 0^+.$$

Il risultato si deduce grazie alla disuguaglianza  $|\text{div } \vec{v}| \leq 3 |\text{grad } \vec{v}|$ , che ci limitiamo ad enunciare omettendo la dimostrazione.

Se ora riscriviamo il sistema (6.5.3) trascurando tutti i termini  $o(\delta)$ , otteniamo il seguente sistema lineare approssimato:

$$\begin{aligned} \rho' + \rho_0 \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \vec{v}' &= -\alpha(\rho_0) \text{grad } \rho. \end{aligned}$$

Ricordando che  $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $\vec{v}' = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ , il sistema può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\alpha(\rho_0) \text{grad } \rho. \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

A questo punto supponiamo  $\vec{v}, \rho \in \mathcal{C}^2$  ed applichiamo la divergenza ad entrambi i membri della (6.5.5)<sub>2</sub>, ottenendo:

$$\text{div } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\alpha(\rho_0) \text{div grad } \rho,$$

ossia

$$\text{div } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\alpha(\rho_0) \Delta \rho. \tag{6.5.6}$$

Deriviamo poi parzialmente rispetto al tempo entrambi i membri della (6.5.5)<sub>1</sub>:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \text{div } \vec{v}}{\partial t} = 0,$$

da cui invertendo la derivazione rispetto al tempo con l'operatore divergenza deduciamo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \text{div } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \tag{6.5.7}$$

Se ora nella (6.5.7) sostituiamo la (6.5.6), otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \rho_0 \alpha(\rho_0) \Delta \rho = 0$$

che, tenendo presente che  $\rho_0 \alpha(\rho_0) = B^2(\rho_0)$ , si può scrivere come:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - B^2(\rho_0) \Delta \rho = 0.$$

Dividendo entrambi i membri di questa equazione per  $B^2(\rho_0)$ , arriviamo a

$$\frac{1}{B^2(\rho_0)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta \rho = 0. \quad (6.5.8)$$

Ora osserviamo che  $B^2 = \frac{dg}{d\rho}$  ha le dimensioni fisiche del quadrato di una velocità. Infatti

$$[B^2] = \left[ \frac{dg}{d\rho} \right] = \left[ \frac{p}{\rho} \right] = \frac{M l^{-1} t^{-2}}{M l^{-3}} = l^2 t^{-2}.$$

Per tal motivo si suole porre:

$$B^2(\rho_0) = V^2$$

con  $V$  costante positiva avente le dimensioni di una velocità.

La (6.5.8) assume allora la forma:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta \rho = 0. \quad (6.5.9)$$

La (6.5.9) è l'**equazione delle onde o di d'Alembert omogenea**.

Abbiamo perciò stabilito che nei piccoli moti di un fluido perfetto barotropico in assenza di forze di massa la densità di massa soddisfa all'equazione delle onde omogenea con  $V$  data da

$$V = \sqrt{\frac{dg}{d\rho}(\rho_0)}. \quad (6.5.10)$$

Come vedremo nell'ultima parte del corso, la costante  $V$ , che ha le dimensioni fisiche di una velocità, rappresenta effettivamente una velocità anche dal punto di vista fisico, precisamente la velocità di avanzamento dei fronti d'onda.

Abbiamo osservato in precedenza che l'aria può essere riguardata come un gas perfetto e, poichè i suoi due calori specifici si possono ritenere costanti, quando evolve in condizioni isentropiche si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $p = g(\rho)$ , dove

$$g(\rho) = C \rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{costante} > 1.$$

Fra i suoi "piccoli" moti attorno alla quiete vi sono anche le "piccole" vibrazioni isentropiche che permettono la propagazione del suono. In tali condizioni la densità di massa dell'aria soddisfa all'equazione (6.5.9) con  $V$  data dalla (6.5.10) dove  $g$  ha l'espressione scritta sopra.

Poiché  $V$  rappresenta fisicamente la velocità di propagazione dei fronti d'onda, mediante la (6.5.10) possiamo determinare la velocità di propagazione del suono nell'aria, ad esempio al livello del mare, utilizzando i parametri fisici caratteristici dell'aria.

In primo luogo abbiamo:

$$\frac{dg}{d\rho}(\rho) = C \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{C \rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Se indichiamo con  $\rho_0$  la densità di massa dell'aria a livello del mare in condizioni di quiete, che si può ritenere costante, in corrispondenza avremo che pure la pressione è costante ed il suo valore  $p_0$  è dato da

$$p_0 = C \rho_0^\gamma.$$

Allora

$$V = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (6.5.11)$$

D'altra parte, per l'aria si hanno i seguenti dati:

$$\gamma \simeq 1,41, \quad \rho_0 \simeq 1,293 \text{ Kg m}^{-3}, \quad p_0 \simeq 101.367 \text{ Kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Sostituendo nella (6.5.11), deduciamo che la velocità di propagazione del suono nell'aria a livello del mare è

$$V \simeq 332 \text{ m s}^{-1},$$

in accordo con il valore di  $V$  che si ottiene sperimentalmente.



# Capitolo 7

## Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

### 7.1 Nozioni elementari sulle PDE

Lo studio dei fenomeni fisici è spesso ricondotto ad un problema differenziale nel quale i campi dipendono da  $P$ , cioè dal punto dello spazio geometrico in cui sono considerati, e dal tempo  $t$ . Se si passa alle loro rappresentazioni analitiche, queste dipendono da quattro variabili indipendenti reali:  $x_1, x_2, x_3, t$ ; le prime tre sono variabili spaziali poiché sono le coordinate del punto in cui i campi sono valutati, mentre  $t$  è la variabile temporale.

Nei problemi differenziali della Fisica Matematica intervengono perciò sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali.

In quest'ultima parte del corso ci limiteremo ad occuparci di singole equazioni alle derivate parziali.

Spesso per brevità invece di scrivere estesamente "equazioni differenziali alle derivate parziali" scriveremo semplicemente "PDE" (Partial Differential Equations).

**Definizione 7.1.** *Un'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  è una relazione tra  $x_1, \dots, x_n$ , una funzione incognita di tali variabili ed alcune sue derivate parziali.*

Noi considereremo soltanto PDE in cui le variabili indipendenti e la funzione incognita sono reali.

**Definizione 7.2.** *Diciamo che una PDE è di ordine  $m$  se  $m$  è l'ordine delle derivate di ordine massimo della funzione incognita che compaiono nell'equazione.*

**Esempio 7.1.** La più generale PDE di ordine 2 (o del II ordine) nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  è della forma:

$$f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0.$$

**Definizione 7.3.** Diciamo che una PDE è lineare se è lineare rispetto alla funzione incognita e a tutte le sue derivate.

**Esempio 7.2.** La più generale PDE lineare di ordine 2 nelle due variabili indipendenti  $x, y$  è della forma:

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = F(x, y), \end{aligned}$$

dove  $A, B, C, a, b, c, F$  sono funzioni note in un dominio  $S$  di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 7.3.** La più generale PDE lineare di ordine 2 nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  è della forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1, \dots, x_n)u = F(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

dove  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ),  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $C, F$  sono funzioni note in  $S$ , dominio di  $\mathbb{R}^n$ , e

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

La funzione  $F$  è detta termine noto e se  $F \equiv 0$ , l'equazione si dice omogenea.

**Esempio 7.4.** Prendiamo in esame le tre equazioni della Fisica Matematica che abbiamo incontrato nel capitolo precedente e scriviamo tali equazioni sostituendo ai campi scalari che intervenivano in esse le rappresentazioni analitiche.

#### Equazione delle onde o di d'Alembert

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (V = \text{costante} > 0).$$

E' una PDE del II ordine in 4 variabili indipendenti, lineare, a coefficienti costanti.

**Equazione del calore o di Fourier**

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (a = \text{costante} > 0).$$

E' una PDE del II ordine in 4 variabili indipendenti, lineare, a coefficienti costanti.

**Equazioni di Poisson e di Laplace**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= F(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= 0. \end{aligned}$$

Sono PDE del II ordine in tre variabili indipendenti, lineari, a coefficienti costanti; la seconda è omogenea.

**Definizione 7.4.** Diciamo che una PDE è *quasi-lineare* se è lineare rispetto alle derivate di ordine massimo.

**Esempio 7.5.** La più generale PDE del II ordine quasi-lineare nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  ha la forma seguente:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

dove  $\Phi$  è una funzione nota e  $A_{ij} = A_{ji}$ .

**Definizione 7.5.** Diciamo che una PDE quasi-lineare è *semilineare* se i coefficienti delle derivate di ordine massimo dipendono solo dalle variabili indipendenti.

**Esempio 7.6.** La più generale PDE del II ordine semilineare nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  ha la forma seguente:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

dove  $\Phi$  è una funzione nota e  $A_{ij} = A_{ji}$ .

**Esempi 7.7.** Consideriamo alcune equazioni del II ordine in due variabili indipendenti:

- $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .  
E'una PDE quasi-lineare, ma non semilineare.
- $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$ .  
E'una PDE semilineare, ma non lineare.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ .  
E'una PDE non lineare, non quasi-lineare.

**Definizione 7.6.** *Data una PDE di ordine  $m$  nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$ , la funzione  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  è detta soluzione classica dell'equazione nel dominio  $S$  di  $\mathbb{R}^n$  se  $u \in C^m(S)$  e, sostituita alla funzione incognita, soddisfa identicamente l'equazione in  $S$ , ossia riduce l'equazione ad un'identità rispetto alle variabili indipendenti in  $S$ .*

**Esempio 7.8.** Sia data l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0.$$

Mostriamo che la funzione

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

è soluzione classica dell'equazione in  $\mathbb{R}^3$ .

In primo luogo  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , anzi  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Inoltre in  $\mathbb{R}^3$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= 2x_1, & \frac{\partial u}{\partial x_2} &= 2x_2, & \frac{\partial u}{\partial x_3} &= -4x_3 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= -4. \end{aligned}$$

Se sostituiamo nell'equazione di Laplace, otteniamo:

$$2 + 2 - 4 = 0 \quad \text{identità in } \mathbb{R}^3.$$

**Osservazione 7.1.** La definizione data di soluzione classica di una PDE risulta piuttosto restrittiva in Fisica Matematica. Infatti nello studio dei problemi differenziali associati ai fenomeni fisici, i dati, desunti dall'esperienza, non hanno sempre forti proprietà di regolarità e dunque in questi casi non si possono

avere soluzioni fortemente regolari come quelle classiche. Per tal motivo si introducono altre definizioni di soluzione: *le soluzioni deboli o generalizzate* alle quali si richiedono condizioni di regolarità più deboli rispetto alle soluzioni classiche. Tuttavia nel nostro corso ci limiteremo a prendere in considerazione solo soluzioni classiche, poichè per utilizzare altri tipi di soluzioni occorrono strumenti matematici particolarmente raffinati.

## 7.2 Classificazione in un punto di una PDE semilineare del II ordine

Consideriamo una PDE semilineare del II ordine nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$  e dunque della forma:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (7.2.1)$$

La funzione  $\Phi$  è nota e i coefficienti  $A_{ij}$  sono assegnati in un dominio  $S$  di  $\mathbb{R}^n$ . Come abbiamo visto, tali coefficienti godono della proprietà di simmetria:

$$A_{ij}(x_1, \dots, x_n) = A_{ji}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in S.$$

Sia  $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$  e poniamo

$$\mathbb{A}(x) = [A_{ij}(x)] \quad \forall x \in S.$$

La matrice  $\mathbb{A}(x)$  è una matrice  $n \times n$  reale e simmetrica  $\forall x \in S$ .

Consideriamo un punto  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in S$  e per brevità usiamo la notazione seguente:

$$\mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{A}(x_0), \quad A_{ij}^{(0)} = A_{ij}(x_0).$$

La matrice  $\mathbb{A}^{(0)}$ , essendo reale e simmetrica, ammette  $n$  autovalori reali per un noto teorema di algebra lineare. Di questi autovalori ce ne saranno  $\alpha$  positivi,  $\beta$  negativi e  $\gamma$  nulli con  $\alpha + \beta + \gamma = n$ .

**Definizione 7.7.** *Se la matrice  $\mathbb{A}^{(0)}$  ammette  $\alpha$  autovalori positivi,  $\beta$  negativi e  $\gamma$  nulli, diremo che la PDE (7.2.1) nel punto  $x_0$  è del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .*

Noi considereremo dello stesso tipo due equazioni del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e  $(\beta, \alpha, \gamma)$ , poichè, cambiando i segni di entrambi i membri di una PDE, la nuova equazione così ottenuta è equivalente alla prima, ma i numeri degli autovalori positivi e degli autovalori negativi della matrice dei coefficienti delle derivate seconde sono scambiati rispetto all'equazione di partenza.

**Esempio 7.9.** Classifichiamo le tre equazioni della Fisica Matematica che abbiamo considerato nell'esempio 7.4.

### Equazione delle onde o di d'Alembert

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (V = \text{costante} > 0).$$

La matrice dei coefficienti delle derivate seconde è una matrice  $4 \times 4$  costante e diagonale. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = \frac{1}{V^2}.$$

L'equazione è del tipo  $(1, 3, 0)$  in tutto  $\mathbb{R}^4$ .

### Equazione del calore o di Fourier

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (a = \text{costante} > 0).$$

La matrice dei coefficienti delle derivate seconde è una matrice  $4 \times 4$  costante e diagonale. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 0.$$

L'equazione è del tipo  $(0, 3, 1)$  in tutto  $\mathbb{R}^4$ .

### Equazioni di Poisson e di Laplace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= F(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= 0. \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti delle derivate seconde è la stessa per entrambe le equazioni ed è una matrice  $3 \times 3$  costante e diagonale. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

L'equazione è del tipo  $(3, 0, 0)$  in tutto  $\mathbb{R}^3$ .

**Esempio 7.10.** Classifichiamo in  $\mathbb{R}^2$  l'equazione di Tricomi:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La matrice dei coefficienti delle derivate seconde non è costante, ma è diagonale per cui i suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = y, \quad \lambda_2 = 1.$$

L'equazione di Tricomi è perciò del tipo:

(2, 0, 0) in  $S^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ ,

del tipo (1, 0, 1) sull'asse  $x$  che ha equazione  $y = 0$ ,

del tipo (1, 1, 0) in  $S^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y < 0\}$ .

**Definizione 7.8.** Diciamo che nel punto  $x_0$  una PDE semilineare del II ordine in  $n$  variabili indipendenti è di tipo iperbolico se è del tipo  $(n - 1, 1, 0)$  o  $(1, n - 1, 0)$ , ossia la matrice  $\mathbb{A}^0$  ha tutti gli autovalori dello stesso segno tranne uno che ha segno opposto, è di tipo parabolico se è del tipo  $(n - 1, 0, 1)$  o  $(0, n - 1, 1)$ , ossia la matrice  $\mathbb{A}^0$  ha un autovalore nullo e tutti gli altri sono dello stesso segno, è di tipo ellittico se è del tipo  $(n, 0, 0)$  o  $(0, n, 0)$ , ossia la matrice  $\mathbb{A}^0$  ha tutti gli autovalori dello stesso segno.

Ovviamente se  $n > 2$ , i tre tipi considerati non esauriscono tutti i tipi possibili.

**Esempio 7.11.** Esaminiamo le equazioni degli esempi precedenti:

- l'equazione delle onde è di tipo iperbolico in  $\mathbb{R}^4$
- l'equazione del calore è di tipo parabolico in  $\mathbb{R}^4$ ;
- le equazioni di Laplace e di Poisson sono di tipo ellittico in  $\mathbb{R}^3$ ;
- l'equazione di Tricomi è di tipo ellittico in  $S^+$ , di tipo parabolico sull'asse  $x$ , di tipo iperbolico in  $S^-$ . Tale equazione si dice di **tipo misto** in  $\mathbb{R}^2$  perchè  $\mathbb{R}^2$  è ripartito dall'asse  $x$ , su cui l'equazione è di tipo parabolico, in due domini in uno dei quali è di tipo ellittico, mentre nell'altro è di tipo iperbolico. L'asse  $x$  è detto **varietà parabolica**.

## 7.3 Trasformazioni regolari delle variabili indipendenti

Sia data una PDE semilineare del II ordine in  $n$  variabili indipendenti:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (7.3.1)$$

con  $(x_1, \dots, x_n) \in S$  e  $A_{ij} = A_{ji}$ .

**Definizione 7.9.** Una trasformazione regolare delle variabili indipendenti relativa al dominio  $S \in \mathbb{R}^n$  è un'applicazione

$$\begin{aligned} \xi : S &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

che gode delle due seguenti proprietà:

1)  $\xi_h = \xi_h(x_1, \dots, x_n)$  sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^2(S)$ ;

2)  $\det \left[ \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \right] \neq 0$  in  $S$ .

Facciamo la seguente posizione:

$$\forall x \in S \quad \mathbb{J}(x) = \left[ \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \right] (x).$$

Se sono soddisfatte le condizioni appena elencate, almeno localmente, si possono esprimere le  $x_i$  in funzione di  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , cioè

$$x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{con } x_i \in \mathcal{C}^2.$$

Vediamo ora come muta la PDE (7.3.1) per una trasformazione regolare delle variabili indipendenti.

La trasformata di  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  è data da:

$$\bar{u} = \bar{u}(\xi_1, \dots, \xi_n) = u(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Viceversa

$$u(x_1, \dots, x_n) = \bar{u}(\xi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Esprimiamo in funzione delle nuove variabili  $\xi_1, \dots, \xi_n$  entrambi i membri della PDE (7.3.1).

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_h} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Sostituiamo le relazioni ottenute nell'equazione (7.3.1), portando a secondo membro tutti i termini con le derivate I della funzione  $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \left[ A_{ij}(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_i=x_i(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right] &= \\ &= \bar{\Phi} \left( \xi_1, \dots, \xi_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_n} \right). \end{aligned}$$



Se invertiamo l'ordine delle sommatorie, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{h,k=1}^n \left[ \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_i=x_i(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right] \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \\ = \bar{\Phi} \left( \xi_1, \dots, \xi_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_n} \right). \end{aligned}$$

Se ora poniamo:

$$\bar{A}_{hk}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_i=x_i(\xi_1, \dots, \xi_n)},$$

otteniamo:

$$\sum_{h,k=1}^n \bar{A}_{hk}(\xi_1, \dots, \xi_n) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \bar{\Phi} \left( \xi_1, \dots, \xi_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_n} \right).$$

Dunque l'equazione trasformata della PDE (7.3.1) è ancora semilineare e i coefficienti delle derivate seconde della funzione incognita godono della proprietà di simmetria:

$$\bar{A}_{hk} = \bar{A}_{kh} \quad \text{in } \xi(S) \quad \text{per } h, k = 1, \dots, n.$$

Infatti, omettendo per brevità gli argomenti delle funzioni, abbiamo:

$$\bar{A}_{hk} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n A_{ji} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \bar{A}_{kh},$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo scambiato il nome degli indici  $i$  e  $j$ .

A questo punto facciamo la posizione:

$$\bar{\mathbb{A}}(\xi) = [\bar{A}_{hk}(\xi)], \quad \text{essendo } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

**Proposizione 7.1.** *Se  $\xi$  è una trasformazione regolare delle variabili indipendenti per la PDE (7.3.1), si ha:*

$$\forall x \in S \quad \bar{\mathbb{A}}(\xi(x)) = \mathbb{J}(x) \mathbb{A}(x) \mathbb{J}^t(x). \quad (7.3.2)$$

Dimostrazione

Riprendiamo l'espressione dei coefficienti dell'equazione trasformata:

$$\bar{A}_{hk} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \right].$$

Osserviamo che  $\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i}$  è l'elemento che sta nella  $h$ -esima riga e  $i$ -esima colonna in  $\mathbb{J}$ . Inoltre, se teniamo presente che  $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$ , essendo l'elemento che sta nella  $k$ -esima riga e  $j$ -esima colonna in  $\mathbb{J}$  è anche l'elemento che sta nella  $j$ -esima riga e  $k$ -esima colonna in  $\mathbb{J}^t$ , vediamo che  $\sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$  è l'elemento che sta nella  $i$ -esima riga e  $k$ -esima colonna in  $\mathbb{A} \mathbb{J}^t$ . Concludiamo allora che  $\overline{A}_{hk}$  è l'elemento che sta nella  $h$ -esima riga e  $k$ -esima colonna in  $\mathbb{J}(\mathbb{A} \mathbb{J}^t) = \mathbb{J} \mathbb{A} \mathbb{J}^t$ , come ci proponevamo di dimostrare.

**Teorema 7.1.** *Una PDE semilineare del II ordine in ogni punto non muta di tipo per una trasformazione regolare delle variabili indipendenti.*

Dimostrazione

Sia data la PDE semilineare del II ordine (7.3.1) e supponiamo che questa in  $x_0$  sia del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Considerata una trasformazione regolare  $\xi$  delle variabili indipendenti, sia  $\xi_0 = \xi(x_0)$ .

