

Meccanica dei Continui

Alessandra Borrelli
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Ferrara
brs@unife.it

2011/2012

Indice

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Nozioni di base sul calcolo tensoriale | 1 |
| 1.1 | Richiami sui vettori dello spazio geometrico. | 1 |
| 1.2 | Tensori di ordine r | 5 |
| 1.3 | Algebra tensoriale: principali operazioni sui tensori | 10 |
| 1.4 | Altre nozioni di algebra tensoriale | 15 |
| 1.5 | Funzioni tensoriali di una o più variabili reali | 20 |
| 1.6 | Campi tensoriali ed operatori differenziali | 26 |
| 1.7 | Integrazione dei campi tensoriali | 36 |
| 1.8 | Campi tensoriali dipendenti da una variabile reale | 39 |
| 1.9 | Funzioni tensoriali di una variabile tensoriale | 42 |
| 2 | Corpi continui deformabili: cinematica | 47 |
| 2.1 | Definizione di corpo continuo | 47 |
| 2.2 | Cinematica dei corpi continui | 49 |
| 2.3 | Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario. | 67 |
| 2.4 | Teorema del trasporto della circolazione, moti piani | 77 |
| 3 | Corpi continui deformabili: cinetica, dinamica e termodinamica | 85 |
| 3.1 | Cinetica. | 85 |
| 3.2 | Dinamica | 91 |
| 3.3 | Termodinamica | 100 |
| 3.4 | Problema termomeccanico per un corpo continuo | 108 |
| 4 | Fluidi perfetti | 113 |
| 4.1 | Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti | 113 |
| 4.2 | Problema del moto per un fluido perfetto | 119 |
| 4.3 | Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti | 124 |
| 4.4 | Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete. | 127 |
| 4.5 | Altre proprietà dei fluidi perfetti. | 135 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 5 | Fluidi viscosi classici | 141 |
| 5.1 | Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici. | 141 |
| 5.2 | Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica. | 145 |
| 5.3 | Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile. | 151 |
| 5.4 | Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili. | 155 |
| 6 | Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo | 161 |
| 6.1 | Impostazione del problema. | 161 |
| 6.2 | Risultati preliminari. | 162 |
| 6.3 | Teorema di unicità. | 165 |
| 6.4 | Teorema di stabilità. | 173 |
| 7 | Moti di Poiseuille e di Couette per un fluido newtoniano incompressibile | 177 |
| 7.1 | Premesse. | 177 |
| 7.2 | Moto di Poiseuille tra due piani paralleli. | 178 |
| 7.3 | Moto di Couette tra due piani paralleli. | 186 |
| 7.4 | Moto di Poiseuille in un cilindro illimitato. | 192 |
| 8 | Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incompressibile | 205 |
| 8.1 | Premesse | 205 |
| 8.2 | Soluzioni non simmetriche | 209 |
| 9 | Termomeccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale | 221 |
| 9.1 | Analisi della deformazione per un corpo continuo. | 221 |
| 9.2 | Condizione di incompressibilità ed equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale. | 232 |
| 9.3 | Prima e seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale. | 238 |
| 9.4 | Equazione e disequazione indefinita conseguenze degli assiomi della termodinamica. | 245 |
| 10 | Solidi termoelastici e solidi elastici | 251 |
| 10.1 | Classe costitutiva dei solidi termoelastici. | 251 |
| 10.2 | Proprietà dei solidi termoelastici. | 259 |