Vogliamo mostrare che l'equazione trasformata in  $\xi_0$  è anch'essa del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Poniamo

$$\mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{A}(x_0), \quad \mathbb{J}^{(0)} = \mathbb{J}(x_0), \quad \overline{\mathbb{A}}^{(0)} = \overline{\mathbb{A}}(\xi_0 = \xi(x_0)).$$

La matrice  $\mathbb{A}^{(0)}$  è reale e simmetrica e quindi, per un teorema di algebra lineare, è diagonalizzabile, cioè esiste una matrice  $\mathbb{B}$   $n \times n$  invertibile tale che

$$\mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{B} \mathbb{D} \mathbb{B}^t$$

con  $\mathbb{D}$  matrice diagonale. Inoltre il numero degli autovalori positivi, negativi e nulli di  $\mathbb{A}^{(0)}$  è lo stesso degli autovalori positivi, negativi e nulli di  $\mathbb{D}$ . D'altra parte, per la (7.3.2), in  $x_0$  avremo:

$$\overline{\mathbb{A}}^{(0)} = \mathbb{J}^{(0)} \mathbb{A}^{(0)} \mathbb{J}^{(0)t} = \mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B} \mathbb{D} \mathbb{B}^t \mathbb{J}^{(0)t} = (\mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B}) \mathbb{D} (\mathbb{B}^t \mathbb{J}^{(0)t}) = (\mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B}) \mathbb{D} (\mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B})^t.$$

Ma  $\det(\mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B}) = \det \mathbb{J}^{(0)} \det \mathbb{B} \neq 0$  per cui la matrice  $\mathbb{J}^{(0)} \mathbb{B}$  diagonalizza la matrice  $\overline{\mathbb{A}}^{(0)}$  e la matrice che interviene nella diagonalizzazione è la matrice  $\mathbb{D}$  che interviene in quella di  $\mathbb{A}^{(0)}$ .

Allora il numero degli autovalori positivi, negativi e nulli di  $\overline{\mathbb{A}}^{(0)}$  è lo stesso di  $\mathbb{D}$  e di conseguenza anche di  $\mathbb{A}^{(0)}$ . Perciò se l'equazione di partenza è del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  in  $x_0$ , l'equazione trasformata è del tipo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  in  $\xi_0 = \xi(x_0)$ , c.v.d.

## 7.4 Varietà caratteristiche per una PDE semilineare del II ordine e I forma canonica

Premettiamo alcune definizioni e risultati di carattere generale.

**Definizione 7.10.** *Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  non vuoto e siano  $r, p$  due numeri naturali con  $r < n$ . Diciamo che  $M$  è una  $r$ -varietà o una varietà di dimensione  $r$  di classe  $\mathcal{C}^p$  se per ogni  $x_0 \in M$  esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  e  $n - r$  funzioni  $f_1, \dots, f_{n-r} \in \mathcal{C}^p(U)$  con matrice jacobiana  $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$  di rango massimo, ossia di rango  $n - r$ , in  $U$  tali che*

$$M \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, n - r\}.$$

Se  $p = 1$ , diremo semplicemente che  $M$  è una  $r$ -varietà omettendo " di classe  $\mathcal{C}^1$  ".

Consideriamo il caso particolare in cui  $r = n - 1$  e  $p = 1$ . Allora le funzioni che intervengono nella definizione 7.10 si riducono ad una sola funzione  $f$  e la sua matrice jacobiana è la matrice riga che ha come elementi le derivate parziali di  $f$ . Il richiedere che tale matrice abbia rango 1 in  $U$  equivale a richiedere  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $U$ .

**Definizione 7.11.** *Sia  $f = f(x)$  una funzione a valori reali definita in un dominio  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Fissato il numero reale  $c$ , chiamiamo insieme di livello di  $f$  corrispondente a  $c$  l'insieme:*

$$M_c = \{x \in S \mid f(x) = c\}.$$

Ovviamente  $M_c$  può essere l'insieme vuoto. Sia

$$C = \{c \in \mathbb{R} \mid M_c \neq \emptyset\}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 7.2.** *Sia  $f \in \mathcal{C}^1(S)$  ( $S = \text{dominio di } \mathbb{R}^n$ ) con  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $S$ . Allora la famiglia  $\{M_c\}_{c \in C}$  è una famiglia di  $(n - 1)$ -varietà.*

Dimostrazione

L'insieme di livello  $M_c$  per la funzione  $f$  sia tale che  $M_c \neq \emptyset$  e poniamo

$$F_c(x) = f(x) - c \quad \forall x \in S.$$

Ovviamente  $F_c \in \mathcal{C}^1(S)$  e

$$\text{grad } F_c(x) = \text{grad } f(x) \neq \vec{0} \quad \forall x \in S.$$

E' immediato verificare che  $M_c$  è una  $(n - 1)$  varietà. Infatti per ogni  $x_0 \in M_c$ , esistono un intorno di  $x_0$  e una funzione  $F \in \mathcal{C}^1(U)$  con  $\text{grad } F \neq \vec{0}$  in  $U$  tale che

$$M_c \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Basta prendere come  $U$  un qualsiasi intorno di  $x_0$  contenuto in  $S$  e  $F \equiv F_c$ .

**Definizione 7.12.** *Nelle ipotesi su  $f$  enunciate nella proposizione 7.2, chiameremo  $(n - 1)$ -varietà determinata in  $S$  dalla funzione  $f$  ogni suo insieme di livello  $\neq \emptyset$ .*

A questo punto possiamo dare la definizione di varietà caratteristica per una PDE semilineare del II ordine.

**Definizione 7.13.** *Data la PDE semilineare del II ordine (7.3.1), definita nel dominio  $S$ , sia  $f$  una funzione soddisfacente alle tre seguenti condizioni:*

- 1)  $f \in \mathcal{C}^1(S)$ ;
- 2)  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $S$ ;
- 3)  $f$  è soluzione in  $S$  dell'equazione:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

*detta equazione delle caratteristiche per la PDE (7.3.1).*

Allora ogni insieme di livello della funzione  $f$   $M_c \neq \emptyset$  è detto varietà caratteristica in  $S$  per la PDE (7.3.1).

**Teorema 7.2.** *Se la PDE semilineare del II ordine (7.3.1) in ogni punto del dominio  $S$  è di tipo ellittico, in  $S$  non ammette varietà caratteristiche reali.*

#### Dimostrazione

Preso un qualsiasi  $x \in S$ , consideriamo la seguente forma quadratica nelle variabili  $t_1, \dots, t_n$ :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) t_i t_j. \quad (7.4.1)$$

Poichè la (7.3.1) è di tipo ellittico in ogni punto di  $S$ , avremo che la matrice  $\mathbb{A}(x)$  è definita positiva o definita negativa. Dunque la forma quadratica (7.4.1) è a sua volta definita positiva o definita negativa per cui

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) t_i t_j = 0 \quad \implies \quad t_i = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

A questo punto consideriamo in  $S$  l'equazione delle caratteristiche associata alla (7.3.1):

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.$$

Il suo primo membro è la forma quadratica (7.4.1) con  $t_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Allora ne discende:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } S \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Quindi se  $f$  è soluzione in  $S$  dell'equazione delle caratteristiche, necessariamente è costante in  $S$  da cui  $\text{grad } f = \vec{0}$  in  $S$ . Perciò non possiamo trovare una soluzione reale dell'equazione delle caratteristiche il cui gradiente sia non nullo in  $S$  e dunque la PDE di tipo ellittico in  $S$  non ammette varietà caratteristiche reali.

Data la PDE semilineare del II ordine (7.3.1), supponiamo che si possa determinare una funzione  $f \in \mathcal{C}^2(S)$  con  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $S$  che sia soluzione dell'equazione delle caratteristiche. Allora per ogni  $c \in \mathbb{R}$ ,  $M_c$  se non è vuota, è varietà caratteristica dell'equazione.

Consideriamo una trasformazione regolare delle variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} \xi : S &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

tale che

$$\xi_1 = f(x_1, \dots, x_n), \quad \xi_h = \xi_h(x_1, \dots, x_n) \quad h = 2, \dots, n.$$

Le funzioni  $\xi_h$  per  $h = 2, \dots, n$  sono del tutto arbitrarie purché  $\xi$  sia una trasformazione regolare.

Come abbiamo visto, l'equazione trasformata è:

$$\sum_{h,k=1}^n \bar{A}_{hk}(\xi_1, \dots, \xi_n) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \bar{\Phi} \left( \xi_1, \dots, \xi_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_n} \right)$$

con

$$\bar{A}_{hk} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}, \quad h, k = 1, \dots, n.$$

Nel nostro caso particolare:

$$\bar{A}_{11} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } S,$$

poiché  $f$  è soluzione delle caratteristiche. L'equazione trasformata della (7.3.1) si riduce a :

$$2 \sum_{k=2}^n \bar{A}_{1k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} + \sum_{h,k=2}^n \bar{A}_{hk} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \bar{\Phi} \left( \xi_1, \dots, \xi_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_n} \right). \quad (7.4.2)$$

L'equazione (7.6.8) è detta **I forma canonica** per la PDE semilineare del II ordine (7.3.1) nel dominio  $S$ .

## 7.5 II forma canonica in un punto per una PDE semilineare del II ordine

Sia data la PDE semilineare del II ordine (7.3.1) con i coefficienti  $A_{ij}$  assegnati nel dominio  $S \in \mathbb{R}^n$ .

Introduciamo una trasformazione lineare invertibile delle variabili indipendenti relativa a  $\mathbb{R}^n$  cioè del tipo:

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

con

$$\xi_h = \sum_{i=1}^n c_{hi} x_i \quad h = 1, \dots, n \quad c_{hi} = \text{costante}, \quad \det [c_{hi}] \neq 0.$$

Consideriamo la restrizione di  $\xi$  a  $S$ , cioè  $\xi|_S$ . E' evidente che è una trasformazione regolare delle variabili indipendenti e si ha:

$$\mathbb{J}(x) = [c_{hi}] =: \mathbb{C} \quad \forall x \in S.$$

Sia poi  $x_0$  un punto di  $S$  e poniamo:  $\xi(x_0) = \xi_0$ .

Come abbiamo visto, la matrice dei coefficienti della trasformata della PDE (7.3.1) nel punto  $x_0$  è data da:

$$\bar{\mathbb{A}}^{(0)} = \mathbb{J}^{(0)} \mathbb{A}^{(0)} \mathbb{J}^t(0) = \mathbb{C} \mathbb{A}^{(0)} \mathbb{C}^t.$$

D'altra parte, essendo  $\mathbb{A}^{(0)}$  una matrice reale e simmetrica, per un teorema di algebra lineare, sappiamo che si può trovare una matrice  $\mathbb{C}$  invertibile tale che  $\bar{\mathbb{A}}^{(0)}$  sia diagonale e che gli elementi della diagonale principale  $\bar{A}_{hh}^{(0)}$  di tale matrice assumano solo i valori 1, -1, 0.

Se allora consideriamo una trasformazione lineare delle variabili indipendenti la

cui matrice  $\mathbb{C}$  goda di questa proprietà, l'equazione trasformata della (7.3.1) nel punto  $x_{i_0}$  assume la forma:

$$\sum_{h=1}^n \bar{A}_{hh}^{(0)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h^2} = \bar{\Phi}. \quad (7.5.1)$$

La (7.5.1) è detta **II forma canonica dell'equazione (7.3.1)** nel punto  $x_0$ .

Notiamo che la II forma canonica di una PDE in  $x_0$  dipende strettamente dal tipo dell'equazione in  $x_0$ . Infatti, per un teorema di algebra lineare, la distribuzione degli  $\bar{A}_{hh}^{(0)}$  tra i valori 1,  $-1$ , 0 è uguale alla distribuzione degli autovalori di  $\mathbb{A}^{(0)}$  tra valori positivi, negativi e nulli.

In particolare

- se l'equazione (7.3.1) nel punto  $x_0$  è di tipo **iperbolico**, eventualmente cambiando l'ordine delle nuove variabili e cambiando di segno ad entrambi i membri dell'equazione, la II forma canonica in  $x_0$  si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_1^2} - \sum_{h=2}^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h^2} = \bar{\Phi};$$

- se l'equazione (7.3.1) nel punto  $x_0$  è di tipo **parabolico**, eventualmente cambiando l'ordine delle nuove variabili e cambiando di segno ad entrambi i membri dell'equazione, la II forma canonica in  $x_0$  si può scrivere nel modo seguente:

$$\sum_{h=2}^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h^2} = \bar{\Phi};$$

- se l'equazione (7.3.1) nel punto  $x_0$  è di tipo **ellittico**, eventualmente cambiando di segno ad entrambi i membri dell'equazione, la II forma canonica in  $x_0$  si può scrivere nel modo seguente:

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_h^2} = \bar{\Phi}.$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 7.3.** *Se la PDE (7.3.1) non è a coefficienti costanti e  $n > 2$ , non si può trovare un'unica trasformazione regolare delle variabili indipendenti che riduca l'equazione alla II forma canonica in tutto il dominio  $S$  in cui l'equazione è dello stesso tipo e neppure in qualsiasi suo sottodominio, per quanto piccolo esso sia.*

Se  $n = 2$  e la PDE è dello stesso tipo in un dominio, sotto opportune condizioni di regolarità sui coefficienti delle derivate seconde, è possibile trovare una trasformazione regolare delle variabili indipendenti che riduca l'equazione alla II forma canonica, se non in tutto il dominio, almeno in un suo sottodominio.

Vediamo di provare questo risultato nel paragrafo successivo.

## 7.6 II forma canonica in un dominio per una PDE semilineare del II ordine in due variabili indipendenti

La più generale PDE del II ordine semilineare nelle due variabili indipendenti  $x, y$  si presenta nella forma:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.6.1)$$

dove  $(x, y) \in S$  dominio di  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 7.14.** *Si definisce discriminante della (7.6.1) in  $(x, y) \in S$*

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y).$$

**Proposizione 7.4.** *Se i coefficienti  $A, B, C$  della PDE (7.6.1) non si annullano mai simultaneamente in  $S$ , preso  $(x, y) \in S$ , l'equazione in  $(x, y)$*

- è di tipo iperbolico se  $\delta(x, y) > 0$ ;
- è di tipo parabolico se  $\delta(x, y) = 0$ ;
- è di tipo ellittico se  $\delta(x, y) < 0$ .

### Dimostrazione

Fissato  $(x, y) \in S$ , determiniamo gli autovalori della matrice dei coefficienti delle derivate seconde della (7.6.1) in tale punto. Per brevità omettiamo  $(x, y)$  nelle varie funzioni che intervengono.

Tali autovalori sono le radici dell'equazione di secondo grado nell'incognita  $\lambda$  che si ottiene sviluppando il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0,$$



che possiamo scrivere come

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda - \delta = 0.$$

Calcoliamo il discriminante  $\Delta$  di tale equazione:

$$\Delta = (A + C)^2 - 4AC + 4B^2 = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0.$$

Dunque l'equazione di secondo grado nell'incognita  $\lambda$  ammette due radici reali che denotiamo con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e che rappresentano gli autovalori della matrice dei coefficienti della PDE (7.6.1) in  $(x, y)$ .

Per le proprietà delle radici di un'equazione di secondo grado, abbiamo:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\delta.$$

Distinguiamo i tre casi:

- $\delta > 0$ .  
Allora  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  per cui i due autovalori sono non nulli e di segno opposto. L'equazione nel punto  $(x, y)$  è del tipo  $(1, -1, 0)$  e dunque di tipo iperbolico.
- $\delta = 0$ .  
Allora uno almeno dei due autovalori è nullo; supponiamo sia nullo  $\lambda_1$ . Proviamo che necessariamente  $\lambda_2 \neq 0$ .  
Infatti, essendo  $\delta = 0$ , segue  $B^2 = AC$ . D'altra parte, poiché  $\lambda_1 = 0$ , deduciamo  $\lambda_2 = A + C$ .  
Se  $B \neq 0$ , si ha  $A, C \neq 0$  e dello stesso segno per cui  $\lambda_2 \neq 0$ .  
Se  $B = 0$ , si ha che uno dei due coefficienti  $A$  e  $C$  è nullo, ma non lo sono entrambi poiché per ipotesi  $A, B, C$  non si annullano simultaneamente. Anche in questo caso  $\lambda_2 \neq 0$ .  
Quindi l'equazione nel punto  $(x, y)$  è del tipo  $(1, 0, 1)$  o  $(0, 1, 1)$  e perciò di tipo parabolico.
- $\delta < 0$ .  
Allora  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  per cui i due autovalori sono non nulli e dello stesso segno. L'equazione nel punto  $(x, y)$  è del tipo  $(2, 0, 0)$  o  $(0, 2, 0)$  e dunque di tipo ellittico.

La proposizione è così dimostrata.

Scriviamo l'equazione delle caratteristiche associata alla PDE (7.6.1):

$$A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + C \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (7.6.2)$$

Se riusciamo a trovare una funzione  $f \in \mathcal{C}^1(S)$  con  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $S$  e soluzione in  $S$  della (7.6.2), ogni suo insieme di livello  $M_c \neq \emptyset$  è varietà caratteristica in  $S$  per la PDE (7.6.1).

Ricordiamo che

$$M_c = \{(x, y) \in S \mid f(x, y) = c\}$$

e, se non è vuoto, è una varietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione 1.

Consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

tale che

$$1) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \xi, \eta \in \mathcal{C}^2(S);$$

2) posto

$$\mathbb{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \quad \forall (x, y) \in S,$$

sia

$$\det \mathbb{J} \neq 0 \quad \text{in } S.$$

Tale applicazione è una trasformazione regolare delle variabili indipendenti. Come sappiamo, la (7.6.1), in seguito alla trasformazione, assume la forma:

$$\bar{A} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi} \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)$$

con

$$\bar{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad u(x, y) = \bar{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

I coefficienti dell'equazione trasformata sono legati ai coefficienti dell'equazione di partenza dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2; \\ \bar{B} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \bar{C} &= A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il discriminante dell'equazione trasformata è dato da:

$$\bar{\delta} = \bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = (\det \mathbb{J})^2 \delta.$$

Poiché  $\det \mathbb{J} \neq 0$  in  $S$ , deduciamo che  $\bar{\delta}$  è nullo dove è nullo  $\delta$  e dove non è nullo ha lo stesso segno di  $\delta$ . Ciò conferma quanto abbiamo stabilito in generale, cioè che il tipo dell'equazione non cambia per una trasformazione regolare delle variabili indipendenti.

Nel seguito assumeremo che i coefficienti  $A, B, C$  non si annullino mai simultaneamente.

**Teorema 7.3.** *Sia data una PDE semilineare del II ordine in due variabili indipendenti di tipo iperbolico in tutti i punti del dominio  $S$ . Allora, se i coefficienti  $A, B, C \in \mathcal{C}^2(S)$ , si può trovare un'unica trasformazione regolare delle variabili indipendenti che riduca l'equazione all'II forma canonica, se non in tutto  $S$ , almeno in un suo sottodominio.*

Dimostrazione

Escludiamo per il momento il caso in cui

$$A = C \equiv 0 \quad \text{in } S.$$

Possiamo allora supporre che o  $A$  o  $C$  sia non nullo in tutto  $S$  senza perdere di generalità. Infatti, possiamo sempre trovare in  $S$  un punto  $(x_0, y_0)$  in cui uno almeno dei due coefficienti  $A$  e  $C$  sia diverso da 0. Per fissare le idee, supponiamo  $A(x_0, y_0) \neq 0$ . Poiché  $A \in \mathcal{C}^2(S)$ , in particolare è continuo in  $S$ . Allora per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di  $(x_0, y_0)$  nei punti del quale  $A$  è non nullo. Tenendo presente la tesi del teorema, possiamo limitarci a considerare tale intorno che per semplicità denoteremo ancora con  $S$ .

Consideriamo l'equazione delle caratteristiche (7.6.2) e moltiplichiamone entrambi i membri per  $A$  ottenendo un'equazione equivalente a quella di partenza poichè  $A \neq 0$  in  $S$ :

$$A^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2AB \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + AC \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (7.6.3)$$

Com'è facile verificare, la (7.6.3) si può scrivere nella forma:

$$\left[ A \frac{\partial f}{\partial x} + (B + \sqrt{\delta}) \frac{\partial f}{\partial y} \right] \left[ A \frac{\partial f}{\partial x} + (B - \sqrt{\delta}) \frac{\partial f}{\partial y} \right] = 0. \quad (7.6.4)$$

Così la (7.6.3), equivalente all'equazione delle caratteristiche, dà luogo a due equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

dove

$$\mu_1 = \frac{B + \sqrt{\delta}}{A}, \quad \mu_2 = \frac{B - \sqrt{\delta}}{A}.$$

Se  $f$  è soluzione in  $S$  dell'equazione delle caratteristiche è anche soluzione in  $S$  di una delle (7.6.5) e viceversa.

Dunque se riusciamo a trovare una funzione  $f \in \mathcal{C}^1(S)$  con  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $S$  che sia soluzione in  $S$  di una delle due equazioni (7.6.5), avremo che i suoi insiemi di livello diversi dall'insieme vuoto sono varietà caratteristiche per la (7.6.1).

Il nostro scopo è dapprima di provare che la (7.6.1), essendo di tipo iperbolico in  $S$ , ammette due distinte famiglie di varietà caratteristiche se non in  $S$  almeno in un suo sottodominio.

A tal fine enunciamo, omettendone la dimostrazione, il seguente

**Lemma 7.1.** *Data la funzione  $f \in \mathcal{C}^1(S)$  con  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  in  $S$ , condizione necessarie e sufficiente affinché la famiglia dei suoi insiemi di livello  $\{M_c\}_{c \in \mathcal{C}}$  sia una famiglia di varietà caratteristiche per la PDE (7.6.1) di tipo iperbolico in  $S$  è che  $f(x, y) = c$  sia soluzione generale in forma implicita in  $S$  di una delle due equazioni differenziali ordinarie:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \mu_1(x, y) \\ \frac{dy}{dx} &= \mu_2(x, y). \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

Le (7.6.6) sono dette **equazioni differenziali ordinarie delle caratteristiche**.

Ricordiamo che se  $f \in \mathcal{C}^1(S)$  con  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  in  $S$ ,  $f(x, y) = c$  è soluzione generale in forma implicita in  $S$  dell'equazione differenziale ordinaria in forma normale:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{7.6.7}$$

dove  $F$  è una funzione assegnata continua nel dominio  $S$ , se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

- 1) se  $y = y(x)$  è una qualsiasi soluzione della (7.6.7) nell'intervallo  $I$ , allora esiste una costante  $c$  tale che

$$f(x, y(x)) = c \quad \forall x \in I;$$

- 2) se la funzione  $y = y(x)$  è definita implicitamente nell'intervallo  $I$  dall'equazione:

$$f(x, y) - c_0 = 0,$$

dove  $c_0 = f(x_0, y_0)$  con  $(x_0, y_0)$  di  $S$ , ossia

$$f(x, y(x)) = c_0 \quad \forall x \in I,$$

allora  $y = y(x)$  è soluzione in  $I$  della (7.6.7).

Nella dimostrazione del lemma 7.6.7 si prova che condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x, y) = c$  sia soluzione generale in forma implicita in  $S$  di una delle due equazioni differenziali ordinarie (7.6.6) è che  $f$  sia soluzione di una delle equazioni alle derivate parziali (7.6.5) e precisamente di quella in cui compare lo stesso coefficiente  $\mu_\alpha$  che compare nella equazione differenziale ordinaria.

Poiché, per ipotesi,  $A, B, C \in \mathcal{C}^2(S)$  e  $A \neq 0$  in  $S$ , si ha che  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^2(S)$ . Per risultati relativi alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, deduciamo che ciascuna delle equazioni (7.6.6) ammette soluzione generale se non in  $S$ , almeno in un suo sottodominio  $S'$ , della forma:  $f_1(x, y) = c_1$  (la (7.6.6)<sub>1</sub>),  $f_2(x, y) = c_2$  (la (7.6.6)<sub>2</sub>) con

$$f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(S'), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \text{ in } S'.$$

Quindi per il lemma 7.1  $f_1$  e  $f_2$  generano due famiglie di varietà caratteristiche per la PDE (7.6.1).

Consideriamo ora la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned} S' &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

con

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y).$$

E' facile verificare che è una trasformazione regolare delle variabili indipendenti. Infatti

- $\xi, \eta \in \mathcal{C}^2(S')$  per come abbiamo scelto  $f_1, f_2$ ;
- inoltre

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \\ &= (\mu_2 - \mu_1) \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2 \frac{\sqrt{\delta}}{A} \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} \neq 0 \text{ in } S'. \end{aligned}$$

Nell'ottenere tale risultato abbiamo sfruttato il fatto che  $f_1$  e  $f_2$  sono soluzioni delle equazioni (7.6.5).

Perciò la trasformazione è regolare e possiamo considerare l'equazione trasformata che sarà ancora semilineare.

I coefficienti  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  dell'equazione trasformata sono:

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} + C \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 = 0;$$

$$\bar{C} = A \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} + C \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

La PDE (7.6.1) si riduce a:

$$2\bar{B} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi}. \quad (7.6.8)$$

D'altra parte,  $\bar{\delta} > 0$  poiché  $\delta > 0$  ed essendo  $\bar{\delta} = \bar{B}^2$ , abbiamo  $\bar{B} \neq 0$ .

Possiamo allora riscrivere la (7.6.8) dividendo entrambi i membri per  $2\bar{B}$  e ponendo  $\bar{\Phi}_1 = \frac{\bar{\Phi}}{2\bar{B}}$ :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi}_1. \quad (7.6.9)$$

La (7.6.9) rappresenta la **I forma canonica** della PDE (7.6.1) di tipo iperbolico. Riconsideriamo il caso che avevamo escluso all'inizio della dimostrazione del teorema:  $A = C \equiv 0$  in  $S$ .

Perciò l'equazione si presenta nella forma:

$$2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi. \quad (7.6.10)$$

Poiché  $\delta = B^2 > 0$ , si ha  $B \neq 0$  in  $S$ . Allora, dividendo entrambi i membri per  $2B$ , la (7.6.10) si scrive come:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi_1 \quad \text{con} \quad \Phi_1 = \frac{\Phi}{2B},$$

per cui l'equazione è già ridotta alla I forma canonica.

Vediamo ora di arrivare alla II forma canonica. A tal fine consideriamo la trasformazione lineare :

$$\begin{aligned} S^* &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\xi, \eta) &\longmapsto (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

con

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta,$$

dove  $S^*$  è il trasformato di  $S'$  tramite la prima trasformazione delle variabili indipendenti.

E' evidente che la nuova trasformazione è regolare.

Infatti  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^2(S^*)$ , anzi sono di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Inoltre:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} & \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} & \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ in } S^*.$$

Poniamo  $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha, \beta)$  la funzione trasformata della funzione  $\bar{u}$  per cui

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)).$$

Si può verificare facilmente che

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \beta^2}.$$

Sostituendo tale risultato nella (7.6.9) ed esprimendo tutti i termini in funzione delle nuove variabili, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \beta^2} = \tilde{\Phi} \left( \alpha, \beta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} \right). \quad (7.6.11)$$

La (7.6.11) è la **II forma canonica della PDE (7.6.1) di tipo iperbolico**.

Si può dimostrare che se la PDE iniziale è lineare, lo è anche la sua II forma canonica.

Se la II forma canonica si riduce a:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \beta^2} = \tilde{F}(\alpha, \beta),$$

tale equazione prende il nome di **equazione delle corde vibranti**.

**Teorema 7.4.** *Sia data una PDE semilineare del II ordine in due variabili indipendenti di tipo parabolico in tutti i punti del dominio  $S$ . Allora, se i coefficienti  $A, B, C \in \mathcal{C}^2(S)$ , esiste un'unica trasformazione regolare delle variabili indipendenti che riduca l'equazione alla II forma canonica, se non in tutto  $S$ , almeno in un suo sottodominio.*

Dimostrazione

Per ipotesi

$$\delta = B^2 - AC = 0 \quad \text{in } S.$$

Ricordiamo che abbiamo assunto inizialmente che  $A, B, C$  non si annullano mai simultaneamente. Allora  $A$  e  $C$  non possono annullarsi entrambi in uno stesso punto di  $S$ , poichè in tale punto sarebbe nullo anche  $B$ . Dunque preso un qualsiasi punto  $(x_0, y_0) \in S$ , uno almeno dei due coefficienti  $A$  e  $C$  è non nullo. Per fissare le idee, sia  $A$  non nullo. Ragionando come nel teorema 7.3, vediamo che non è restrittivo supporre  $A \neq 0$  in  $S$ .

Se moltiplichiamo per  $A$  entrambi i membri dell'equazione delle caratteristiche (7.6.2), tenendo presente che per ipotesi  $AC = B^2$ , otteniamo che l'equazione risultante si può scrivere nella forma:

$$\left[ A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 = 0.$$

Dunque nel caso da noi considerato l'equazione delle caratteristiche è equivalente alla PDE lineare del I ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{con} \quad \mu = \frac{B}{A}. \quad (7.6.12)$$

Si noti che la (7.6.12) è l'equazione cui si riducono le (7.6.5) se  $\delta = 0$  in  $S$ . Possiamo allora applicare i risultati visti nel caso precedente ed in particolare il lemma 7.1 per cui concludiamo che la PDE di tipo parabolico ammette, se non in tutto  $S$ , almeno in un suo sottodominio  $S'$  una famiglia di varietà caratteristiche generate dalla funzione  $f \in \mathcal{C}^2(S')$  con  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  in  $S'$  tale che  $f(x, y) = c$  (con  $c = \text{costante}$ ) sia soluzione generale in forma implicita in  $S'$  dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \mu.$$

Consideriamo ora la trasformazione delle variabili indipendenti

$$\begin{aligned} S' &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

con

$$\xi = f(x, y) \quad \eta = x.$$

Tale trasformazione è regolare poichè  $\xi, \eta \in \mathcal{C}^2(S')$  ed inoltre

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ in } S'.$$



L'equazione trasformata ha i seguenti coefficienti:

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + C \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0;$$

$$\bar{B} = A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

$$\bar{C} = A \neq 0.$$

Perciò l'equazione trasformata si riduce a

$$\bar{C} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi}$$

che, dopo aver diviso entrambi i membri per  $\bar{C}$  e aver posto:  $\bar{\Phi}_1 = \frac{\bar{\Phi}}{\bar{C}}$ , fornisce:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi}_1 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right). \quad (7.6.13)$$

La (7.6.13) è la **II forma canonica della PDE di tipo parabolico**.

Si osservi che la II forma canonica coincide con la I forma canonica poiché è stata ottenuta ponendo  $\xi = f$  dove  $f$  è la funzione che determina le varietà caratteristiche dell'equazione.

Se l'equazione iniziale è lineare, lo è anche la II forma canonica.

Infine enunciamo, omettendone la dimostrazione, il seguente

**Teorema 7.5.** *Sia data una PDE semilineare del II ordine in due variabili indipendenti di tipo ellittico in tutti i punti del dominio  $S$ . Allora, se i coefficienti  $A, B, C$  sono funzioni analitiche in  $S$ , esiste un'unica trasformazione regolare delle variabili indipendenti che riduca l'equazione all'II forma canonica, se non in tutto  $S$ , almeno in un suo sottodominio, cioè che fornisca per l'equazione trasformata la seguente forma:*

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi}_1 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right). \quad (7.6.14)$$

Se  $\bar{\Phi}_1 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) = \bar{F}(\xi, \eta)$ , otteniamo l'equazione di Poisson in due variabili indipendenti.

Se  $\bar{\Phi}_1 \equiv 0$ , l'equazione risultante è l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti.

## 7.7 Problemi ai limiti della Fisica Matematica.

**Definizione 7.15.** *Definiamo soluzione generale di una PDE l'insieme di tutte le sue soluzioni, escluse certe soluzioni particolari.*

E' la stessa definizione che si dà per una equazione differenziale ordinaria.

D'altra parte, data un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m$  nella funzione incognita  $y = y(x)$  e quindi della forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

la sua soluzione generale, se esiste in forma esplicita, è una famiglia di funzioni che dipende da  $m$  costanti arbitrarie:

$$y = y(x, C_1, \dots, C_m).$$

Si potrebbe dimostrare che per una PDE di ordine  $m$  in  $n$  variabili indipendenti la soluzione generale, se esiste, è una famiglia di funzioni che dipende da  $m$  funzioni arbitrarie, ciascuna delle quali è funzione di  $n - 1$  variabili indipendenti.

**Esempio 7.12.** Sia data la seguente PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

E' una PDE del II ordine in due variabili indipendenti con funzione incognita  $u = u(x, y)$ .

Ci proponiamo di determinarne la soluzione generale in  $\mathbb{R}^2$ .

Supponiamo che  $u = u(x, y)$  sia soluzione dell'equazione in  $\mathbb{R}^2$ . Perciò abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

da cui

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x)$$

Integrando rispetto a  $x$  otteniamo:

$$u(x, y) = f(x) + g(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove  $f(x)$  è una primitiva di  $\varphi(x)$  e  $g(y)$  è una funzione arbitraria di  $y$ .

Dunque se  $u$  è soluzione dell'equazione, è la somma di una funzione solo di  $x$  e di una funzione solo di  $y$ .

Viceversa, ogni funzione somma di una funzione solo di  $x$  e di una funzione solo

di  $y$  è soluzione dell'equazione.

Abbiamo perciò ottenuto che la soluzione generale dell'equazione data è la famiglia di funzioni:

$$u(x, y) = f(x) + g(y)$$

che dipende dalle due funzioni arbitrarie  $f$  e  $g$ , ciascuna delle quali è funzione di una sola variabile.

Ovviamente, se ci limitiamo a considerare solo soluzioni classiche, richiediamo che  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ .

In genere, come anche avviene per le equazioni differenziali ordinarie, non interessa molto determinare la soluzione generale di una PDE, ma determinarne delle soluzioni particolari che soddisfino ad ulteriori condizioni. Come è ben noto, per le equazioni differenziali ordinarie è di importanza fondamentale il problema di Cauchy, nel quale all'equazione sono associate le condizioni iniziali o di Cauchy.

Le condizioni associate alle PDE sono dette **condizioni ai limiti**. Tuttavia c'è una notevole differenza tra equazioni differenziali ordinarie e PDE: infatti per le prime si deduce in primo luogo la soluzione generale e poi si determinano i valori delle costanti arbitrarie che appaiono in essa in modo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali o le altre eventuali condizioni che sono associate all'equazione. Invece per risolvere un problema ai limiti per una PDE si cerca direttamente la soluzione particolare senza trovare prima quella generale. Infatti, in tal caso, per trovare la soluzione particolare a partire da quella generale, bisognerebbe determinare delle funzioni e non semplicemente delle costanti come per le equazioni differenziali ordinarie. Tale operazione matematica è estremamente complessa.

Le condizioni ai limiti per una PDE di ordine  $m$  in  $n$  variabili indipendenti consistono nell'assegnare su una  $(n - 1)$ -varietà di  $\mathbb{R}^n$  i valori assunti dalla funzione incognita e da alcune delle sue derivate, al massimo fino all'ordine  $m - 1$ .

Osserviamo che in Fisica Matematica nelle PDE intervengono coordinate spaziali ed eventualmente anche la variabile temporale. Dunque nelle equazioni della Fisica Matematica le variabili indipendenti sono  $x_1, \dots, x_n, t$  dove le prime  $n$  variabili sono variabili spaziali, mentre l'ultima variabile, cioè  $t$ , è la variabile temporale. Per tale motivo in Fisica Matematica le condizioni ai limiti sono di due tipi:

- **condizioni iniziali:** condizioni assegnate sull'iperpiano  $t = t_0$
- **condizioni al contorno:** condizioni assegnate sul bordo  $\partial S$  del dominio  $S \subset \mathbb{R}^n$  descritto da  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Un problema ai limiti per una PDE consiste nel determinare in un'opportuna

regione la funzione che è soluzione dell'equazione e che soddisfa alle condizioni ai limiti.

I principali problemi ai limiti della Fisica Matematica si possono raggruppare in tre classi:

1) **Problemi di Cauchy o ai valori iniziali** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico.

Tali equazioni governano fenomeni di evoluzione e le variabili indipendenti sono  $x_1, \dots, x_n, t$ . La soluzione è una funzione  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$  definita in  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  e all'equazione sono associate solo condizioni iniziali.

2) **Problemi al contorno** per equazioni di tipo ellittico.

Tali equazioni governano in genere fenomeni stazionari in cui il tempo non interviene e le variabili indipendenti sono  $x_1, \dots, x_n$ . La soluzione è una funzione  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  definita in  $\bar{S}$  dove  $S$  è un dominio di  $\mathbb{R}^n$ . All'equazione sono associate solo condizioni al contorno relative a  $\partial S$ .

3) **Problemi di tipo misto** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico.

Le variabili indipendenti sono  $x_1, \dots, x_n, t$ . La soluzione è una funzione  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$  definita in  $\bar{S} \times [0, T]$ , dove  $S$  è un dominio di  $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^n$  e  $[0, T]$  è un intervallo di tempo. All'equazione sono associate condizioni iniziali relative all'iperpiano  $t = 0$  e condizioni al contorno relative a  $\partial S \times [0, T]$ .

## 7.8 Problema di Cauchy per una generica PDE semilineare di ordine 2.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto cosa si intende per problema di Cauchy in Fisica Matematica. Vediamo ora di formulare questo problema più in generale per una PDE semilineare del II ordine in  $n$  variabili indipendenti  $x_1, \dots, x_n$ .

Sia data l'equazione:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (7.8.1)$$

relativamente al dominio  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

Consideriamo la  $(n - 1)$ -varietà  $\Gamma$  contenuta in  $S$ .

Il problema di Cauchy per l'equazione (7.8.1) relativo a  $\Gamma$  consiste nel determinare in un intorno di  $\Gamma$ , contenuto in  $S$ , la funzione  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  soluzione

dell'equazione in tale intorno e soddisfacente alle due ulteriori condizioni, dette condizioni di Cauchy:

$$u|_{\Gamma} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}}|_{\Gamma} = \varphi_1$$

dove  $\varphi_0, \varphi_1$  sono funzioni assegnate su  $\Gamma$  e  $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(x)$  è un versore definito  $\forall x \in \Gamma$  che non è mai tangente a  $\Gamma$  in  $x$ .

Le funzioni  $\varphi_0, \varphi_1$  sono dette *dati di Cauchy* e la varietà  $\Gamma$  *varietà portante i dati di Cauchy*.

(Si osservi che contraddistinguiamo gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  che si devono riguardare come vettori e non come punti mediante la freccia che finora abbiamo usato solo per i vettori di  $\vec{\mathcal{E}}$ .)

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 7.5.** *Se la varietà  $\Gamma$  portante i dati di Cauchy è una varietà caratteristica per l'equazione (7.8.1), in generale il problema di Cauchy non ammette soluzione.*

Infatti si dimostra che se i due dati di Cauchy  $\varphi_0, \varphi_1$  sono sufficientemente regolari, non possono essere assegnati arbitrariamente perchè sono legati tra loro mediante una relazione che deve essere necessariamente soddisfatta nei punti di  $\Gamma$  e quindi non sono indipendenti.

## 7.9 Problemi ai limiti ben posti.

**Definizione 7.16.** *Se  $K_1, K_2$  sono due classi di funzioni tali che  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , diciamo che un problema ai limiti della Fisica Matematica è ben posto nel senso di Hadamard nella classe  $K_1 \cap K_2$  se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

- 1) *la soluzione esiste in  $K_1$*
- 2) *la soluzione è unica nella classe  $K_2$*
- 3) *la soluzione dipende con continuità secondo una data topologia dai dati del problema.*

Spieghiamo di specificare meglio la terza condizione.

Consideriamo un dato problema ai limiti e rivolgiamo la nostra attenzione ad un particolare insieme di dati

$$\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, l}.$$

Tali dati possono essere dati iniziali o dati al contorno o i coefficienti o il termine noto dell'equazione.

Molto spesso i dati  $\varphi_j$  per  $j = 1, \dots, l$  si possono riguardare appartenenti ad uno spazio vettoriale reale normato  $\mathbb{N}_1$ . Sia  $\|\varphi_j\|_1$  la norma in  $\mathbb{N}_1$  di  $\varphi_j$ .

Assumiamo poi che la soluzione  $u$  del problema la si cerchi in un altro spazio vettoriale reale normato  $\mathbb{N}_2$  e denotiamo con  $\|u\|_2$  la norma di  $u$  in  $\mathbb{N}_2$ .

Sia  $u$  la soluzione del dato problema corrispondente all'insieme di dati  $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, l}$  e sia  $u^*$  la soluzione in  $\mathbb{N}_2$  del problema che si ottiene da quello precedente con la sostituzione dell'insieme di dati  $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, l}$  con un nuovo insieme di dati  $\{\varphi_j^*\}_{j=1, \dots, l}$  ( $\varphi_j^* \in \mathbb{N}_1$  per  $j = 1, \dots, l$ ), lasciando inalterati i dati restanti.

**Definizione 7.17.** *Nelle ipotesi dette sopra, diciamo che la soluzione del problema ai limiti considerato dipende con continuità dall'insieme di dati  $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, l}$  se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|\varphi_j - \varphi_j^*\|_1 < \delta \text{ per } j = 1, \dots, l \implies \|u - u^*\|_2 < \epsilon.$$

Quando si affronta un problema ai limiti della Fisica Matematica è evidente l'importanza delle due prime condizioni, cioè l'esistenza e l'unicità della soluzione.

In Fisica Matematica ha notevole importanza anche la terza condizione, cioè la dipendenza continua dai dati della soluzione. Infatti nei problemi ai limiti che si studiano in Fisica Matematica i dati, essendo dedotti empiricamente, sono soggetti sempre ad un margine di errore ed è dunque importante sapere in quale misura un errore nei dati influisce sulla soluzione.

Osserviamo che la buona posizione di un problema ai limiti dipende dalla scelta dei due spazi normati  $\mathbb{N}_1$  e  $\mathbb{N}_2$ , ossia dalla scelta della topologia. Uno stesso problema può essere ben posto secondo una certa topologia e non ben posto secondo un'altra.