| | |
|---|------------|
| 10.3 Solidi elastici. | 262 |
| 11 Solidi elastici lineari | 271 |
| 11.1 Definizione di solido elastico lineare. | 271 |
| 11.2 Sottoclassi di solidi elastici lineari. | 280 |
| 11.3 Elastostatica lineare. | 288 |
| 11.4 Elastodinamica lineare. | 298 |
| 12 Appendice | 313 |
| 12.1 Definizione di spazio metrico | 313 |
| 12.2 Superfici regolari dello spazio geometrico | 313 |
| 12.3 Richiami sugli spazi topologici | 315 |
| 12.4 Definizione di σ -algebra e misura | 317 |
| 12.5 Modalità d'esame | 319 |
| 13 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate curvilinee. | 321 |
| 13.1 Sistemi di coordinate curvilinee. | 321 |
| 13.2 Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali. | 333 |
| 13.3 Equazioni di Navier-Stokes in diversi sistemi di coordinate curvilinee | 342 |
| 14 Moti con un punto di ristagno per un fluido newtoniano | 353 |
| 14.1 Premesse | 353 |
| 14.2 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile | 355 |
| 14.3 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile: impostazione del problema | 360 |
| 14.4 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano : risultati analitici e numerici | 365 |
| 14.5 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile | 371 |
| 14.6 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido new- toniano: impostazione del problema | 379 |
| 14.7 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtonia- no incomprimibile: risultati analitici | 383 |
| 14.8 Risultati numerici e discussione | 392 |
| 15 Magnetofluidodinamica | 401 |
| 15.1 Brevi richiami di elettromagnetismo | 401 |
| 15.2 Elementi di magnetofluidodinamica | 405 |
| 15.3 Moto di Poiseuille tra due piani in un campo magnetico esterno . | 410 |
| 15.4 Moto di Couette tra due piani in un campo magnetico esterno. . . | 420 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 15.5 | Appendice sulle unità di misura. | 428 |
| 16 | Propagazione ondosa nei solidi elastici lineari | 431 |
| 16.1 | Premesse | 431 |
| 16.2 | Tensore acustico di un solido elastico lineare. | 432 |
| 16.3 | Autovalori ed autovettori di un tensore di ordine due simmetrico. | 435 |
| 16.4 | Onde piane progressive. | 442 |
| 16.5 | Onde piane progressive elastiche. | 447 |

Capitolo 1

Nozioni di base sul calcolo tensoriale

1.1 Richiami sui vettori dello spazio geometrico.

Com'è noto, l'insieme dei vettori dello spazio geometrico, denotato con $\vec{\mathcal{E}}$, è uno spazio vettoriale reale, tridimensionale, euclideo e quindi normato.

Ricordiamo che una base per $\vec{\mathcal{E}}$ è una qualsiasi terna ordinata di vettori non complanari. Per motivi di semplicità prenderemo in considerazione soltanto basi ortonormali, cioè basi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tali che

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker.

Indichiamo con \mathcal{B}_0 l'insieme di tutte le basi ortonormali di $\vec{\mathcal{E}}$.

Fissata la base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ogni vettore \vec{u} si può decomporre in uno ed un solo modo rispetto a tale base per cui:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i,$$

dove la terna ordinata di numeri reali (u_1, u_2, u_3) , detta *terna delle componenti di \vec{u} rispetto alla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$* , individua univocamente il vettore.

Grazie all'ortonormalità della base, si ha:

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Se, accanto alla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, consideriamo una nuova base ortonormale $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, definiamo *matrice di passaggio* dalla prima base, che conveniamo

di chiamare *vecchia base*, alla seconda, che conveniamo di chiamare *nuova base*, la matrice 3×3

$$\mathbb{A} = [\alpha_{ih}],$$

dove con α_{ih} denotiamo la componente di \vec{e}_h rispetto al vettore \vec{e}_i della vecchia base.

Si noti che, essendo $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ortonormale, si ha

$$\alpha_{ih} = \vec{e}_h \cdot \vec{e}_i, \quad h, i = 1, 2, 3.$$

D'altra parte, essendo anche $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ortonormale, deduciamo che α_{ih} è anche la componente di \vec{e}_i rispetto a \vec{e}_h e \mathbb{A} è una matrice ortogonale, essendo:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^t.$$

Com'è noto, dato un vettore \vec{u} , le sue componenti rispetto alla nuova base (*nuove componenti*) si esprimono tramite le componenti rispetto alla vecchia base (*nuove componenti*) nel modo seguente:

$$\bar{u}_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ih} u_i, \quad h = 1, 2, 3, \quad (1.1.1)$$

cioè le nuove componenti sono delle combinazioni lineari delle vecchie i cui coefficienti sono gli elementi della matrice \mathbb{A} o meglio di \mathbb{A}^t .

Le (1.1.1) sono equivalenti alla relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Al secondo membro della (1.1.2) possiamo sostituire a \mathbb{A}^t la matrice \mathbb{A}^{-1} .

Ricordiamo a questo punto la **convenzione sulla somma di Einstein**, in base alla quale, ogni volta che compare una somma su uno stesso indice ripetuto due volte si omette il simbolo di sommatoria.

Ad esempio, adottando la convenzione suddetta, scriveremo:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i =: u_i \vec{e}_i;$$

$$\bar{u}_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ih} u_i =: \alpha_{ih} u_i \quad h = 1, 2, 3.$$

L'indice ripetuto su cui si effettua la somma è detto *indice saturato*, mentre ogni indice non saturato è detto *indice libero*.

Nei due esempi precedenti i è un indice saturato e nel secondo esempio h è un indice libero.

Si noti che quando un indice è saturato non ha importanza il simbolo con cui lo denotiamo.

Indichiamo con I_n l'insieme dei primi n numeri naturali:

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Definizione 1.1. Dato un insieme $X \neq \emptyset$, definiamo *successione di n elementi di X* ogni applicazione del tipo

$$I_n \longrightarrow X$$

$$i \longmapsto x_i,$$

avendo denotato con x_i l'elemento di X che l'applicazione associa a i .

E' evidente che ad ogni successione di n elementi è associata una n -upla ordinata di elementi di X e che viceversa ogni n -upla ordinata di elementi di X individua una successione di n elementi di X . Per tale motivo per denotare una successione di n elementi di X useremo la notazione: $(x_i)_{i=1, \dots, n}$.

Definizione 1.2. Se $n, m \in \mathbb{N}$, chiamiamo *successione di $n \cdot m$ elementi di X* ogni applicazione del tipo

$$I_n \times I_m \longrightarrow X$$

$$(i, j) \longmapsto x_{ij},$$

dove con x_{ij} denotiamo l'elemento di X che l'applicazione associa alla coppia ordinata (i, j) .

Una successione di $n \cdot m$ elementi di X verrà denotata con $(x_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$. La definizione si può estendere al caso in cui intervengono più di due numeri naturali.

Poiché lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$ ha dimensione 3, per noi nel seguito avranno un importante ruolo le successioni di 3 elementi.

Definizione 1.3. Chiameremo *successione semplice di elementi di X* ogni successione di 3 elementi di X . In tal caso scriveremo semplicemente (x_i) in luogo di $(x_i)_{i=1, 2, 3}$.

Osserviamo che, fissata in $\vec{\mathcal{E}}$ una base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ad ogni vettore \vec{u} resta associata una successione semplice di scalari, cioè la successione (u_i) costituita dalla terna ordinata delle sue componenti. Così ogni base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una successione semplice di vettori che denoteremo semplicemente con (\vec{e}_i) .

Definizione 1.4. *Sia r un numero naturale > 1 . Chiamiamo successione r -upla di elementi di X ogni applicazione così definita:*

$$\underbrace{I_3 \times \dots \times I_3}_{r \text{ volte}} \longrightarrow X$$

$$(i_1, \dots, i_r) \longmapsto x_{i_1 \dots i_r},$$

avendo indicato con $x_{i_1 \dots i_r}$ l'elemento di X che l'applicazione associa a (i_1, \dots, i_r) .

Per denotare una successione r -upla useremo la seguente scrittura: $(x_{i_1 \dots i_r})$. Indichiamo con \mathcal{S}_1 l'insieme di tutte le successioni semplici di scalari e in generale con \mathcal{S}_r l'insieme di tutte le successioni r -uple di scalari.