Secondo Hadamard, lo studio di tutti i fenomeni fisici, se vengono descritti mediante modelli matematici corretti, deve portare a problemi ben posti. In realtà si conoscono diversi fenomeni fisici che, nonostante la correttezza del modello matematico, portano a problemi non ben posti, in particolare nella Scienza della Terra.

# Capitolo 8

## Equazione di Laplace

### 8.1 Generalità e funzioni armoniche.

L'equazione di Laplace in tre variabili indipendenti  $x_1, x_2, x_3$  si presenta nella forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad (8.1.1)$$

che, facendo uso dell'operatore laplaciano, si può anche scrivere brevemente come

$$\Delta u = 0.$$

E' un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, omogenea, di tipo ellittico in tutto  $\mathbb{R}^3$ , come abbiamo visto nel capitolo precedente.

La (8.1.1) in genere governa fenomeni stazionari, ossia indipendenti dal tempo. Eventualmente il tempo, ossia la variabile temporale  $t$ , può apparire come parametro.

Come abbiamo mostrato nel Capitolo 6, l'equazione di Laplace è soddisfatta dal potenziale cinetico di un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, nel caso in cui la velocità provenga da un potenziale scalare. In tal caso  $t$  compare come parametro.

La (8.1.1) governa anche la propagazione del calore in condizioni stazionarie in un solido rigido, in quiete, omogeneo, per il quale valga la legge di Fourier, in assenza di sorgenti interne di calore. In tal caso la funzione incognita  $u$  rappresenta la temperatura.

L'equazione di Laplace è soddisfatta dal potenziale gravitazionale dove non sono presenti masse, dal potenziale elettrostatico dove non ci sono cariche elettriche e dal potenziale magnetostatico.

La teoria dell'equazione di Laplace è strettamente correlata alla teoria delle funzioni armoniche.

**Definizione 8.1.** Diciamo che la funzione  $u$  a valori reali è armonica in un dominio  $S \subset \mathbb{R}^3$  se  $u \in \mathcal{C}^2(S)$  e  $\Delta u = 0$  in  $S$ , ossia se  $u$  è soluzione classica in  $S$  dell'equazione di Laplace.

**Definizione 8.2.** Dato il dominio  $S_e$  di  $\mathbb{R}^3$ , diciamo che è un dominio esterno se è il complementare (rispetto a  $\mathbb{R}^3$ ) di un compatto.

Un dominio esterno è dunque un dominio illimitato la cui frontiera è limitata.

**Definizione 8.3.** Diciamo che la funzione  $u = u(x)$ , definita in un dominio esterno  $S_e \in \mathbb{R}^3$ , è armonica all'infinito se soddisfa alle due condizioni seguenti:

i)  $u$  è armonica in  $S_e$

ii)  $u$  tende uniformemente a zero quando  $x$  tende all'infinito, ossia

$$\forall \epsilon > 0 \exists r_\epsilon > 0 \text{ tale che } \forall x \in S_e \text{ con } |x| > r_\epsilon \text{ si ha } |u(x)| < \epsilon$$

$$\text{con } |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}.$$

**Esempio 8.1.** Sia  $u(x)$  una funzione lineare affine, cioè della forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

con  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $b$  costanti.

Tale funzione è armonica in ogni dominio di  $\mathbb{R}^3$ , ma non è armonica all'infinito in un dominio esterno, a meno che non sia la funzione identicamente nulla.

**Esempio 8.2.** Sia  $x_0$  un punto fissato di  $\mathbb{R}^3$  e consideriamo un dominio  $S \subset \mathbb{R}^3$  che non contenga  $x_0$ .

Definiamo in  $S$  la seguente funzione:

$$\forall x \in S \quad u(x) = \frac{1}{|x - x_0|} =: \frac{1}{r(x)}.$$

Si può verificare facilmente, procedendo come abbiamo visto per il corrispondente campo scalare definito in un dominio dello spazio geometrico, che  $u$  è armonica in  $S$  ed è armonica all'infinito se  $S$  è un dominio esterno.

**Definizione 8.4.** Si definisce soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^3$  la funzione  $\frac{1}{4\pi r}$ .



Stabiliamo ora alcune formule integrali in  $\mathbb{R}^3$  che ci saranno utili.

**Lemma 8.1. Lemma di Green.** *Se  $S$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^3$  e  $u, v \in \mathcal{C}^2(S) \cap \mathcal{C}^1(\bar{S})$ , allora:*

$$\int_S \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dS = \int_{\partial S} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma - \int_S u \Delta v \, dS, \quad (8.1.2)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S$ .

Dimostrazione

Poniamo

$$\forall x \in \bar{S} \quad \vec{w}(x) = u(x) \text{grad } v(x).$$

Per le ipotesi cui soddisfano  $u$  e  $v$ ,  $\vec{w}(x) \in \mathcal{C}^1(S) \cap \mathcal{C}(\bar{S})$  per cui possiamo applicare il teorema della divergenza (teorema che sussiste anche in  $\mathbb{R}^3$  come nello spazio geometrico sotto le stesse ipotesi):

$$\int_S \text{div } \vec{w} \, dS = \int_{\partial S} \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Sigma, \quad (8.1.3)$$

essendo

$$\text{div } \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}.$$

Per una proprietà dell'operatore divergenza che sussiste anche in  $\mathbb{R}^3$  come nello spazio geometrico, si ha:

$$\text{div } \vec{w} = \text{div}(u \text{grad } v) = u \text{div } v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v.$$

Sostituendo nella (8.1.3), otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_S \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dS &= \int_{\partial S} u \text{grad } v \cdot \vec{n} \, d\Sigma - \int_S u \Delta v \, dS = \\ &= \int_{\partial S} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma - \int_S u \Delta v \, dS, \end{aligned}$$

come ci proponevamo di dimostrare.

**Proposizione 8.1.** *Se  $S$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^3$  e  $u, v \in \mathcal{C}^2(S) \cap \mathcal{C}^1(\bar{S})$ , allora:*

$$\int_{\partial S} \left( u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \, d\Sigma = \int_S (u \Delta v - v \Delta u) \, dS, \quad (8.1.4)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S$ .

Dimostrazione

Per il lemma di Green:

$$\int_S \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dS = \int_{\partial S} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma - \int_S u \Delta v \, dS,$$

$$\int_S \text{grad } v \cdot \text{grad } u \, dS = \int_{\partial S} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma - \int_S v \Delta u \, dS.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$0 = \int_{\partial S} \left( u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \, d\Sigma - \int_S (u \Delta v - v \Delta u) \, dS$$

da cui segue la (8.1.4), c.v.d.

La (8.1.4) è nota come **I formula di Green**.

**Proposizione 8.2.** *Sia  $S$  un dominio regolare di  $\mathbb{R}^3$  e  $u \in \mathcal{C}^2(S) \cap \mathcal{C}^1(\bar{S})$ . Allora*

$$\forall x_0 \in S \quad u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} \right) \, d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Delta u}{r} \, dS, \quad (8.1.5)$$

dove  $r = |x - x_0|$  con  $x \in \bar{S}$  e  $\vec{n} =$  versore della normale esterna a  $\partial S$ .

Non dimostriamo tale formula che è nota come **II formula di Green**.

**Osservazione 8.1.** Dalla II formula di Green vediamo che il valore che  $u$  assume nel punto  $x_0$  si esprime tramite i valori che assumono  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  nei punti della frontiera di  $S$  ed i valori che assume  $\Delta u$  nei punti di  $S$ .

## 8.2 Proprietà delle funzioni armoniche.

**Proposizione 8.3.** *Dato il dominio regolare  $S$ , sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e di classe  $\mathcal{C}^1(\bar{S})$ . Allora*

$$\int_{\partial S} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma = 0.$$

Dimostrazione

Osserviamo in primo luogo che:

$$\int_{\partial S} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\Sigma = \int_{\partial S} \text{grad } u \cdot \vec{n} \, d\Sigma.$$

D'altra parte, per le ipotesi sulla funzione  $u$ ,  $\text{grad } u \in \mathcal{C}^1(S) \cap \mathcal{C}(\bar{S})$  e dunque, essendo  $S$  un dominio regolare, possiamo applicare il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial S} \text{grad } u \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_S \text{div grad } u \, dS = \int_S \Delta u \, dS = 0,$$

da cui la tesi.

**Proposizione 8.4.** *Dato il dominio regolare  $S$ , sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e di classe  $\mathcal{C}^1(\bar{S})$ . Allora*

$$\forall x_0 \in S \quad u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} \right) d\Sigma. \quad (8.2.1)$$

Dimostrazione

Basta scrivere la II formula di Green tenendo presente che l'integrale di volume che compare a secondo membro in tale formula è nullo perché  $\Delta u = 0$  in  $S$ , essendo la funzione armonica.

La (8.2.1) è nota come **II formula di Green per le funzioni armoniche**.

**Proposizione 8.5.** *Se la funzione  $u$  è armonica in  $S$ , allora  $u \in \mathcal{C}^\infty(S)$ .*

Omettiamo la dimostrazione di tale proposizione.

**Teorema 8.1. I Teorema della media o Teorema di Gauss.** *Sia  $u$  una funzione armonica in  $S$ . Allora, presa una qualsiasi bolla contenuta in  $S$  insieme alla sua frontiera, il valore che  $u$  assume nel centro della bolla è uguale alla media aritmetica dei valori che  $u$  assume nei punti della frontiera della bolla, ossia data la bolla  $S_R(x_0)$  di raggio  $R$  e centro  $x_0$  tale che  $\bar{S}_R(x_0) \subset S$ , si ha*

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma_R(x_0)} u \, d\Sigma,$$

essendo  $\Sigma_R(x_0) = \partial S_R(x_0)$ .

Dimostrazione

Scriviamo la II formula di Green per la funzione armonica  $u$  relativamente alla bolla  $S_R(x_0)$  ed al suo centro  $x_0$ :

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_R(x_0)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} \right) d\Sigma, \quad (8.2.2)$$

dove  $r = |x - x_0|$  con  $x \in \Sigma_R(x_0)$  per cui  $r = R$ .

La (8.2.2) si può allora scrivere come:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_R(x_0)} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} d\Sigma, = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_R(x_0)} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} d\Sigma, \end{aligned}$$

poiché, a causa della proposizione 8.2.1,

$$\int_{\Sigma_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Sigma = 0.$$

D'altra parte,

$$\left. \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} \right|_{\Sigma_R(x_0)} = \text{grad} \frac{1}{r} \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_R(x_0)} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - x_0}{r} \cdot \frac{x - x_0}{r} \Big|_{\Sigma_R(x_0)} = -\frac{1}{r^2} \Big|_{\Sigma_R(x_0)} = -\frac{1}{R^2}.$$

Dunque

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma_R(x_0)} u d\Sigma,$$

come volevamo dimostrare.

**Teorema 8.2. II Teorema della media.** *Sia  $u$  una funzione armonica in  $S$ . Allora, presa una qualsiasi bolla contenuta in  $S$  insieme alla sua frontiera, il valore che  $u$  assume nel centro della bolla è uguale alla media aritmetica dei valori che  $u$  assume nei punti della bolla, ossia data la bolla  $S_R(x_0)$  di raggio  $R$  e centro  $x_0$  tale che  $\bar{S}_R(x_0) \subset S$ , si ha*

$$u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{S_R(x_0)} u dS.$$

Non dimostriamo tale teorema, come non dimostriamo il seguente

**Lemma 8.2.** *Sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e ivi superiormente limitata, cioè  $M = \sup_{x \in S} u(x) < +\infty$ . Allora si ha:*

$$\forall x \in S \quad u(x) < M \quad \text{oppure} \quad \forall x \in S \quad u(x) = M.$$

Dal lemma 8.2 discende immediatamente il

**Lemma 8.3.** *Sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e ivi inferiormente limitata, cioè  $m = \inf_{x \in S} u(x) > -\infty$ . Allora si ha:*

$$\forall x \in S \quad u(x) > m \quad \text{oppure} \quad \forall x \in S \quad u(x) = m.$$

Dimostrazione

Il lemma si ottiene dal lemma precedente. Infatti se  $u$  è una funzione armonica in  $S$  e ivi inferiormente limitata, la funzione  $-u$  è armonica in  $S$  e è ivi superiormente limitata. Dal lemma (8.2) applicato a  $-u$  si deduce la tesi.

**Teorema 8.3. Teorema di massimo e minimo forte per le funzioni armoniche.** *Dato il dominio limitato  $S$ , sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e continua nella chiusura di  $S$ . Allora  $u$  assume il suo massimo e il suo minimo, relativamente a  $\bar{S}$ , solo nei punti di  $\partial S$ , a meno che non sia costante in  $\bar{S}$ .*

Dimostrazione

Prima di tutto osserviamo che  $u$  è una funzione continua in un insieme chiuso e limitato, ossia in un compatto di  $\mathbb{R}^3$ , e dunque, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo in  $S$ .

Dimostriamo il teorema solo per il massimo. Infatti, una volta provato il risultato relativo al massimo, quello per il minimo si dimostra considerando la funzione  $-u$  che è armonica in  $S$  e continua nella chiusura di  $S$  e tenendo presente che, se un punto è di minimo per  $u$ , è di massimo per  $-u$ .

Sia  $x_0$  un punto di  $\bar{S}$  in cui  $u$  assume il suo massimo  $M$ . Per provare il teorema è sufficiente mostrare che se  $x_0 \in S$ , allora  $u$  è costante in  $\bar{S}$ . Usiamo il lemma 8.2 per cui possiamo asserire che:

$$\forall x \in S \quad u(x) < M \quad \text{oppure} \quad \forall x \in S \quad u(x) = M.$$

Ma la prima possibilità non può verificarsi perchè per ipotesi c'è in  $S$  un punto in cui  $u$  assume il valore  $M$  ed è il punto  $x_0$ . Quindi si verifica la seconda possibilità:

$$\forall x \in S \quad u(x) = M.$$

Perciò la funzione  $u$  è costante in  $S$ , ma, essendo continua fin sul bordo di  $S$ , è costante in  $\bar{S}$ , come volevamo dimostrare.

**Corollario 8.1. del Teorema 8.3.** *Dato il dominio limitato  $S$ , sia  $u$  una funzione armonica in  $S$  e continua nella chiusura di  $S$ . Se sul bordo di  $S$   $u$  è nulla, allora è identicamente nulla in  $S$ ; se sul bordo di  $S$   $u$  è strettamente positiva, allora è strettamente positiva in  $S$ ; se sul bordo di  $S$   $u$  è strettamente negativa, allora è strettamente negativa in  $S$ .*

Dimostrazione

Se  $u$  è nulla sul bordo di  $S$ , per il teorema di massimo e minimo, si ha che il suo massimo e il suo minimo in  $\bar{S}$  sono nulli entrambi e quindi  $u$  è identicamente nulla in  $S$ . Se  $u$  è strettamente positiva sul bordo di  $S$ , allora il suo minimo in  $\bar{S}$  è strettamente positivo per il teorema 8.3 e quindi  $u$  è strettamente positiva in  $S$ . Infine se  $u$  è strettamente negativa sul bordo di  $S$ , allora il suo massimo in  $\bar{S}$  è strettamente negativo per il teorema 8.3 e quindi  $u$  è strettamente negativa in  $S$ .

### 8.3 Principali problemi al contorno per l'equazione di Laplace.

Data l'equazione di Laplace in un dominio  $S \in \mathbb{R}^3$ :

$$\Delta u = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

ad essa si associano solo condizioni al contorno, poichè tra le variabili indipendenti non compare il tempo.

Per l'equazione di Laplace abbiamo due principali problemi al contorno:

- 1) il problema al contorno di Dirichlet
- 2) il problema al contorno di Neumann.

Entrambi si suddividono in

- problema interno: la soluzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  la si cerca in  $\bar{S}_i$ , dove  $S_i$  è un dominio limitato, che noi nel seguito supporremo regolare
- problema esterno: la soluzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  la si cerca in  $\bar{S}_e$ , dove  $S_e$  è un dominio esterno che noi nel seguito supporremo sia il complementare della chiusura di un dominio regolare.

### 8.4 Problema di Dirichlet.

Enunciamo dapprima il **problema interno**.

Il problema interno di Dirichlet consiste nel determinare in  $\bar{S}_i$  la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  che gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}(\bar{S}_i)$

- 2)  $u$  è armonica in  $S_i$ , ossia  $u \in \mathcal{C}^2(S_i)$  e  $\Delta u = 0$  in  $S_i$
- 3)  $u$  soddisfa alla seguente condizione al contorno:

$$u|_{\partial S_i} = \varphi_1$$

con  $\varphi_1$  funzione assegnata sul bordo di  $S_i$ .

Enunciamo ora il **problema esterno**.

Il problema esterno di Dirichlet consiste nel determinare in  $\overline{S}_e$  la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  che gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}(\overline{S}_e)$
- 2)  $u$  è armonica all'infinito in  $S_e$ , ossia  $u \in \mathcal{C}^2(S_e)$ ,  $\Delta u = 0$  in  $S_e$  e all'infinito  $u$  tende uniformemente a zero
- 3)  $u$  soddisfa alla seguente condizione al contorno:

$$u|_{\partial S_e} = \varphi_1$$

con  $\varphi_1$  funzione assegnata sul bordo di  $S_e$ .

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 8.6.** *Condizione necessaria affinché il problema interno o esterno di Dirichlet ammetta soluzione è che  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial S_i)$  o  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial S_e)$  rispettivamente.*

**Teorema 8.4. Teorema di unicità della soluzione del problema di Dirichlet.** *Se il problema di Dirichlet (interno o esterno) ammette soluzione, questa è unica.*

#### Dimostrazione

Consideriamo dapprima il problema interno.

Supponiamo che lo stesso problema interno di Dirichlet ammetta due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  e poniamo  $u = u_1 - u_2$ . Essendo differenza di due soluzioni dello stesso problema,  $u$  gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}(\overline{S}_i)$  poiché lo sono  $u_1$  e  $u_2$
- 2)  $u$  è armonica in  $S_i$  poiché lo sono  $u_1$  e  $u_2$
- 3)  $u|_{\partial S_i} = 0$  poiché  $u_1$  e  $u_2$  soddisfano alla stessa condizione al contorno.

Alla funzione  $u$  possiamo applicare il corollario del teorema di massimo e minimo, essendo verificate tutte le ipotesi richieste dal teorema. Grazie a tale corollario, dalla proprietà 3) segue  $u \equiv 0$  in  $\bar{S}_i$  e dunque  $u_1 = u_2$  in  $\bar{S}_i$ . L'unicità della soluzione è provata.

Consideriamo ora il problema esterno.

Supponiamo che lo stesso problema esterno di Dirichlet ammetta due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$ . La funzione  $u = u_1 - u_2$  gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}(\bar{S}_e)$  poiché lo sono  $u_1$  e  $u_2$
- 2)  $u$  è armonica all'infinito  $S_e$  poiché lo sono  $u_1$  e  $u_2$
- 3)  $u|_{\partial S_e} = 0$  poiché  $u_1$  e  $u_2$  soddisfano alla stessa condizione al contorno.

Essendo  $S_e$  un dominio illimitato, non possiamo applicare in tal caso direttamente il teorema di massimo e minimo e il suo corollario. Possiamo tuttavia ricondurci al teorema di massimo e minimo mediante un opportuno artificio.

Sia  $x_0$  un punto arbitrario di  $S_e$  e  $\epsilon$  un numero positivo arbitrario.

Poiché  $u$  è armonica all'infinito in  $S_e$ , sappiamo che, fissato  $\epsilon > 0$ ,

$$\exists r_\epsilon > 0 \text{ tale che } \forall x \in S_e \text{ con } |x| > r_\epsilon \text{ si ha } |u(x)| < \epsilon.$$

Consideriamo ora la bolla  $S_R(O)$  con  $R \gg$  in modo tale che:

- i)  $\partial S_e \subset S_R(O)$  (questo è possibile perché la frontiera di  $S_e$  è limitata)
- ii)  $x_0 \in S_R(O)$
- iii)  $R > r_\epsilon$  per cui  $|u(x)|_{\Sigma_R(O)} < \epsilon$ .

Consideriamo il dominio limitato  $S'_R = S_e \cap S_R(O)$  e la restrizione della funzione  $u$  a  $\bar{S}'_R$ . Poiché  $u$  è armonica in  $S'_R$  e  $u \in \mathcal{C}(\bar{S}'_R)$ , possiamo applicare il teorema di massimo e minimo alla funzione  $u$  relativamente al dominio  $S'_R$ . Dunque  $u$  ristretta a  $\bar{S}'_R$  ammette massimo e minimo su  $\partial S'_R$ . D'altra parte,

$$\partial S'_R = \partial S_e \cup \Sigma_R(O)$$

e  $u = 0$  nei punti di  $\partial S_e$ ,  $|u(x)|_{\Sigma_R(O)} < \epsilon$ . Per il teorema di massimo e minimo, otteniamo che il minimo di  $u$  in  $\bar{S}'_R$  è maggiore di  $-\epsilon$ , mentre il massimo è minore di  $\epsilon$ . Perciò:

$$|u| < \epsilon \text{ in } S'_R.$$

Poiché  $x_0 \in S'_R$ , si ha:

$$|u(x_0)| < \epsilon.$$



Ma  $\epsilon$  è arbitrario e dunque possiamo prenderlo piccolo quanto vogliamo per cui ne discende:

$$|u(x_0)| = 0 \implies u(x_0) = 0.$$

D'altra parte  $x_0$  è un punto arbitrario di  $S_e$  e quindi  $u \equiv 0$  in  $S_e$ . L'unicità è così provata.