Definizione 1.5. *Chiamiamo sistema semplice di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ ogni applicazione del tipo:*

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_1$$

$$(\vec{e}_i) \longmapsto (x_i),$$

dove il termine individuato dall'indice i della successione associata alla base (\vec{e}_i) , cioè x_i , è in corrispondenza con l' i -esimo vettore \vec{e}_i .

E' evidente che ad ogni vettore \vec{u} è associato un sistema semplice di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$, poiché, fissata una qualsiasi base $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$, resta definita la successione semplice (u_i) delle sue componenti rispetto a tale base e la i -esima componente è in corrispondenza con il vettore di base \vec{e}_i .

Definizione 1.6. *Chiamiamo sistema r -uplo di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ (con $r > 1$) ogni applicazione del tipo*

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_r$$

$$(\vec{e}_i) \longmapsto (x_{i_1 \dots i_r}),$$

dove il termine individuato dalla r -upla ordinata di indici (i_1, \dots, i_r) associato alla base (\vec{e}_i) , cioè $x_{i_1 \dots i_r}$, è in corrispondenza con la r -upla ordinata di vettori di base $(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_r})$.

Esempio 1.1 Considerata una qualsiasi base ortonormale (\vec{e}_i) , se poniamo:

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad i, j = 1, 2, 3,$$

l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (a_{ij}), \end{aligned}$$

è un sistema doppio di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$.

Definizione 1.7. Diciamo che un sistema semplice di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ ha carattere vettoriale se la successione semplice di scalari che viene associata ad ogni base ortonormale al variare della base muta con la stessa legge lineare con cui muta la successione delle componenti di un vettore.

Ovviamente ad ogni vettore in $\vec{\mathcal{E}}$ è associato un sistema semplice di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere vettoriale e viceversa che ogni sistema semplice di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere vettoriale individua un vettore in $\vec{\mathcal{E}}$.

Definizione 1.8. Dato un sistema r -uplo di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ (con $r > 1$), diremo che ha carattere tensoriale se la successione r -upla di scalari che viene associata ad ogni base al variare della base ortonormale muta con la legge lineare che è la generalizzazione della legge con cui muta la successione delle componenti di un vettore.

1.2 Tensori di ordine r

Diamo una definizione preliminare.

Definizione 1.9. Dati i tre spazi vettoriali reali V_n, V'_m, V''_{nm} di dimensione n, m, nm rispettivamente, sia τ un'applicazione da $V_n \times V'_m$ a V''_{nm} , cioè un'applicazione:

$$\begin{aligned} \tau : V_n \times V'_m &\longrightarrow V''_{nm} \\ (\vec{v}, \vec{v}') &\longmapsto \tau(\vec{v}, \vec{v}') \end{aligned}$$

Diciamo che τ attribuisce a V''_{nm} la struttura di spazio prodotto tensoriale di V_n per V'_m e V''_{nm} si denota con $V_n \otimes V'_m$ se gode delle due seguenti proprietà:

- è bilineare
- comunque si scelgano una base $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$ in V_n e una base $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$ in V'_m , la successione di nm vettori $(\tau(\vec{a}_i, \vec{a}'_j))_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ fornisce una base per V''_{nm} .

L'applicazione τ è detta allora *moltiplicazione tensoriale* e $\forall \vec{v} \in V_n, \forall \vec{v}' \in V'_m$ il vettore $\tau(\vec{v}, \vec{v}')$ è detto *prodotto tensoriale dei vettori \vec{v} e \vec{v}'* e denotato con $\vec{v} \otimes \vec{v}'$.

Dati i due spazi vettoriali reali V_n, V'_m , sia $V''_{nm} = V_n \otimes V'_m$. Fissamo la base $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$ in V_n e la base $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$ in V'_m ed osserviamo che per definizione di moltiplicazione tensoriale, posto

$$\tilde{\pi}_{ij} = \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m,$$

la successione di nm vettori $(\tilde{\pi}_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ fornisce una base per $V_n \otimes V'_m$, detta *base associata alle due basi $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}, (\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$* .