Il nostro scopo è ora quello di dimostrare la dipendenza continua della soluzione del problema di Dirichlet dal dato al contorno.

Come abbiamo osservato in precedenza, condizione necessaria affinché il problema interno od esterno di Dirichlet ammetta soluzione è che  $\varphi_1 \in \mathcal{C}(\partial S_i)$  o  $\mathcal{C}(\partial S_e)$ . Dunque  $\varphi_1$  è necessariamente continua su un compatto e perciò, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo. Possiamo allora riguardare  $\varphi_1$  come un elemento dello spazio vettoriale reale normato  $N_1$  formato dalle funzioni continue su  $\partial S_i$  o  $\partial S_e$ , avente come norma

$$\|\varphi_1\|_1 = \max_{x \in \partial S_{i/e}} |\varphi_1(x)|.$$

Occupiamoci dapprima della dipendenza continua della soluzione dal dato al contorno per il problema interno.

Osserviamo che la soluzione si cerca nella classe delle funzioni che sono continue nella chiusura di  $S_i$ . Tali funzioni, essendo  $\bar{S}_i$  un compatto, sono dotate di massimo e di minimo ed individuano così uno spazio vettoriale reale normato  $N_2$  la cui norma è:

$$\|u\|_2 = \max_{x \in \bar{S}_i} |u(x)|.$$

Dimostriamo il seguente

**Teorema 8.5.** *La soluzione del problema interno di Dirichlet dipende con continuità dal dato al contorno secondo la topologia individuata dai due spazi vettoriali normati  $N_1$  e  $N_2$  precisati sopra.*

Dimostrazione

Consideriamo due problemi interni di Dirichlet relativi allo stesso dominio  $S_i$  con dati al contorno  $\varphi_1$  e  $\varphi_1^*$  appartenenti allo spazio normato  $N_1$ . Siano  $u$  e  $u^*$  le soluzioni dei due problemi, entrambe appartenenti allo spazio normato  $N_2$ .

Il nostro scopo è provare che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|\varphi_1 - \varphi_1^*\|_1 < \delta \implies \|u - u^*\|_2 < \epsilon. \quad (8.4.1)$$

Osserviamo che la funzione  $u - u^*$  gode delle tre seguenti proprietà:

1)  $u - u^* \in \mathcal{C}(\bar{S}_i)$  poiché lo sono  $u$  e  $u^*$

2)  $u$  è armonica in  $S_i$  poiché lo sono  $u$  e  $u^*$

3)  $(u - u^*)|_{\partial S_i} = \varphi_1 - \varphi_1^*$  per la condizione al contorno cui soddisfano  $u$  e  $u^*$ .

Alla funzione  $u - u^*$  possiamo applicare il teorema di massimo e minimo delle funzioni armoniche per cui otteniamo che  $u - u^*$  assume massimo e minimo su  $\partial S_i$ . Quindi, per la proprietà 3), si ha:

$$\max_{x \in \bar{S}_i} |u(x) - u^*(x)| = \max_{x \in \partial S_i} |\varphi_1 - \varphi_1^*|.$$

Per come sono definite le norme in  $N_1$  e  $N_2$ , la relazione precedente fornisce:

$$\|u - u^*\|_2 = \|\varphi_1 - \varphi_1^*\|_1.$$

La (8.4.1) risulta così soddisfatta poiché, fissato  $\epsilon > 0$ , basta prendere un qualsiasi  $\delta > 0$  tale che  $\delta \leq \epsilon$ .

Affrontiamo ora la questione della dipendenza continua della soluzione dal dato al contorno per il problema esterno.

La soluzione del problema esterno relativo al dominio esterno  $S_e$  si cerca nella classe delle funzioni che sono continue nella chiusura di  $S_e$  e che tendono uniformemente a zero all'infinito. Tale classe di funzioni si può riguardare come uno spazio vettoriale reale normato avente la seguente norma:

$$\|u\|_2 = \sup_{x \in \bar{S}_e} |u(x)| < +\infty.$$

Tale norma è senz'altro finita anche se  $\bar{S}_e$  non è un compatto, poiché le funzioni in  $N_2$  tendono a zero quando il punto va all'infinito.

Si potrebbe dimostrare il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione

**Teorema 8.6.** *La soluzione del problema esterno di Dirichlet dipende con continuità dal dato al contorno secondo la topologia individuata dagli spazi normati  $N_1$  e  $N_2$  precisati sopra.*

Nel paragrafo successivo ci occuperemo dell'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet.

## 8.5 Metodo della funzione di Green per il problema di Dirichlet.

Consideriamo dapprima il problema interno di Dirichlet, cioè il problema al contorno:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } S_i \\ u|_{\partial S_i} = \varphi_1. \end{cases} \quad (8.5.1)$$

Supponiamo che tale problema ammetta una soluzione  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{S}_i)$ , cioè una soluzione con una condizione di regolarità più forte di quella richiesta.

Poiché  $S_i$  è un dominio regolare e  $u$  è armonica, possiamo scrivere per  $u$  la II formula di Green per le funzioni armoniche:

$$\forall x_0 \in S_i \quad u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_i} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} \right) d\Sigma, \quad (8.5.2)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore della normale esterna a  $\partial S_i$ .

Sia ora  $g = g(x, x_0)$  una funzione definita per  $x \in \overline{S}_i$  e  $x_0 \in S_i$  tale che, fissato  $x_0 \in S_i$ , la funzione  $g(\cdot, x_0)$  definita in  $\overline{S}_i$  goda delle seguenti proprietà:

- 1)  $g(\cdot, x_0) \in \mathcal{C}^1(\overline{S}_i)$
- 2)  $g(\cdot, x_0)$  è armonica in  $S_i$
- 3)  $g(\cdot, x_0) = -\frac{1}{4\pi r} \quad \forall x \in \partial S_i$ .

Possiamo scrivere per  $u$  e  $g(\cdot, x_0) \quad \forall x_0 \in S_i$  la I formula di Green, che, essendo entrambe funzioni armoniche, si riduce a:

$$0 = \int_{\partial S_i} \left( u \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(\cdot, x_0) - g(\cdot, x_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\Sigma. \quad (8.5.3)$$

D'altra parte, per  $x \in \partial S_i$   $g(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi r}$ , per cui la (8.5.3) diventa:

$$0 = \int_{\partial S_i} \left( u \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(\cdot, x_0) + \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\Sigma. \quad (8.5.4)$$

Dalla (8.5.2) sottraiamo membro a membro la (8.5.4) facendo intervenire in entrambe lo stesso punto  $x_0$  e tenendo presente che  $u|_{\partial S_i} = \varphi_1$ . Deduciamo allora:

$$\forall x_0 \in S_i \quad u(x_0) = - \int_{\partial S_i} \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left[ g(x, x_0) + \frac{1}{4\pi r} \right] d\Sigma. \quad (8.5.5)$$

Introduciamo ora la seguente

**Definizione 8.5.** *Chiamiamo funzione di Green relativa al dominio interno  $S_i$  per l'equazione di Laplace la funzione  $G = G(x, x_0)$  così definita:*

$$\forall x \in \overline{S}_i, \quad \forall x_0 \in S_i \quad G(x, x_0) = g(x, x_0) + \frac{1}{4\pi r}.$$

In base alla definizione di funzione di Green, possiamo scrivere la (8.5.5) nella forma:

$$\forall x_0 \in S_i \quad u(x_0) = - \int_{\partial S_i} \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G(x, x_0) d\Sigma. \quad (8.5.6)$$

**Osservazione 8.1.** La (8.5.6) non fornisce la soluzione del problema interno di Dirichlet considerato, ma dà solo una rappresentazione integrale di una soluzione del problema sufficientemente regolare. Inoltre tale rappresentazione integrale sussiste se esiste la funzione di Green relativa al dominio  $S_i$ , ossia se esiste la funzione  $g = g(x, x_0)$  soddisfacente alle proprietà 1), 2), 3). In ogni caso, se la funzione  $g$  esiste, essa è unica, poiché è soluzione di un particolare problema interno di Dirichlet e dunque anche la funzione di Green, se esiste, è unica.

Liapounov ha dimostrato che:

- se  $\partial S_i$  è sufficientemente regolare (cioè è una superficie di Liapounov), allora la funzione  $g$  con le proprietà 1), 2), 3) esiste
- se  $\partial S_i$  è una superficie di Liapounov e  $\varphi_1 \in \mathcal{C}(\partial S_i)$ , allora la funzione  $u = u(x)$  definita in  $\bar{S}_i$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in S_i \quad u(x_0) &= - \int_{\partial S_i} \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G(x, x_0) d\Sigma \\ \forall x_0 \in \partial S_i \quad u(x_0) &= \varphi_1(x_0) \end{aligned}$$

è la soluzione del problema interno di Dirichlet relativo al dominio interno  $S_i$  e con dato al contorno  $\varphi_1$ .

Liapounov ha così provato un teorema di esistenza della soluzione del problema interno di Dirichlet nell'ipotesi che il bordo di  $S_i$  sia sufficientemente regolare, mediante il metodo della funzione di Green.

Mediante il metodo della funzione di Green si prova l'esistenza della soluzione anche per il problema esterno di Dirichlet, nell'ipotesi che il bordo di  $S_e$  sia una superficie di Liapounov.

*Arriviamo dunque a concludere che se il bordo del dominio  $S_i$  o  $S_e$  è una superficie di Liapounov, il problema interno così come il problema esterno di Dirichlet è ben posto nel senso di Hadamard.*

## 8.6 Problema di Neumann.

Come per il problema di Dirichlet, distinguiamo tra problema interno di Neumann e problema esterno di Neumann.

Formuliamo dapprima il **problema interno di Neumann**. Questo problema consiste nel determinare la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  definita in  $\bar{S}_i$  tale che:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^1(\bar{S}_i)$
- 2)  $u$  è armonica in  $S_i$ , ossia  $u \in \mathcal{C}^2(S_i)$  e  $\Delta u = 0$  in  $S_i$
- 3)  $u$  soddisfa alla seguente condizione al contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial S_i} = \varphi_2$$

con  $\varphi_2$  funzione assegnata sul bordo di  $S_i$ .

Enunciamo ora il **problema esterno di Neumann**. Questo problema consiste nel determinare in  $\bar{S}_e$  la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  che gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}(\bar{S}_e)$
- 2)  $u$  è armonica all'infinito in  $S_e$ , ossia  $u \in \mathcal{C}^2(S_e)$ ,  $\Delta u = 0$  in  $S_e$  e all'infinito  $u$  tende uniformemente a zero
- 3)  $u$  soddisfa alla seguente condizione al contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial S_e} = \varphi_2$$

con  $\varphi_2$  funzione assegnata sul bordo di  $S_e$ .

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 8.7.** *Condizione necessaria affinché il problema interno o esterno di Neumann ammetta soluzione è che  $\varphi_2 \in \mathcal{C}(\partial S_i)$  o  $\varphi_2 \in \mathcal{C}(\partial S_e)$  rispettivamente.*

Per il problema interno di Neumann sussiste anche la seguente

**Proposizione 8.8.** *Condizione necessaria affinché il problema interno di Neumann ammetta soluzione è che il dato al contorno  $\varphi_2$  goda della proprietà:*

$$\int_{\partial S_i} \varphi_2 d\Sigma = 0.$$

Dimostrazione

Sia  $u$  soluzione del problema interno di Neumann relativo al dominio  $S_i$  e con dato al bordo  $\varphi_2$ . Poiché  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{S_e})$  ed è armonica in  $S_i$ , per la prima proprietà delle funzioni armoniche che avevamo stabilito nel paragrafo 2, abbiamo:

$$\int_{\partial S_i} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Sigma = 0.$$

Ma  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial S_e} = \varphi_2$  per cui

$$\int_{\partial S_i} \varphi_2 d\Sigma = 0,$$

come volevamo dimostrare.

**Osservazione 8.2.** La proposizione 8.8 non vale nel caso del problema esterno poiché  $S_e$  è un dominio illimitato.

**Teorema 8.7. Teorema di unicità della soluzione del problema interno di Neumann.** *Se il problema interno di Neumann ammette una soluzione, ne ammette infinite che differiscono tra loro di una costante.*

Dimostrazione

Supponiamo che lo stesso problema interno di Neumann ammetta due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$ . Poniamo  $u = u_1 - u_2$  e vediamo che  $u$  gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{S_i})$
- 2)  $u$  è armonica in  $S_i$
- 3)  $u$  soddisfa alla seguente condizione al contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial S_i} = 0.$$

Essendo  $S_i$  un dominio regolare, possiamo applicare il lemma di Green ponendo  $u = v$ :

$$\int_{S_i} \text{grad } u \cdot \text{grad } u dS = \int_{\partial S_i} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Sigma - \int_{S_i} u \Delta u dS = 0.$$

Dunque

$$\int_{S_i} (\text{grad } u)^2 dS = 0.$$

Poiché  $(\text{grad } u)^2$  è una funzione continua e non negativa in  $S_i$ , segue

$$(\text{grad } u)^2 = 0 \text{ in } S_i,$$

ossia

$$\text{grad } u = \vec{0} \text{ in } S_i \implies u = \text{costante in } S_i.$$

Abbiamo così ottenuto che  $u_1$  e  $u_2$  differiscono per una costante, c.v.d.

**Osservazione 8.3.** Il teorema di unicità della soluzione del problema interno di Neumann si può anche enunciare nel modo seguente:

*Se il problema interno di Neumann ammette soluzione, questa è unica a meno di una costante additiva arbitraria.*

A differenza del problema interno, per il problema esterno di Neumann si può provare un vero e proprio teorema di unicità della soluzione.

**Teorema 8.8. Teorema di unicità della soluzione del problema esterno di Neumann.** *Se il problema esterno di Neumann ammette soluzione, questa è unica.*

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.





# Capitolo 9

## Equazione del calore o di Fourier

### 9.1 Generalità sull'equazione di Fourier.

L'equazione di Fourier nelle quattro variabili reali  $x_1, x_2, x_3, t$  si presenta nella forma:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (a = \text{costante} > 0). \quad (9.1.1)$$

Tale equazione governa la propagazione del calore in un solido rigido, omogeneo, in quiete, per il quale valga la legge di Fourier. In tal caso il termine noto è legato alla presenza di sorgenti interne di calore e la funzione incognita  $u$  rappresenta la temperatura.

L'equazione (9.1.1) interviene anche nei fenomeni di diffusione di un liquido in un liquido o di un gas in un gas ed in tal caso  $u$  rappresenta la concentrazione. L'equazione di Fourier omogenea in due variabili indipendenti svolge un ruolo importante anche in ambito finanziario nel modello di Black, Scholes e Merton per la valutazione del prezzo delle opzioni call.

La (9.1.1) è un'equazione di tipo parabolico in tutto  $\mathbb{R}^4$  ed è già ridotta alla II forma canonica.

**Proposizione 9.1.** *Gli iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$  sono varietà caratteristiche in  $\mathbb{R}^4$  per l'equazione di Fourier.*

#### Dimostrazione

Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = t \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Come si vede immediatamente,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  e  $\text{grad } f \neq \vec{0}$  in  $\mathbb{R}^4$  poiché

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^4.$$

Inoltre la funzione  $f$  è soluzione in  $\mathbb{R}^4$  dell'equazione delle caratteristiche associata all'equazione del calore:

$$-\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = 0,$$

essendo  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  per  $i = 1, 2, 3$  in  $\mathbb{R}^4$ .

Dunque gli insiemi di livello della funzione  $f$ , che sono gli iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$ , sono varietà caratteristiche in  $\mathbb{R}^4$  per l'equazione di Fourier.

Abbiamo visto nel Capitolo 7 che il problema di Cauchy in generale non ammette soluzione se la varietà portante i dati di Cauchy è una varietà caratteristica. Nei problemi della Fisica Matematica che descrivono fenomeni di evoluzione, come varietà  $\Gamma$  portante i dati di Cauchy, si assume l'iperpiano  $t = 0$  e le condizioni di Cauchy sono della forma seguente:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

La seconda condizione è in effetti  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} \Big|_{\Gamma} = \varphi_1$  dove il vettore  $\vec{\lambda}$  è il vettore normale all'iperpiano  $t = 0$ , cioè il vettore dell'asse dei tempi. Infatti in tal caso  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\lambda}} = \frac{\partial u}{\partial t}$  poiché le componenti del vettore di  $\mathbb{R}^4$  normale all'iperpiano  $t = 0$  ha le seguenti componenti:

$$\lambda_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = 1.$$

## 9.2 Problema misto di I specie.

Indichiamo con  $S$  un dominio limitato di  $\mathbb{R}^3$  e con  $(0, T)$  un intervallo di tempo, essendo  $T$  un istante positivo. Sia poi  $C_T = S \times (0, T)$  il dominio interno alla porzione di cilindro di  $\mathbb{R}^4$  avente generatrici parallele all'asse dei tempi e sezione trasversale  $S$ , compresa tra i due iperpiani  $t = 0$  e  $t = T$ .

Il problema misto di I specie per l'equazione del calore (9.1.1) relativo a  $\overline{C}_T$  consiste nel determinare in  $\overline{C}_T$  la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$  che gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(C_T) \cap \mathcal{C}(\overline{C}_T)$
- 2)  $u$  è soluzione dell'equazione del calore in  $C_T$

3)  $u$  soddisfa alle seguenti condizioni ai limiti:

- condizione iniziale

$$u|_{\bar{S} \times \{0\}} = \varphi,$$

con  $\varphi = \varphi(x)$  funzione assegnata su  $\bar{S}$

- condizione al contorno

$$u|_{\partial S \times [0, T]} = \psi,$$

con  $\psi = \psi(x, t)$  funzione assegnata su  $\partial S \times [0, T]$ .

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 9.2.** *Condizione necessaria affinché il problema misto di I specie per l'equazione del calore abbia soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(C_T), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\bar{S}), \quad \psi \in \mathcal{C}(\partial S \times [0, T]), \quad \varphi(x) = \psi(x, 0) \quad \forall x \in \bar{S}.$$

L'ultima condizione rappresenta la condizione di compatibilità tra dato iniziale e dato al contorno, dovuta alla richiesta  $u \in \mathcal{C}(\bar{C}_T)$ .

Omettiamo la dimostrazione del seguente

**Teorema 9.1. Teorema di massimo e minimo debole per l'equazione del calore.** *Sia  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(C_T) \cap \mathcal{C}(\bar{C}_T)$  e soluzione in  $C_T$  dell'equazione del calore omogenea. Allora:*

$$\max_{\bar{C}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \quad \min_{\bar{C}_T} u = \min_{\Gamma_T} u,$$

dove  $\Gamma_T = (\bar{S} \times \{0\}) \cup (\partial S \times [0, T])$ .

Notiamo che tale teorema è un teorema di massimo e minimo debole perché non si esclude che  $u$  assuma massimo e minimo anche in punti non appartenenti a  $\Gamma_T$ .

Grazie a tale teorema, è possibile provare l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dal dato iniziale e dal dato al contorno della soluzione del problema misto di I specie per l'equazione del calore.

**Teorema 9.2. Teorema di unicità.** *Se il problema misto di I specie per l'equazione del calore ammette soluzione, questa è unica.*

#### Dimostrazione

Supponiamo che lo stesso problema misto di I specie ammetta due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$ . La funzione  $u = u_1 - u_2$  gode delle seguenti proprietà:

1)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(C_T) \cap \mathcal{C}(\bar{C}_T)$

- 2)  $u$  è soluzione dell'equazione del calore omogenea in  $C_T$
- 3)  $u$  soddisfa alle seguenti condizioni ai limiti:

- condizione iniziale

$$u|_{\bar{S} \times \{0\}} = 0,$$

- condizione al contorno

$$u|_{\partial S \times [0, T]} = 0.$$

Tenendo presente la definizione di  $\Gamma_T$ , deduciamo:

$$u|_{\Gamma_T} = 0.$$

D'altra parte, alla funzione  $u$  possiamo applicare il teorema di massimo e minimo debole per cui:

$$\max_{\bar{C}_T} u = \max_{\Gamma_T} u = 0 \quad \min_{\bar{C}_T} u = \min_{\Gamma_T} u = 0.$$

Perciò:

$$u = 0 \text{ in } \bar{C}_T \implies u_1 = u_2 \text{ in } \bar{C}_T.$$

La soluzione del problema è dunque unica.

Come abbiamo sottolineato, condizione necessaria affinché il problema misto di I specie abbia soluzione è che

$$\varphi \in \mathcal{C}(\bar{S}), \quad \psi \in \mathcal{C}(\partial S \times [0, T]).$$

Allora possiamo assumere per il dato iniziale e il dato al contorno le due norme seguenti:

$$\|\varphi\|_1 = \max_{\bar{S}} |\varphi|, \quad \|\psi\|_{1'} = \max_{\partial S \times [0, T]} |\psi|.$$

Poiché richiediamo che  $u \in \mathcal{C}(\bar{C}_T)$ , possiamo assumere come norma per la soluzione del problema la seguente:

$$\|u\|_2 = \max_{\bar{C}_T} |u|.$$

**Teorema 9.3. Teorema di dipendenza continua.** *La soluzione del problema misto di I specie per l'equazione del calore dipende con continuità dal dato iniziale e dal dato al contorno secondo la topologia introdotta sopra.*

Dimostrazione

Sia dato un certo problema misto di I specie per l'equazione del calore:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \\ u|_{\bar{S} \times \{0\}} = \varphi, \quad u|_{\partial S \times [0, T]} = \psi. \end{cases}$$

Consideriamo poi un secondo problema misto di I specie, ottenuto dal precedente sostituendo al dato iniziale  $\varphi$  un nuovo dato  $\varphi^*$  e al dato al contorno  $\psi$  un nuovo dato al contorno  $\psi^*$  e lasciando inalterata l'equazione.

Siano  $u$  e  $u^*$  la soluzione del primo e del secondo problema rispettivamente.

Vediamo di quali proprietà gode la funzione  $u - u^*$ :

- 1)  $u - u^* \in \mathcal{C}^{2,1}(C_T) \cap \mathcal{C}(\bar{C}_T)$
- 2)  $u - u^*$  è soluzione dell'equazione del calore omogenea in  $C_T$
- 3)  $(u - u^*)|_{\bar{S} \times \{0\}} = \varphi - \varphi^*, \quad (u - u^*)|_{\partial S \times [0, T]} = \psi - \psi^*.$

Possiamo applicare alla funzione  $u - u^*$  il teorema di massimo e minimo debole per l'equazione del calore, per cui

$$\max_{\bar{C}_T} |u - u^*| = \max_{\Gamma_T} |u - u^*| = \max \left\{ \max_{\bar{S}} |\varphi - \varphi^*|, \max_{\partial S \times [0, T]} |\psi - \psi^*| \right\}.$$

Con le norme definite in precedenza, abbiamo

$$\|u - u^*\|_2 = \max\{\|\varphi - \varphi^*\|_1, \|\psi - \psi^*\|_{1'}\}.$$

Allora, fissato  $\epsilon > 0$  e preso  $\delta \leq \epsilon$ , se  $\|\varphi - \varphi^*\|_1 < \delta$ ,  $\|\psi - \psi^*\|_{1'} < \delta$  risulta  $\|u - u^*\|_2 < \epsilon$ .

C'è dunque dipendenza continua della soluzione del problema misto di I specie per l'equazione del calore dal dato iniziale e dal dato al contorno.

### 9.3 Esistenza della soluzione del problema misto di I specie nel caso di una sola variabile spaziale.

Consideriamo il problema misto di I specie supponendo di avere una sola variabile spaziale che per semplicità denotiamo con  $x$  senza alcun pedice.

Poniamo  $R_T = (0, l) \times (0, T)$ , dove  $l$  è una costante positiva avente le dimensioni fisiche di una lunghezza.

Il problema misto di I specie per l'equazione del calore relativo a  $\bar{R}_T$  consiste nel determinare in  $\bar{R}_T$  la funzione  $u = u(x, t)$  che gode delle seguenti proprietà:

1)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(R_T) \cap \mathcal{C}(\overline{R_T})$

2)  $u$  è soluzione dell'equazione del calore in  $R_T$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

3)  $u$  soddisfa alle seguenti condizioni ai limiti:

- condizione iniziale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, l]$$

- condizioni al contorno

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 9.3.** *Condizione necessaria affinché il problema misto formulato sopra abbia soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(R_T), \quad \varphi \in \mathcal{C}([0, l]), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}([0, T])$$

$$\varphi(0) = \psi_1(0) \quad \varphi(l) = \psi_2(0).$$

Le ultime due relazioni rappresentano le condizioni di compatibilità tra dato iniziale e dato al contorno.

A questo punto ci proponiamo di risolvere il problema misto di I specie per l'equazione del calore in una sola variabile spaziale omogenea ( $F \equiv 0$ ) e con dati al contorno omogenei ( $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$ ). A tal fine utilizzeremo il **metodo di separazione delle variabili o metodo di Fourier**.

In primo luogo ci proponiamo di trovare tutte le funzioni  $u = u(x, t)$  definite in  $\overline{R_T}$  tali che

i)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(R_T) \cap \mathcal{C}(\overline{R_T})$

ii)  $u$  è soluzione non banale (ossia non identicamente nulla) dell'equazione del calore omogenea in  $R_T$

iii)  $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$

iv)  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , cioè  $u$  è il prodotto di una funzione solo di  $x$  per una funzione solo di  $t$ .

Sostituiamo nell'equazione del calore alla funzione incognita ed alle sue derivate una funzione della forma richiesta in iv) ed otteniamo:

$$\frac{1}{a^2} X(x) \mathcal{T}'(t) - X''(x) \mathcal{T}(t) = 0 \quad \text{in } R_T.$$

Dividendo entrambi i membri per  $u(x, t) = X(x) \mathcal{T}(t)$ , deduciamo:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \forall x \in (0, l) \quad \forall t \in (0, T). \quad (9.3.1)$$

Osserviamo che nell'equazione (9.3.1) al I membro abbiamo una funzione solo di  $t$ , mentre al II membro c'è una funzione solo di  $x$ ,  $t$  e  $x$  sono variabili indipendenti e l'uguaglianza deve valere  $\forall x \in (0, l)$  e  $\forall t \in (0, T)$ . Allora necessariamente le due funzioni a I e II membro devono essere uguali ad una stessa costante che indichiamo con  $-\lambda$ . Si ha perciò:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} = -\lambda \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Dunque l'equazione alle derivate parziali che avevamo in partenza si spezza nelle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathcal{T}'(t) + \lambda a^2 \mathcal{T}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T) \quad (9.3.2)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \forall x \in (0, l). \quad (9.3.3)$$

La (9.3.2) è un'equazione differenziale ordinaria del I ordine, lineare, a coefficienti costanti ed omogenea, la (9.3.3) è un'equazione differenziale ordinaria del II ordine, lineare, a coefficienti costanti ed omogenea.

D'altra parte, dalle condizioni iii) e iv) otteniamo:

$$X(0) \mathcal{T}(t) = 0 \quad X(l) \mathcal{T}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$

da cui, non potendo essere  $\mathcal{T}$  identicamente nulla poichè avremmo una soluzione banale, segue:

$$X(0) = 0 \quad X(l) = 0. \quad (9.3.4)$$

Associamo all'equazione (9.3.3) le condizioni (9.3.4) per cui abbiamo il problema differenziale:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \forall x \in (0, l) \\ X(0) = 0 & X(l) = 0. \end{cases} \quad (9.3.5)$$

Il problema differenziale (9.3.5) è detto **problema agli autovalori o problema di Sturm-Liouville**.

Tale problema non ammette soluzioni non banali per ogni  $\lambda$ ; i valori di  $\lambda$  in corrispondenza dei quali il problema ammette soluzioni non banali si chiamano *autovalori* e le soluzioni ad essi corrispondenti sono dette *autofunzioni*.

Vediamo di determinare autovalori e autofunzioni del problema (9.3.5). A tal fine distinguiamo tre casi:

- $\lambda < 0$

L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è

$$\alpha^2 = -\lambda > 0.$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione è data da

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Imponendo le condizioni al contorno, deduciamo:

$$\begin{aligned} \text{per } x = 0 & \quad 0 = C_1 + C_2 \\ \text{per } x = l & \quad 0 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l}, \end{aligned}$$

da cui

$$C_1 = C_2 = 0.$$

L'unica soluzione è quella banale. Il problema non ammette autovalori negativi.

- $\lambda = 0$

L'equazione si riduce a

$$X'' = 0, \quad \text{la cui soluzione generale è } X(x) = C_1 x + C_2$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Le condizioni al contorno richiedono:

$$\text{per } x = 0 \quad 0 = C_1, \quad \text{per } x = l \quad 0 = C_2.$$

Anche in tal caso il problema ammette solo la soluzione banale e quindi  $\lambda = 0$  non è autovalore.

- $\lambda > 0$

L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è

$$\alpha^2 = -\lambda < 0.$$



Dunque la soluzione generale dell'equazione è data da

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Imponiamo le condizioni al contorno:

$$\text{per } x = 0 \quad 0 = C_1, \quad \text{per } x = l \quad 0 = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l).$$

Se  $C_2 = 0$ , troviamo la soluzione banale  $X = 0$  cui non siamo interessati.

Se  $C_2 \neq 0$ , abbiamo:

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \implies \sqrt{\lambda}l = n\pi \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

Concludiamo dunque che il problema (9.3.5) ammette solo autovalori positivi e questi sono un'infinità numerabile:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

Le corrispondenti autofunzioni sono:

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad x \in [0, l], \quad n = 1, 2, \dots, \quad c_n \text{ costante arbitraria.}$$

Consideriamo ora l'equazione differenziale (9.3.2). Poiché siamo interessati solo ai valori di  $\lambda$  che sono autovalori per il problema (9.3.5), li inseriamo nell'equazione ed in realtà otteniamo una infinità numerabile di equazioni. Denotiamo con  $\mathcal{T}_n$  la funzione incognita dell'equazione con  $\lambda = \lambda_n$ :

$$\mathcal{T}'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \mathcal{T}_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

All'equazione non è associata alcuna condizione. La sua soluzione generale è data da:

$$\mathcal{T}_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad b_n \text{ costante arbitraria, } n = 1, 2, \dots$$

In conclusione le funzioni soddisfacenti alle condizioni i)-iv) che cercavamo sono un'infinità numerabile e sono date da:

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots,$$

con  $a_n = c_n b_n$  costante arbitraria.

Ora, se consideriamo la somma di un numero finito delle funzioni  $u_n$  appena trovate, deduciamo che questa soddisfa alle stesse condizioni cui soddisfano le

$u_n$ , eccetto ovviamente la iv).

Prendiamo poi in esame la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (9.3.6)$$

Poiché ogni suo termine è soluzione dell'equazione del calore omogenea, questa è detta *soluzione formale dell'equazione del calore omogenea*, indipendentemente dalle sue proprietà di convergenza.

Se i coefficienti  $a_n$  sono tali che la serie (9.3.6) converge uniformemente in  $\overline{R_T}$  e convergono uniformemente in  $R_T$  le serie ottenute dalla serie (9.3.6) derivando termine a termine fino a due volte rispetto a  $x$  e una volta rispetto a  $t$ , allora per un noto teorema sulle serie di funzioni, abbiamo che la somma della serie  $u = u(x, t)$  gode delle proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(R_T) \cap \mathcal{C}(\overline{R_T})$
- 2)  $u$  è soluzione dell'equazione del calore omogenea in  $R_T$
- 3)  $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .

Riprendiamo ora in esame il problema misto di I specie relativo a  $\overline{R_T}$  per l'equazione del calore omogenea con dato iniziale  $\varphi$  e dati al contorno omogenei. Utilizziamo la serie (9.3.6) e procediamo formalmente, cioè supponiamo per il momento che i coefficienti  $a_n$  siano tali che la serie abbia le proprietà di convergenza uniforme enunciate precedentemente ed imponiamo alla somma della serie, che per quanto osservato prima, gode di tutte le proprietà richieste alla soluzione del problema con l'esclusione della condizione iniziale, di soddisfare a quest'ultima. Avremo perciò:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, l].$$

La serie al I membro deve quindi rappresentare la serie trigonometrica di Fourier in soli seni della funzione  $\varphi$ . Allora si deve avere necessariamente:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.3.7)$$

Premettiamo la seguente definizione che ci sarà utile per il teorema successivo.

**Definizione 9.1.** Data la funzione reale  $f = f(x)$ , definita nell'intervallo  $[a, b]$ , diciamo che  $f$  è assolutamente continua nell'intervallo  $[a, b]$  se, fissato un numero  $\epsilon$  positivo arbitrario, esiste in corrispondenza di questo un numero positivo  $\delta$  tale che, se  $[a_i, b_i]$  con  $i = 1, \dots, r$  sono  $r$  intervalli contenuti in  $[a, b]$  privi di punti interni comuni e soddisfacenti alla condizione  $\sum_{i=1}^r (b_i - a_i) < \delta$ , allora si ha:

$$\sum_{i=1}^r |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Si potrebbe provare il seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare:

**Teorema 9.4.** Se la funzione  $\varphi$  gode delle seguenti proprietà:

i)  $\varphi$  è assolutamente continua in  $[0, l]$

ii)  $\varphi' \in L^2([0, l])$ , cioè

$$\int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx < +\infty$$

iii)  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,

allora la serie (9.3.6) con i coefficienti dati dalla (9.3.7) converge uniformemente in  $[0, l] \times [0, +\infty)$  e convergono uniformemente in  $[0, l] \times [\bar{t}, +\infty)$  con  $\bar{t}$  istante arbitrario  $> 0$  tutte le serie ottenute derivando termine e termine la serie (9.3.6) un numero qualsiasi di volte rispetto a  $x$  e rispetto a  $t$ .

Il teorema 9.4 ci consente di enunciare il seguente

**Teorema 9.5. Teorema di esistenza.** Se il dato iniziale  $\varphi$  soddisfa alle condizioni i), ii), iii) del teorema 9.4, il problema misto di I specie per l'equazione del calore omogenea in una variabile spaziale con dati al contorno omogenei ammette soluzione in  $[0, l] \times [0, +\infty)$  e non solo in  $[0, l] \times [0, T]$  e tale soluzione è la somma della serie (9.3.6) con i coefficienti dati dalla (9.3.7).

**Osservazione 9.1.** Il problema misto di I specie per l'equazione del calore in una sola variabile spaziale con  $F \equiv 0$ ,  $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$  e  $\varphi$  soddisfacente alle ipotesi del teorema 9.4 è ben posto nel senso di Hadamard.

**Osservazione 9.2.** Vediamo di dare un'interpretazione fisica del problema misto di I specie per l'equazione del calore in una sola variabile spaziale nella sua

formulazione più generale:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) & \text{in } R_T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, l] \\ u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t) & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (9.3.8)$$

A tale problema si perviene se si vuole studiare la propagazione del calore nell'intervallo di tempo  $[0, T]$  in una sbarra rigida, omogenea, di lunghezza  $l$ , lungo la quale siano distribuite sorgenti interne di calore, nota la temperatura iniziale in tutti i punti della sbarra e nota la temperatura nei due estremi della sbarra ad ogni istante in  $[0, T]$ .

## 9.4 Problema di Cauchy.

Riprendiamo in considerazione l'equazione del calore in tre variabili spaziali:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t).$$

Come osservato nel paragrafo 9.1, gli iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$  sono varietà caratteristiche per l'equazione del calore. In generale, in Fisica Matematica il problema di Cauchy per equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine nelle variabili  $x_1, x_2, x_3, t$  che descrivono fenomeni di evoluzione consiste nell'associare all'equazione le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Ma, se l'iperpiano  $t = 0$  è varietà caratteristica per l'equazione, il problema di Cauchy in generale non ammette soluzione, perché, come avevamo osservato nel Capitolo 7, i due dati  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  sono legati tra loro e quindi non possono essere assegnati arbitrariamente. Questo è appunto il caso dell'equazione del calore. Allora il problema di Cauchy si formula in forma ridotta, precisamente all'equazione si associa la sola condizione iniziale:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Formuliamo il problema di Cauchy "ridotto" per l'equazione del calore.

Tale problema consiste nel determinare in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$  una funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$

2)  $u$  è soluzione dell'equazione del calore in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$

3)  $u$  soddisfa alla condizione iniziale:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

E' facile provare la seguente

**Proposizione 9.4.** *Condizione necessaria affinché il problema di Cauchy per l'equazione del calore ammetta soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3).$$

**Teorema 9.6. Teorema di unicità della soluzione per il problema di Cauchy.** *Se il problema di Cauchy per l'equazione del calore ammette una soluzione limitata in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ , allora tale soluzione è unica nella classe delle funzioni limitate in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ .*

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema.

Affrontiamo ora il problema dell'esistenza della soluzione del problema di Cauchy. Limitiamoci a considerare il caso di una sola variabile spaziale che denotiamo semplicemente con  $x$  e dell'equazione omogenea. Il problema si presenta in questa forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.4.1)$$

dove supponiamo  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  e limitata in  $\mathbb{R}$ . Quest'ultima condizione viene richiesta per avere l'unicità della soluzione.

Con il metodo della trasformata di Fourier si può provare il seguente teorema di esistenza:

**Teorema 9.7.** *Se la funzione  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  ed è limitata in  $\mathbb{R}$ , allora la funzione  $u = u(x, t)$  così definita:*

- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = \varphi(x)$

è la soluzione del problema di Cauchy (9.4.1) nella classe delle funzioni limitate in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

L'equazione

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \quad (9.4.2)$$

è nota come *formula di Poisson*.

Non dimostriamo il teorema, mentre dimostriamo la dipendenza continua della soluzione del problema (9.4.1) dal dato iniziale  $\varphi$ .

A tal fine supponiamo  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  e limitata in  $\mathbb{R}$  ed assumiamo come norma per  $\varphi$  la seguente:

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|.$$

Cerchiamo poi la soluzione  $u$  del problema (9.4.1) nella classe delle funzioni continue e limitate in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  per cui assumiamo come norma per  $u$  la seguente:

$$\|u\|_2 = \sup_{\mathbb{R} \times [0, +\infty)} |u|.$$

**Teorema 9.8.** *La soluzione  $u$  limitata del problema di Cauchy (9.4.1) dipende con continuità dal dato iniziale  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  e limitato in  $\mathbb{R}$ , secondo la topologia individuata dalle norme precisate sopra.*

#### Dimostrazione

Siano  $u$  e  $u^*$  le soluzioni limitate del problema (9.4.1) con dato iniziale  $\varphi$  e  $\varphi^*$ , entrambi continui e limitati in  $\mathbb{R}$ .

Vogliamo provare che:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \|\varphi - \varphi^*\|_1 < \delta \implies \|u - u^*\|_2 < \epsilon. \quad (9.4.3)$$

Osserviamo che la funzione  $u - u^*$  è la soluzione limitata del problema di Cauchy (9.4.1) con dato iniziale  $\varphi - \varphi^*$ .

Allora, per il teorema 9.7, per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  si ha:

$$u(x, t) - u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi) - \varphi^*(\xi)] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^*(x, t)| &\leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi) - \varphi^*(\xi)| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \leq \\ &\leq \|\varphi - \varphi^*\|_1 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \end{aligned} \quad (9.4.4)$$

Facciamo ora un cambiamento di variabile d'integrazione nell'ultimo integrale della (9.4.4):

$$\frac{x - \xi}{2a\sqrt{t}} = \lambda \implies d\lambda = -\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}.$$

D'altra parte

$$\text{per } \xi \rightarrow -\infty \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty \quad \lambda \rightarrow -\infty.$$

Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} 2a\sqrt{t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

Se sostituiamo il risultato (9.4.5) nella (9.4.4), deduciamo:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad |u(x, t) - u^*(x, t)| \leq \|\varphi - \varphi^*\|_1.$$

Inoltre

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |u(x, 0) - u^*(x, 0)| = |\varphi - \varphi^*| \leq \|\varphi - \varphi^*\|_1.$$

Dunque

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \quad |u(x, t) - u^*(x, t)| \leq \|\varphi - \varphi^*\|_1,$$

ossia

$$\|u - u^*\|_2 \leq \|\varphi - \varphi^*\|_1.$$

Da ciò segue la (9.4.3), poiché, fissato  $\epsilon > 0$ , basta prendere  $\delta \leq \epsilon$ .

La dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale è così dimostrata.

**Osservazione 9.3.** Il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in una sola variabile spaziale è ben posto nel senso di Hadamard nella classe delle funzioni limitate in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

Vediamo ora un'interpretazione fisica del problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in una sola variabile spaziale:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A tale problema si perviene se si vuole determinare la temperatura  $\forall t \geq 0$  nei punti di una sbarra rigida, omogenea, di lunghezza illimitata, priva di sorgenti interne di calore, una volta che sia nota la temperatura all'istante iniziale in tutti i punti della sbarra.

Supponiamo che la temperatura iniziale sia data da una funzione  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  tale che:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &> 0 & \forall x \in (x_1, x_2) \\ \varphi(x) &= 0 & \forall x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty).\end{aligned}$$

Per come è definita, la funzione  $\varphi$  è limitata in  $\mathbb{R}$ .