Per la bilinearità della moltiplicazione tensoriale si prova la seguente

Proposizione 1.1. *Fissata la base $(\vec{a}_i)_{i=1, \dots, n}$ in V_n e la base $(\vec{a}'_j)_{j=1, \dots, m}$ in V'_m , la componente del prodotto tensoriale di un vettore $\vec{v} \in V_n$ per un vettore $\vec{v}' \in V'_m$ rispetto al vettore di base per $V_n \otimes V'_m$ $\tilde{\pi}_{ij} = \vec{a}_i \otimes \vec{a}'_j$ è data dal prodotto della componente di \vec{v} rispetto al vettore di base \vec{a}_i per la componente di \vec{v}' rispetto al vettore di base \vec{a}'_j , ossia se $\vec{v} = v_i \vec{a}_i, \vec{v}' = v'_j \vec{a}'_j$, allora*

$$\vec{v} \otimes \vec{v}' = v_i v'_j \tilde{\pi}_{ij}.$$

La definizione di moltiplicazione tensoriale si estende al caso di più di due spazi vettoriali reali se si richiede che sia associativa.

Supponiamo dapprima di avere tre spazi vettoriali reali di dimensione finita: V_n, V'_m, V''_p e che la moltiplicazione tensoriale sia associativa. Allora definiamo *spazio prodotto tensoriale dei tre spazi vettoriali reali V_n, V'_m, V''_p* il seguente spazio vettoriale reale di dimensione nmp :

$$(V_n \otimes V'_m) \otimes V''_p$$

che denotiamo semplicemente con:

$$V_n \otimes V'_m \otimes V''_p.$$

Dati r spazi vettoriali reali di dimensione finita con $r > 3$ la definizione del loro prodotto tensoriale si dà per ricorrenza su r .

Cominciamo col dare la definizione di **tensore doppio** o **tensore di ordine 2** su $\vec{\mathcal{E}}$.

Definizione 1.10. *Chiamiamo **tensore doppio** o **tensore di ordine 2** su $\vec{\mathcal{E}}$ ogni elemento di $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$.*

Osserviamo che $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 9 e dunque i tensori doppi sono essi stessi dei vettori, essendo elementi di uno spazio vettoriale.

Nel seguito i tensori doppi, come anche i tensori di ordine superiore, saranno denotati con una lettera (latina o greca, minuscola o maiuscola) sormontata dal simbolo \sim .

Sia \tilde{t} un tensore doppio. Fissata una base ortonormale (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, ad essa resta associata una base $(\tilde{\pi}_{ij})$ per $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ con

$$\tilde{\pi}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.$$

Poiché $(\tilde{\pi}_{ij})$ è una base per $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$, il tensore doppio \tilde{t} si esprime in modo unico come una combinazione lineare dei vettori di tale base. Perciò

$$\tilde{t} = t_{ij} \tilde{\pi}_{ij} = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.$$

Dunque, fissata una base ortonormale (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, al tensore doppio \tilde{t} resta associata la successione doppia di scalari (t_{ij}) , detta, impropriamente, *successione delle componenti di \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_i)* .

Non è difficile provare che se (t_{ij}) è la successione delle componenti di \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_i) e (\bar{t}_{hk}) è la successione delle componenti di \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_h) , si ha

$$\bar{t}_{hk} = \alpha_{ih} \alpha_{jk} t_{ij}. \quad (1.2.1)$$

Sussiste perciò la seguente

Proposizione 1.2. *Ad ogni tensore doppio su $\vec{\mathcal{E}}$ resta associato un sistema doppio di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere tensoriale.*

E' anche evidente che ogni sistema doppio di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ che ha carattere tensoriale individua univocamente un tensore doppio su $\vec{\mathcal{E}}$, precisamente il tensore doppio che ha come successione delle sue componenti rispetto ad una data base (\vec{e}_i) la successione doppia che il sistema associa a tale base.

Osserviamo che ad ogni tensore doppio \tilde{t} , fissata una base (\vec{e}_i) , resta associata una matrice 3×3 e precisamente la matrice $[t_{ij}]$ avente come elementi le componenti del tensore rispetto alla base

E' facile provare la seguente

Proposizione 1.3. *Dato il tensore doppio \tilde{t} , quando si passa dalla base ortonormale (\vec{e}_i) alla base ortonormale (\vec{e}_h) , la matrice delle sue componenti varia con la seguente legge:*

$$[\bar{t}_{hk}] = \mathbb{A}^t [t_{ij}] \mathbb{A}, \quad (1.2.2)$$

dove $[t_{ij}]$, $[\bar{t}_{hk}]$ sono le matrici delle componenti di \tilde{t} rispetto alle basi (\vec{e}_i) , (\vec{e}_h) .

Ci proponiamo ora di dare la definizione di tensore r -uplo o tensore di ordine r su $\vec{\mathcal{E}}$ con $r > 2$. A tal fine facciamo l'ipotesi che la moltiplicazione tensoriale goda della proprietà associativa.

Definizione 1.11. *Definiamo tensore r -uplo o tensore di ordine r (con $r > 2$) su $\vec{\mathcal{E}}$ ogni elemento di $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$.*

Se fissiamo una base ortonormale (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, a questa, come sappiamo, per la definizione di moltiplicazione tensoriale, resta associata una base per lo spazio vettoriale (di dimensione 3^r) $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ e precisamente la base $(\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r})$ tale che

$$\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r} = \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Se allora consideriamo un tensore \tilde{t} di ordine r , lo possiamo decomporre rispetto alla base $(\tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r})$:

$$\tilde{t} = t_{i_1 \dots i_r} \tilde{\pi}_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Dunque, analogamente a quanto avviene per un tensore di ordine 2, ad ogni tensore \tilde{t} di ordine r con $r > 2$ resta associata la successione r -upla di scalari $(t_{i_1 \dots i_r})$, detta impropriamente *successione delle componenti di \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_i)* .

come per i tensori doppi, si prova che, date due basi ortonormali (\vec{e}_i) e (\vec{e}_h) per $\vec{\mathcal{E}}$ rispetto alle quali \tilde{t} ha come successioni delle sue componenti $(t_{i_1 \dots i_r})$ e $(\bar{t}_{h_1 \dots h_r})$ rispettivamente, si ha

$$\bar{t}_{h_1 \dots h_r} = \alpha_{i_1 h_1} \dots \alpha_{i_r h_r} t_{i_1 \dots i_r}.$$

Sussiste dunque la seguente

Proposizione 1.4. *Ad ogni tensore r -uplo su $\vec{\mathcal{E}}$ con $r > 2$ è associato un sistema r -uplo di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere tensoriale. Viceversa ogni sistema r -uplo di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere tensoriale individua univocamente un tensore r -uplo su $\vec{\mathcal{E}}$.*

Vediamo ora due esempi di tensori su $\vec{\mathcal{E}}$ che svolgono un ruolo importante nell'ambito del Calcolo Tensoriale: uno è un esempio di tensore doppio, mentre l'altro è un esempio di tensore triplo.

Tensori fondamentale. Fissata in $\vec{\mathcal{E}}$ la base ortonormale (\vec{e}_i) , consideriamo la successione doppia di scalari (a_{ij}) definita nel paragrafo 1.1 per cui

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}_2 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (a_{ij}) \end{aligned}$$

è un sistema doppio di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ che, come si vede facilmente, ha carattere tensoriale. Allora tale sistema individua un tensore doppio che viene denotato con \tilde{a} e prende il nome di *tensori fondamentale*. La successione delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale (\vec{e}_i) è dunque la successione doppia (a_{ij}) .