Per determinare la temperatura nella sbarra per  $t > 0$ , usiamo la formula di Poisson in cui possiamo prendere l'integrale esteso all'intervallo  $(x_1, x_2)$  invece che a tutto  $\mathbb{R}$  poiché  $\varphi$  è nulla al di fuori di  $(x_1, x_2)$ . Perciò

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi > 0.$$

Inizialmente il calore è concentrato nel tratto della sbarra corrispondente all'intervallo  $(x_1, x_2)$ , ma in qualsiasi istante successivo a quello iniziale, comunque vicino a quest'ultimo, il calore ha già raggiunto tutti i punti della sbarra, per quanto questi siano lontani dal tratto corrispondente a  $(x_1, x_2)$ . Deduciamo quindi che il calore ha una velocità di propagazione infinita, ma ciò è in contraddizione con l'esperienza che ci mostra che la velocità di propagazione del calore è finita. Dunque il modello che viene utilizzato per descrivere la propagazione del calore in un solido rigido basato sull'equazione di Fourier dà risultati non in stretto accordo con l'esperienza. In effetti sono stati proposti diversi altri modelli per la propagazione del calore, ma a tutt'oggi non si è trovato alcun modello accettabile da sostituire a quello classico.

Del resto la contraddizione tra risultati teorici e risultati sperimentali non comporta grandi problemi dal punto di vista pratico. Infatti, se consideriamo un punto molto lontano dal tratto della sbarra in cui è concentrato inizialmente il calore ed un istante molto vicino a quello iniziale, il valore della temperatura in tale punto ed in tale istante è molto vicino a zero per la presenza sotto integrale del fattore esponenziale.



# Capitolo 10

## Equazione delle onde o di d'Alembert

### 10.1 Generalità sull'equazione di d'Alembert.

L'equazione di d'Alembert nelle quattro variabili reali  $x_1, x_2, x_3, t$  si presenta nella forma:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = F(x_1, x_2, x_3, t) \quad (V = \text{costante} > 0). \quad (10.1.1)$$

L'equazione delle onde interviene nello studio di molti fenomeni fisici.

Come abbiamo visto nel capitolo relativo ai fluidi perfetti, a tale equazione omogenea soddisfa la densità di massa di un fluido perfetto barotropico nell'approssimazione dei piccoli moti attorno alla quiete.

L'equazione delle onde governa la propagazione ondosa nei solidi elastici lineari. Inoltre svolge un ruolo importante anche in elettromagnetismo poiché le componenti del campo elettrico e magnetico, quando si propagano in un dielettrico omogeneo ed elettricamente scarico, soddisfano all'equazione di d'Alembert omogenea.

La (10.1.1) è una PDE lineare, del II ordine, a coefficienti costanti, di tipo iperbolico in  $\mathbb{R}^4$ .

Non si presenta già ridotta alla II forma canonica, ma è molto semplice ridurla a tale forma perché basta considerare la seguente trasformazione delle variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, t) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3, t' = Vt) \end{aligned}$$

Ai fini della formulazione del problema di Cauchy è importante stabilire se gli

iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$  sono varietà caratteristiche per l'equazione delle onde.

**Proposizione 10.1.** *Gli iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$  non sono varietà caratteristiche per l'equazione delle onde in  $\mathbb{R}^4$ .*

Dimostrazione

L'equazione delle caratteristiche associata all'equazione delle onde è la seguente:

$$\frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (10.1.2)$$

Si vede immediatamente che gli iperpiani di equazione  $t = \text{costante}$  non sono varietà caratteristiche per l'equazione delle onde in  $\mathbb{R}^4$ . Infatti la funzione  $f$  così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = t \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4$$

non è soluzione dell'equazione delle caratteristiche poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^4.$$

## 10.2 Problema di Cauchy.

Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde (10.1.1) consiste nel determinare in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$  una funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$
- 2)  $u$  è soluzione dell'equazione delle onde in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$
- 3)  $u$  soddisfa alle condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

E' di immediata dimostrazione la seguente

**Proposizione 10.2.** *Condizione necessaria affinché il problema di Cauchy per l'equazione delle onde ammetta soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)), \quad \varphi_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3).$$

Si potrebbe provare il seguente

**Teorema 10.1. Teorema di unicità.** *Se il problema di Cauchy per l'equazione delle onde ammette soluzione, questa è unica.*

Omettiamo la dimostrazione del teorema.

Affrontiamo ora la questione dell'esistenza della soluzione del problema di Cauchy limitandoci a considerare l'equazione delle onde omogenea.

Premettiamo il seguente lemma di cui non forniamo la dimostrazione.

**Lemma 10.1.** *Data la funzione  $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$  con  $k \geq 2$ , sia  $u_\varphi = u_\varphi(x, t)$  la funzione così definita:*

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \quad u_\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi V} \int_{\Sigma_{Vt}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{r} d\Sigma,$$

dove  $\Sigma_{Vt}(x)$  è la superficie sferica di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $x$  e raggio  $Vt$  e  $r = |\xi - x|$ . Allora  $u_\varphi$  gode delle seguenti proprietà:

- i)  $u_\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$
- ii)  $u_\varphi$  è soluzione dell'equazione delle onde omogenea in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$
- iii)  $u_\varphi(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

Grazie a tale lemma, è possibile ottenere un teorema di esistenza della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea.

**Teorema 10.2. Teorema di esistenza.** *Se i dati iniziali  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  hanno le seguenti proprietà di regolarità:*

$$\varphi_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3),$$

allora la funzione  $u = \frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t} + u_{\varphi_1}$  è la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea.

#### Dimostrazione

Osserviamo in primo luogo che, per il lemma 10.1,  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  e dunque è soddisfatta la proprietà di regolarità richiesta alla soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

Mostriamo ora che  $u$  è soluzione in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$  dell'equazione delle onde omogenea.

Infatti, per il lemma 10.1,  $u_{\varphi_1}$  è soluzione dell'equazione delle onde omogenea in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ . Ci basta mostrare che lo è anche la funzione  $\frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t}$ . Teniamo

presente che, grazie al lemma,  $u_{\varphi_0} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  ed applichiamo alla funzione  $\frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t}$  l'operatore differenziale che compare al I membro dell'equazione delle onde. Otteniamo così in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u_{\varphi_0}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_{\varphi_0}}{\partial x_i^2} \right] = 0,$$

poiché per la proprietà *ii*) del lemma  $u_{\varphi_0}$  è soluzione dell'equazione delle onde omogenea.

Verifichiamo ora se la funzione  $u$  soddisfa alle condizioni iniziali.

$$u(x, 0) = \frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial t}(x, 0) + u_{\varphi_1}(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

per la proprietà *iii*) del lemma 10.1.

Inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2 u_{\varphi_0}}{\partial t^2}(x, 0) + \frac{\partial u_{\varphi_1}}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Infatti, grazie al lemma,:

$$\frac{\partial u_{\varphi_1}}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

mentre  $u_{\varphi_0}$ , essendo di classe  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ , soddisfa all'equazione delle onde omogenea non solo in  $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ , ma anche in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$  per continuità, per cui:

$$\frac{\partial^2 u_{\varphi_0}}{\partial t^2}(x, 0) = V^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_{\varphi_0}}{\partial x_i^2}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

poiché  $u_{\varphi_0}(x, 0) = 0$ .

Il teorema è così dimostrato.

Dunque se  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$  e  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ , il problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea ha come soluzione la funzione definita in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$  nel modo seguente:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi V} \int_{\Sigma_{Vt}(x)} \frac{\varphi_0(\xi)}{r} d\Sigma \right) + \frac{1}{4\pi V} \int_{\Sigma_{Vt}(x)} \frac{\varphi_1(\xi)}{r} d\Sigma. \quad (10.2.1)$$

La (10.2.1) è detta **formula di Poisson per l'equazione delle onde**.

**Osservazione 10.1.** E' importante sottolineare che il valore che assume nel

punto  $x$  all'istante  $t$  la soluzione  $u$  del problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea, data dalla formula di Poisson, dipende solo dai valori che assumono i dati iniziali  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  nei punti della superficie sferica di  $\mathbb{R}^3$  che ha centro nel punto  $x$  e raggio  $Vt$ .

Interpretiamo fisicamente i risultati trovati.

Consideriamo un fluido perfetto barotropico occupante tutto lo spazio geometrico  $\mathcal{E}$  e in moto nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty)$ . Come abbiamo visto nel Capitolo 7, nell'approssimazione dei piccoli moti attorno alla quiete, in assenza di forze di massa, la densità di massa  $\rho$  soddisfa in  $\mathcal{E} \times [0, +\infty)$  all'equazione delle onde omogenea:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta \rho = 0.$$

In luogo di  $\rho$  facciamo intervenire  $\rho^* = \rho - \rho_0$ , dove  $\rho_0$  è la densità del fluido nella configurazione  $\bar{\varphi}$  a partire dalla quale si considerano i piccoli moti. Poiché  $\rho_0$  è costante, il campo scalare  $\rho^*$  è soluzione dell'equazione delle onde omogenea in  $\mathcal{E} \times [0, +\infty)$ :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \rho^*}{\partial t^2} - \Delta \rho^* = 0.$$

Fisicamente,  $\rho^*$  rappresenta la perturbazione, dovuta ai piccoli moti, della densità costante  $\rho_0$  che il fluido possiede quando è in quiete nella configurazione  $\bar{\varphi}$ .

Ci proponiamo di determinare come varia  $\rho^*$  nei punti di  $\mathcal{E}$  al trascorrere del tempo, supponendo che siano noti i valori che assumono all'istante iniziale  $\rho^*$  e la sua derivata rispetto al tempo. Dobbiamo perciò determinare il campo scalare  $\rho^* = \rho^*(P, t)$  definito in  $\mathcal{E} \times [0, +\infty)$  soluzione del seguente problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \rho^*}{\partial t^2} - \Delta \rho^* &= 0 \quad \text{in } \mathcal{E} \times [0, +\infty) \\ \rho^*(P, 0) &= \varphi_0(P) \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial t}(P, 0) = \varphi_1(P) \quad \forall P \in \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{10.2.2}$$

dove  $\varphi_0 = \varphi_0(P)$  e  $\varphi_1 = \varphi_1(P)$  sono campi scalari noti.

Se consideriamo le rappresentazioni analitiche

$$\rho^* = \rho^*(x_1, x_2, x_3, t), \quad \varphi_0 = \varphi_0(x_1, x_2, x_3), \quad \varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$$

dei campi scalari

$$\rho^* = \rho^*(P, t), \quad \varphi_0 = \varphi_0(P), \quad \varphi_1 = \varphi_1(P),$$

perveniamo ad un problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea in  $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ .

Supponiamo  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^3(\mathcal{E})$ ,  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^3(\mathcal{E})$  per cui le loro rappresentazioni analitiche godono delle stesse proprietà di regolarità in  $\mathbb{R}^3$ . Allora la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è data dalla formula di Poisson.

Se passiamo dalle rappresentazioni analitiche ai campi  $\rho^* = \rho^*(P, t)$ ,  $\varphi_0 = \varphi_0(P)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(P)$ , deduciamo  $\forall (P, t) \in \mathcal{E} \times [0, +\infty)$ :

$$\rho^*(P, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi V} \int_{\Sigma_{Vt}(P)} \frac{\varphi_0(Q)}{r} d\Sigma \right) + \frac{1}{4\pi V} \int_{\Sigma_{Vt}(P)} \frac{\varphi_1(Q)}{r} d\Sigma, \quad (10.2.3)$$

dove  $\Sigma_{Vt}(P)$  è la superficie sferica dello spazio geometrico di centro  $P$  e raggio  $Vt$  e  $r = |Q - P| = Vt$ .

Dalla (10.2.3) vediamo che il valore che  $\rho^*$  assume nel punto  $P$  all'istante  $t$  dipende solo dai valori che i dati iniziali  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  assumono nei punti della superficie sferica di centro  $P$  e raggio  $Vt$ .

Assumiamo ora che  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  siano nulli al di fuori di un compatto  $K \subset \mathcal{E}$ . Considerato un punto  $P$  esterno a  $K$ , vediamo come varia la perturbazione della densità in tale punto al trascorrere del tempo.

All'istante iniziale  $t = 0$  nel punto  $P$  la densità di massa è  $\rho_0$ , ossia  $\rho^*(P, 0) = 0$ : il punto  $P$  si trova in uno stato imperturbato.

Denotiamo con  $d_1$  e  $d_2$  la distanza minima e la distanza massima di  $P$  da  $K$  rispettivamente.

Distinguiamo tre casi a seconda dei valori di  $t$ .

1)  $0 < Vt < d_1$ .

Consideriamo la superficie sferica di centro  $P$  e raggio  $Vt$ . Poichè  $Vt < d_1$ , la superficie sferica ha intersezione vuota con  $K$ . Allora  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ , essendo nulli al di fuori di  $K$ , sono nulli in tutti i punti della superficie sferica e quindi abbiamo:

$$\rho^*(P, t) = 0.$$

La perturbazione non ha ancora raggiunto il punto  $P$ .

2)  $d_1 \leq Vt \leq d_2$ .

L'intersezione tra  $\Sigma_{Vt}(P)$  e  $K$  è diversa dal vuoto,  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  non sono identicamente nulli sulla superficie sferica e quindi:

$$\rho^*(P, t) \neq 0.$$

La perturbazione ha raggiunto il punto  $P$ .

3)  $Vt > d_2$

La superficie sferica ha nuovamente intersezione vuota con  $K$ ,  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  sono identicamente nulli su tale superficie e perciò:

$$\rho^*(P, t) = 0.$$

La perturbazione ha abbandonato il punto  $P$ .

Concludiamo dunque che il punto  $P$ , esterno a  $K$ , è dapprima in uno stato imperturbato, poi viene raggiunto dalla perturbazione ed infine, dopo un certo intervallo di tempo, viene abbandonato dalla perturbazione ritornando ad uno stato imperturbato.

Quindi ad ogni istante lo spazio geometrico, occupato dal fluido, è diviso in tre regioni:

- una regione non ancora perturbata, cioè una regione che all'istante considerato non è ancora stata raggiunta dalla perturbazione
- una regione perturbata
- una regione non più perturbata, cioè una regione che è stata abbandonata dalla perturbazione.

Diamo allora le due seguenti definizioni.

**Definizione 10.1.** *Definiamo fronte d'onda anteriore all'istante  $t$  la superficie dello spazio geometrico  $\mathcal{E}$  che separa la regione che all'istante  $t$  è perturbata da quella che ancora non lo è.*

*Definiamo fronte d'onda posteriore all'istante  $t$  la superficie dello spazio geometrico  $\mathcal{E}$  che separa la regione che all'istante  $t$  è perturbata da quella che non lo è più.*

Ad un dato istante  $t$  tracciamo tutte le superfici sferiche di raggio  $Vt$  che hanno il centro nei punti di  $K$  e le due superfici, una interna ed una esterna, che rappresentano l'involuppo delle superfici sferiche. All'esterno dell'involuppo esterno non cadono punti delle superfici sferiche ed analogamente non cadono punti di tali superfici all'interno dell'involuppo interno.

L'involuppo esterno è il fronte d'onda anteriore, quello interno il fronte d'onda posteriore.

La regione compresa tra i due fronti d'onda è la regione perturbata, quella interna al fronte d'onda posteriore è la regione non più perturbata, quella esterna al fronte d'onda anteriore è la regione non ancora perturbata.

D'altra parte al trascorrere del tempo le superfici sferiche si dilatano uniformemente con velocità pari a  $V$  e quindi i due fronti d'onda avanzano in direzione normale con velocità  $V$ .

Perciò la costante  $V$ , che ha le dimensioni fisiche di una velocità, ha anche il significato fisico di velocità, poiché rappresenta la velocità di avanzamento dei fronti d'onda.

Se i dati iniziali  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  non sono nulli al di fuori di un compatto, c'è il fronte d'onda anteriore, ma non quello posteriore. Infatti assumiamo che  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  siano nulli al di fuori di un semispazio. Prendiamo un punto  $P$  che non appartiene a tale semispazio ed osserviamo che è definita la minima distanza  $d_1$  di  $P$  dal semispazio, ma la distanza del punto dal semispazio non ha un valore massimo. Volendo stabilire come varia  $\rho^*$  nel punto  $P$  al trascorrere del tempo, abbiamo solo due casi.

1)  $0 < Vt < d_1$ .

Poiché  $\Sigma_{Vt}(P)$  non interseca il semispazio:

$$\rho^*(P, t) = 0.$$

La perturbazione non ha ancora raggiunto il punto  $P$ .

2)  $Vt \geq d_1$ .

Poiché  $\Sigma_{Vt}(P)$  interseca il semispazio, abbiamo:

$$\rho^*(P, t) \neq 0.$$

La perturbazione ha raggiunto il punto  $P$  e non lo abbandona più. Una volta raggiunto dalla perturbazione, il punto continua a rimanere in uno stato perturbato.

**Osservazione 10.2.** Si potrebbe dimostrare che la presenza del fronte d'onda posteriore, nel caso in cui i dati iniziali sono nulli al di fuori di un compatto, è legata al numero delle variabili spaziali. Precisamente, se il numero delle variabili spaziali è un numero pari non c'è mai il fronte d'onda posteriore.

Sempre per quanto riguarda il problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea, si potrebbe provare, grazie alla formula di Poisson, che se  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$  ed è limitata in  $\mathbb{R}^3$  insieme alle sue derivate prime,  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  ed è limitata in  $\mathbb{R}^3$ , allora, preso un qualsiasi intervallo  $[0, T]$  con  $T > 0$ , la soluzione del problema è limitata in  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ .

Si può inoltre dimostrare il seguente

**Teorema 10.3.** *Se  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$  ed è limitata in  $\mathbb{R}^3$  insieme alle sue derivate prime,  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  ed è limitata in  $\mathbb{R}^3$ , allora la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea dipende con continuità dai due dati iniziali in ogni intervallo di tempo  $[0, T]$ , avendo preso come norme le seguenti:*

$$\|\varphi_0\|_1 = \sup_{\mathbb{R}^3} \left\{ |\varphi_0| + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \right| \right\}, \quad \|\varphi_1\|_{1'} = \sup_{\mathbb{R}^3} |\varphi_1|, \quad \|u\|_{2,T} = \sup_{\mathbb{R}^3 \times [0,T]} |u|.$$



**Osservazione 10.3.** Se i dati iniziali soddisfano alle ipotesi di regolarità e limitatezza richieste nel teorema 10.3, allora il problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea è ben posto nel senso di Hadamard in ogni intervallo limitato  $[0, T]$ .

Consideriamo ora l'equazione delle onde nel caso di una sola variabile spaziale che per semplicità denotiamo con  $x$ :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t). \quad (10.2.4)$$

La (10.2.4) è detta **equazione delle corde vibranti**. Vediamo di spiegare perchè viene chiamata in tal modo.

Supponiamo di avere una corda omogenea, flessibile, inestendibile e illimitata. Assumiamo che, quando la corda è tesa, sia sovrapposta all'asse  $Ox$  di un riferimento cartesiano ortonormale  $Oxyz$  e che nei punti della corda siano distribuite forze esterne di massa tutte parallele all'asse  $Oz$ . All'istante iniziale  $t = 0$  attribuiamo ai punti della corda uno spostamento ed una velocità paralleli entrambi all'asse  $Oz$  ed abbandoniamo la corda. Questa si mette a vibrare attorno all'asse  $Ox$  nel piano  $Oxz$ .

Sia  $u(x, t)$  lo spostamento, parallelo a  $Oz$ , del punto della corda di ascissa  $x$  all'istante  $t$ . Se ci limitiamo a studiare le "piccole" vibrazioni trasversali della corda, lo spostamento  $u = u(x, t)$  soddisfa all'equazione (10.2.4), dove il termine noto  $F(x, t)$  è legato alle forze esterne di massa e  $V$  è una costante positiva con le dimensioni fisiche di una velocità che dipende dalle proprietà fisiche della corda.

Studiare le piccole vibrazioni della corda per  $t > 0$ , noti spostamento e velocità iniziali dei punti della corda, porta a risolvere il seguente problema di Cauchy per l'equazione delle corde vibranti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Limitiamoci a considerare il caso in cui l'equazione delle corde vibranti sia omogenea (non sono distribuite forze di massa nei punti della corda) e i dati iniziali soddisfino alle ipotesi seguenti:

$$\varphi_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Proviamo che in tali ipotesi il problema di Cauchy ammette soluzione e che questa si può ottenere a partire dalla soluzione generale dell'equazione delle

corde vibranti omogenea.

Cominciamo ad osservare che tale equazione è di tipo iperbolico in  $\mathbb{R}^2$  e che quindi ammette due famiglie di varietà caratteristiche. Come è facile verificare, queste sono le due famiglie di rette:

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x - Vt = c_1\}_{c_1 \in \mathbb{R}}$$

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x + Vt = c_2\}_{c_2 \in \mathbb{R}}.$$

Riduciamo l'equazione alla I forma canonica mediante la trasformazione regolare delle variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \xi &= x - Vt \\ \eta &= x + Vt. \end{aligned}$$

L'equazione trasformata è allora la seguente:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

La sua soluzione generale è la famiglia di funzioni:

$$\bar{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

con  $f$  e  $g$  funzioni arbitrarie di classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ .

Se ritorniamo alle vecchie variabili, otteniamo che la soluzione generale dell'equazione delle corde vibranti omogenea è data da:

$$u(x, t) = f(x - Vt) + g(x + Vt). \quad (10.2.5)$$

Vediamo ora di risolvere il problema di Cauchy sfruttando la (10.2.5). A tal fine imponiamo le due condizioni iniziali:

$$f(x) + g(x) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (10.2.6)$$

$$-V f'(x) + V g'(x) = \varphi_1(x) \implies -f'(x) + g'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{V} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10.2.7)$$

Se integriamo la (10.2.7), otteniamo:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{V} \int_{x_0}^x \varphi_1(\xi) d\xi + C \quad (10.2.8)$$

con  $x_0$  numero reale arbitrario e  $C$  costante.

Sommando membro la (10.2.6) e la (10.2.8), deduciamo:

$$g(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2V} \int_{x_0}^x \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{C}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10.2.9)$$

Sottraendo membro a membro le stesse equazioni, abbiamo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{2V} \int_{x_0}^x \varphi_1(\xi) d\xi - \frac{C}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10.2.10)$$

Andiamo a sostituire nella soluzione generale le espressioni di  $f$  e  $g$  che abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - Vt) + g(x + Vt) = \\ &= \frac{\varphi_0(x - Vt) + \varphi_0(x + Vt)}{2} + \frac{1}{2V} \left[ \int_{x_0}^{x+Vt} \varphi_1(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x-Vt} \varphi_1(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{\varphi_0(x - Vt) + \varphi_0(x + Vt)}{2} + \frac{1}{2V} \left[ \int_{x_0}^{x+Vt} \varphi_1(\xi) d\xi + \int_{x-Vt}^{x_0} \varphi_1(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{\varphi_0(x - Vt) + \varphi_0(x + Vt)}{2} + \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} \varphi_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - Vt) + \varphi_0(x + Vt)}{2} + \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} \varphi_1(\xi) d\xi \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (10.2.11)$$

La (10.2.11) è nota come **formula di d'Alembert** e fornisce la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle corde vibranti nelle ipotesi di regolarità sui dati iniziali:

$$\varphi_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Interpretiamo fisicamente la formula di d'Alembert.

I dati iniziali del problema di Cauchy siano tali che la soluzione, espressa dalla (10.2.11) abbia la forma:

$$u(x, t) = f(x - Vt) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (10.2.12)$$

Supponiamo di collocarci all'istante  $t = 0$  nel punto dell'asse  $Ox$  di ascissa  $c$ , per cui per noi all'istante iniziale lo spostamento della corda è dato da  $f(c)$ . Assumiamo poi, a partire dall'istante  $t = 0$ , di muoverci di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità  $V$  nella direzione e nel verso positivo dell'asse  $Ox$ . Ad un qualsiasi istante  $t > 0$  ci troveremo nel punto dell'asse  $Ox$  di ascissa

$x = c + Vt$ , cioè nel punto la cui ascissa è tale che  $x - Vt = c$ . Dunque per noi lo spostamento della corda sarà  $u(x, t) = f(c) \quad \forall t > 0$ , ossia per noi lo spostamento dei punti della corda avrà sempre lo stesso valore, dato da  $f(c)$ . Concludiamo perciò che, se lo spostamento della corda è dato dalla (10.2.12), la forma della corda si muove mantenendosi inalterata nella direzione e nel verso positivo dell'asse  $Ox$  con velocità di modulo pari a  $V$ . Per questo motivo la funzione  $f(x - Vt)$  è detta *onda progressiva*. Le onde progressive assumono valore costante lungo le rette di equazione  $x - Vt = c_1$  che appartengono ad una delle due famiglie di varietà caratteristiche per l'equazione delle corde vibranti.

Supponiamo ora che i dati iniziali del problema di Cauchy siano tali che la soluzione, espressa dalla (10.2.11), abbia la forma:

$$u(x, t) = g(x + Vt) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (10.2.13)$$

Se ragioniamo analogamente al caso precedente e assumiamo di muoverci dall'istante  $t = 0$ , in cui ci troviamo nel punto dell'asse  $Ox$  di ascissa  $c$ , di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità di modulo  $V$  nella direzione e nel verso negativo dell'asse  $Ox$ , dedurremo che per noi lo spostamento della corda è sempre uguale a  $g(c)$ . Dunque, se lo spostamento della corda è dato dalla (10.2.13), la forma della corda si muove mantenendosi inalterata nella direzione e nel verso negativo dell'asse  $Ox$  con velocità di modulo  $V$ . Per tale motivo la funzione  $g(x + Vt)$  è detta *onda regressiva*. Le onde regressive assumono valore costante lungo le rette di equazione  $x + Vt = c_2$  che appartengono all'altra famiglia di varietà caratteristiche per l'equazione delle corde vibranti.

In generale lo spostamento dei punti della corda è dato dalla somma di un'onda progressiva e di un'onda regressiva.

### 10.3 Problema misto di I specie.

Sia  $S$  un dominio limitato di  $\mathbb{R}^3$ ,  $(0, T)$  un intervallo di tempo ( $T > 0$ ) e poniamo:

$$C_T = S \times (0, T).$$

Il problema misto di I specie per l'equazione delle onde relativo a  $\overline{C}_T$  consiste nel determinare in  $\overline{C}_T$  la funzione  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$  soddisfacente alle seguenti condizioni:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^2(C_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{C}_T)$
- 2)  $u$  è soluzione in  $C_T$  dell'equazione delle onde

3)  $u$  soddisfa alle seguenti condizioni ai limiti:

- condizioni iniziali

$$u|_{\bar{S} \times \{0\}} = \varphi_0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\bar{S} \times \{0\}} = \varphi_1$$

con  $\varphi_0 = \varphi_0(x)$  e  $\varphi_1 = \varphi_1(x)$  funzioni assegnate in  $\bar{S}$

- condizione al contorno

$$u|_{\partial S \times [0, T]} = \psi,$$

con  $\psi = \psi(x, t)$  funzione assegnata in  $\partial S \times [0, T]$ .

E' immediato provare la seguente

**Proposizione 10.3.** *Condizione necessaria affinché il problema misto di I specie per l'equazione delle onde abbia soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(C_T), \quad \varphi_0 \in \mathcal{C}^1(\bar{S}), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}(\bar{S}), \quad \psi \in \mathcal{C}^1(\partial S \times [0, T]),$$

$$\varphi_0(x) = \psi(x, 0) \quad \varphi_1(x) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) \quad \forall x \in \bar{S}.$$

Le due ultime condizioni rappresentano le condizioni di compatibilità tra dati iniziali e dato al contorno, dovute alla richiesta  $u \in \mathcal{C}^1(\bar{C}_T)$ .

Limitiamoci a considerare il problema misto di I specie per l'equazione delle onde nel caso di una sola variabile spaziale (che denotiamo con  $x$ ).

Posto  $R_T = (0, l) \times (0, t)$ , tale problema consiste nel determinare in  $\bar{R}_T$  la funzione  $u = u(x, t)$  tale che

1)  $u \in \mathcal{C}^2(R_T) \cap \mathcal{C}^1(\bar{R}_T)$

2)  $u$  è soluzione in  $R_T$  dell'equazione delle corde vibranti:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

3)  $u$  soddisfa alle seguenti condizioni ai limiti:

- condizioni iniziali

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in [0, l]$$

- condizioni al contorno

$$u(0, t) = \psi_1(t) \quad u(l, t) = \psi_2(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Proposizione 10.4.** *Condizione necessaria affinché il problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti ammetta soluzione è che:*

$$F \in \mathcal{C}(R_T), \quad \varphi_0 \in \mathcal{C}^1([0, l]), \quad \varphi_1 \in \mathcal{C}([0, l]), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^1([0, T])$$

e che siano soddisfatte le condizioni di compatibilità tra dati iniziali e dati al contorno:

$$\varphi_0(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_2(0), \quad \varphi_1(0) = \psi_1'(0), \quad \varphi_1(l) = \psi_2'(0).$$

Si potrebbero provare i due seguenti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 10.4. Teorema di unicità.** *Se il problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti ammette una soluzione  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$ , tale soluzione è unica nella classe delle funzioni  $\mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$ .*

**Teorema 10.5. Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali.** *La soluzione del problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti dipende con continuità dai due dati iniziali  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  secondo la topologia individuata dalle seguenti norme:*

$$\|\varphi_0\|_1 = \max_{[0, l]} \{|\varphi_0| + |\varphi_0'|\}, \quad \|\varphi_1\|_{1'} = \max_{[0, l]} |\varphi_1|, \quad \|u\|_2 = \max_{\overline{R}_T} |u|.$$

Affrontiamo ora la questione dell'esistenza della soluzione del problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti omogenea con dati al contorno omogenei. Cercheremo la soluzione nella classe  $\mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$  per avere l'unicità. Ciò implica che necessariamente  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2([0, l])$  e  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^1([0, l])$ . Inoltre, accanto alle condizioni di compatibilità tra dati iniziali e dati al contorno:

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0 \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$$

che sono conseguenza dell'ipotesi  $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$ , abbiamo necessariamente due altre condizioni di compatibilità che coinvolgono la derivata II di  $\varphi_0$ , poiché si richiede che  $u$  sia di classe  $\mathcal{C}^2$  in  $[0, l]$  anche per  $t = 0$ .

Infatti, in seguito a tale richiesta, deduciamo che  $u$ , soluzione del problema, per continuità è soluzione dell'equazione delle onde anche in  $[0, l] \times \{0\}$ . Dunque

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) - \varphi_0''(x) = 0 \quad \forall x \in [0, l]. \quad (10.3.1)$$

In particolare, se nella (10.3.1) poniamo  $x = 0$  e teniamo presente che, per le condizioni al contorno,  $u(0, t) = 0$ , otteniamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, 0) = 0 \implies \varphi_0''(0) = 0.$$

Analogamente, se nella (10.3.1) poniamo  $x = l$  e teniamo presente che, per le condizioni al contorno,  $u(l, t) = 0$ , otteniamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, 0) = 0 \implies \varphi_0''(l) = 0.$$

Abbiamo perciò dedotto che condizione necessaria affinché il problema che stiamo affrontando ammetta una soluzione in  $\mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$  è che  $\varphi_0$  soddisfi alle ulteriori condizioni di compatibilità con i dati al contorno:

$$\varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0.$$

Per risolvere il problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti omogenea con dati al contorno omogenei utilizzeremo il **metodo di separazione delle variabili o metodo di Fourier**, che abbiamo già usato per l'analogo problema relativo all'equazione del calore.

In primo luogo ci proponiamo di trovare tutte le funzioni  $u = u(x, t)$  definite in  $\overline{R}_T$  tali che

- i)  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$
- ii)  $u$  è soluzione non banale (ossia non identicamente nulla) dell'equazione delle corde vibranti omogenea in  $R_T$
- iii)  $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$
- iv)  $u(x, t) = X(x)\mathcal{T}(t)$ , cioè  $u$  è il prodotto di una funzione solo di  $x$  per una funzione solo di  $t$ .

Sostituiamo nell'equazione delle corde vibranti alla funzione incognita ed alle sue derivate una funzione della forma richiesta in iv) e dividiamo entrambi i membri dell'equazione così ottenuta per  $u(x, t) = X(x)\mathcal{T}(t)$ :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\mathcal{T}''(t)}{\mathcal{T}(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \forall x \in (0, l), \quad \forall t \in (0, T). \quad (10.3.2)$$

Osserviamo che nell'equazione (10.3.2) al I membro abbiamo una funzione solo di  $t$ , mentre al II membro c'è una funzione solo di  $x$ ,  $t$  e  $x$  sono variabili indipendenti e l'uguaglianza deve valere  $\forall x \in (0, l)$  e  $\forall t \in (0, T)$ . Allora necessariamente le

due funzioni a I e II membro devono essere uguali ad una stessa costante che indichiamo con  $-\lambda$ . Si ha perciò:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\mathcal{T}''(t)}{\mathcal{T}(t)} = -\lambda \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Dunque l'equazione alle derivate parziali che avevamo in partenza si spezza nelle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}''(t) + \lambda a^2 \mathcal{T}(t) &= 0 \quad \forall t \in (0, T) \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad \forall x \in (0, l). \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Le (10.3.3) sono equazioni differenziali ordinarie del II ordine, lineari, a coefficienti costanti ed omogenee.

D'altra parte, dalle condizioni iii) e iv) otteniamo:

$$X(0)\mathcal{T}(t) = 0 \quad X(l)\mathcal{T}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$

da cui, non potendo essere  $\mathcal{T}$  identicamente nulla poichè avremmo una soluzione banale, segue:

$$X(0) = 0 \quad X(l) = 0. \quad (10.3.4)$$

Associamo alla seconda delle (10.3.3) le condizioni (10.3.4) per cui abbiamo il problema differenziale agli autovalori:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \forall x \in (0, l) \\ X(0) = 0 \quad X(l) = 0. \end{cases} \quad (10.3.5)$$

Tale problema è lo stesso cui siamo pervenuti relativamente all'equazione del calore. Utilizzando i risultati ottenuti nel Capitolo 9, §3, possiamo asserire che il problema ammette solo autovalori positivi e questi sono un'infinità numerabile:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

Le corrispondenti autofunzioni sono:

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad x \in [0, l], \quad n = 1, 2, \dots, \quad c_n \text{ costante arbitraria.}$$

Consideriamo ora la prima delle equazioni (10.3.3). Poiché siamo interessati solo ai valori di  $\lambda$  che sono autovalori per il problema (10.3.5), li inseriamo nell'equazione ottenendo in realtà un'infinità numerabile di equazioni. Se denotiamo con  $\mathcal{T}_n$  la funzione incognita dell'equazione con  $\lambda = \lambda_n$ , abbiamo:

$$\mathcal{T}_n''(t) + \left(\frac{n\pi V}{l}\right)^2 \mathcal{T}_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$



All'equazione non è associata alcuna condizione. La sua soluzione generale è data da:

$$\mathcal{T}_n(t) = a'_n \cos\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) + b'_n \sin\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots,$$

dove  $a'_n, b'_n$  sono costanti arbitrarie.

In conclusione le funzioni soddisfacenti alle condizioni i)-iv) che cercavamo sono un'infinità numerabile e sono date da:

$$u_n(x, t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots,$$

con  $a_n = a'_n c_n$  e  $b_n = b'_n c_n$  costanti arbitrarie.

Ora, se consideriamo la somma di un numero finito delle funzioni  $u_n$  appena trovate, deduciamo che questa soddisfa alle stesse condizioni cui soddisfano le  $u_n$ , eccetto ovviamente la iv).

Prendiamo poi in esame la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (10.3.6)$$

Poiché ogni suo termine è soluzione dell'equazione delle corde vibranti omogenea, questa è detta *soluzione formale dell'equazione delle corde vibranti omogenea*, indipendentemente dalle sue proprietà di convergenza.

Se i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  sono tali che la serie (10.3.6) converge uniformemente in  $\overline{R}_T$  insieme alle serie ottenute dalla (10.3.6) derivando termine a termine fino a due volte rispetto a  $x$  e a  $t$ , allora per un noto teorema sulle serie di funzioni, abbiamo che la somma della serie  $u = u(x, t)$  gode delle proprietà:

- 1)  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{R}_T)$
- 2)  $u$  è soluzione dell'equazione delle corde vibranti omogenea in  $R_T$
- 3)  $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .

Riprendiamo ora in esame il problema misto di I specie relativo a  $\overline{R}_T$  per l'equazione delle corde vibranti omogenea con dati iniziali  $\varphi_0, \varphi_1$  e dati al contorno omogenei. Utilizziamo la serie (10.3.6) e procediamo formalmente, cioè supponiamo per il momento che i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  siano tali che la serie abbia le proprietà di convergenza uniforme enunciate precedentemente ed imponiamo alla somma della serie, che per quanto osservato prima, gode di tutte le proprietà

richieste alla soluzione del problema con l'esclusione delle condizioni iniziali, di soddisfare a queste ultime. Avremo perciò per la prima condizione iniziale:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in [0, l].$$

La serie al I membro deve quindi rappresentare la serie trigonometrica di Fourier in soli seni della funzione  $\varphi_0$ . Allora si deve avere necessariamente:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.3.7)$$

Imponiamo la seconda condizione iniziale:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n\pi V}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in [0, l].$$

La serie al I membro deve quindi rappresentare la serie trigonometrica di Fourier in soli seni della funzione  $\varphi_1$ . Allora si deve avere necessariamente:

$$b_n \frac{n\pi V}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots,$$

ossia

$$b_n = \frac{2}{n\pi V} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.3.8)$$

Si potrebbe provare il seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare:

**Teorema 10.6.** *Se le funzioni  $\varphi_0, \varphi_1$  godono delle seguenti proprietà:*

- i)  $\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_1, \varphi_1'$ , sono assolutamente continue in  $[0, l]$*
- ii)  $\varphi_0''', \varphi_1'' \in L^2([0, l])$*
- iii)  $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0, \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0,$*

*allora la serie (10.3.6) con i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  dati dalle (10.3.7) e (10.3.8) converge uniformemente in  $[0, l] \times [0, +\infty)$  insieme alle serie ottenute derivando termine e termine la serie (10.3.6) fino a due volte rispetto a  $x$  e a  $t$ .*

Il teorema 10.6 ci consente di enunciare il seguente

**Teorema 10.7. Teorema di esistenza.** *Se i dati iniziali  $\varphi_0, \varphi_1$  soddisfano alle condizioni i), ii), iii) del teorema 10.6, il problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti omogenea con dati al contorno omogenei ammette soluzione di classe  $\mathcal{C}^2$  in  $[0, l] \times [0, +\infty)$  e non solo in  $[0, l] \times [0, T]$  e tale soluzione è la somma della serie (10.3.6) con i coefficienti dati dalle (10.3.7) e (10.3.8).*

**Osservazione 10.4.** Il problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti omogenea con  $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$  e  $\varphi_0, \varphi_1$  soddisfacenti alle ipotesi del teorema 10.6 è ben posto nel senso di Hadamard nella classe delle funzioni appartenenti a  $\mathcal{C}^2(\overline{R_T})$ .

Ora interpretiamo fisicamente i risultati trovati.

Consideriamo una corda omogenea, flessibile, inestendibile e di lunghezza  $l$ . Assumiamo che, quando la corda è tesa, sia sovrapposta al segmento dell'asse  $Ox$  di un riferimento cartesiano ortonormale  $Oxyz$  avente il primo estremo nell'origine  $O$  e il secondo nel punto di ascissa  $x = l$ . Inoltre nei punti della corda siano distribuite forze esterne di massa parallele all'asse  $Oz$ .

Per determinare le piccole vibrazioni trasversali della corda nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ , noti spostamento e velocità dei punti della corda all'istante  $t = 0$  e noto lo spostamento dei due estremi della corda ad ogni istante in  $[0, T]$ , dobbiamo risolvere un problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti. Supponiamo in particolare che non siano presenti forze esterne di massa e che i due estremi della corda siano fissi. Allora arriviamo ad un problema misto di I specie per l'equazione delle corde vibranti omogenea con dati al contorno omogenei. Se i dati iniziali  $\varphi_0 = \varphi_0(x)$  (spostamento iniziale dei punti della corda) e  $\varphi_1 = \varphi_1(x)$  (velocità iniziale dei punti della corda) soddisfano alle ipotesi del teorema 10.6, lo spostamento  $u = u(x, t)$  dei punti della corda nell'intervallo di tempo  $[0, T]$  o più in generale  $[0, +\infty)$  è rappresentato dalla somma della serie (10.3.6) con i coefficienti dati dalle (10.3.7) e (10.3.8) e quindi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Osserviamo che  $\forall n = 1, 2, \dots$  è possibile determinare due costanti  $A_n$  e  $\alpha_n$  tali che:

$$a_n = A_n \sin \alpha_n, \quad b_n = A_n \cos \alpha_n.$$

Potremo allora scrivere:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left[ \sin \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) + \cos \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi V t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi V t}{l} + \alpha_n\right). \end{aligned} \tag{10.3.9}$$

L'ennesimo termine dell'ultima serie della (10.3.9), cioè

$$A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi V t}{l} + \alpha_n\right), \tag{10.3.10}$$

rappresenta un'onda stazionaria. In corrispondenza di essa, ogni punto della corda si muove lungo l'asse  $Oz$  di moto oscillatorio armonico con pulsazione pari a  $\frac{n\pi V}{l}$  e fase iniziale  $\alpha_n$ . L'ampiezza del moto del punto di ascissa  $x$  è data da  $A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ .

Il termine ennesimo (10.3.10) della serie è detto *componente armonica*. La componente armonica corrispondente a  $n = 1$ , che ha la pulsazione più piccola, è detta *armonica fondamentale*, mentre le altre sono dette *armoniche successive*.

Vediamo dunque che le piccole vibrazioni trasversali di una corda con gli estremi fissi sono date dalla sovrapposizione delle componenti armoniche. Il timbro del suono emesso dalla corda vibrante è determinato dalla combinazione di tali armoniche.