Si noti che, qualunque sia la base ortonormale \vec{e}_i , si ha $a_{ij} = a_{ji}$ e che inoltre:

$$a_{ij} = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker. Perciò la matrice delle componenti del tensore fondamentale rispetto ad ogni base ortonormale di $\vec{\mathcal{E}}$ è la matrice identità.

Tensori di Ricci. Riguardiamo $\vec{\mathcal{E}}$ come spazio vettoriale orientato considerando solo basi che siano terne destre e denotiamo con \mathcal{B}_0^+ l'insieme delle basi ortonormali che sono terne destre.

Fissata la base $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0^+$, introduciamo la successione tripla di scalari (ossia di $3^3 = 27$ scalari) (ϑ_{ijr}) con

$$\vartheta_{ijr} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \cdot \vec{e}_r. \quad (1.2.3)$$

Si prova facilmente che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^+ &\longrightarrow \mathcal{S}_3 \\ (\vec{e}_i) &\longmapsto (\vartheta_{ijr}) \end{aligned}$$

è un sistema triplo di componenti su $\vec{\mathcal{E}}$ avente carattere tensoriale.

Possiamo perciò asserire che il sistema triplo di componenti definito dalle (1.2.3) individua un tensore di ordine 3, detto *tensori di Ricci* e denotato con $\tilde{\vartheta}$.

Vogliamo ora mostrare quanto valgono le componenti del tensore di Ricci in una qualsiasi base ortonormale in \mathcal{B}_0^+ .

Premettiamo alcune definizioni che ci saranno utili.

Considerato l'insieme dei primi n numeri naturali: $I_n = \{1, \dots, n\}$, prendiamo in esame le possibili permutazioni degli n numeri, che, com'è noto, sono $n!$.

Definizione 1.12. Sia (i_1, \dots, i_n) una permutazione dei primi n numeri naturali. Presi due termini della permutazione: i_p, i_q , diciamo che questi presentano inversione se, essendo $p < q$, si ha $i_p > i_q$.

Definizione 1.13. Diremo che una permutazione dei primi n numeri naturali è pari (o di classe pari) se in essa non sono presenti inversioni o se il numero totale delle inversioni è pari.

Diremo poi che una permutazione dei primi n numeri naturali è dispari (o di classe dispari) se se il numero totale delle inversioni in essa presenti è dispari.

Definizione 1.14. Chiamiamo simbolo di permutazione (o alternatore) a tre indici il simbolo seguente:

$$\epsilon_{ijr} = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, r \text{ non sono distinti} \\ 1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i, j, r) \text{ è una permutazione dispari.} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Preisamente deduciamo che il simbolo di permutazione a tre indici assume i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \\ \epsilon_{ijr} = 0 \text{ per tutti gli altri valori degli indici } i, j, r. \end{aligned}$$

Si potrebbe provare la seguente

Proposizione 1.5. Le componenti del tensore di Ricci $\tilde{\vartheta}$ rispetto alla base ortonormale $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0^+$, sono date da:

$$\vartheta_{ijr} = \epsilon_{ijr}.$$

Definizione 1.15. Si definiscono tensori di ordine 1 i vettori di $\vec{\mathcal{E}}$ e tensori di ordine 0 gli scalari che non variano al variare della base ortonormale.

1.3 Algebra tensoriale: principali operazioni sui tensori

In primo luogo ricordiamo che un tensore di ordine r su $\vec{\mathcal{E}}$ è un elemento di $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$, spazio vettoriale reale di dimensione 3^r .

Nel seguito, poiché considereremo sempre tensori su $\vec{\mathcal{E}}$, ometteremo di scriverlo. E' evidente che l'uguaglianza tra due tensori si può avere solo tra tensori dello

stesso ordine poiché i due tensori devono essere lo stesso elemento dello stesso spazio vettoriale.

Siano \tilde{A}, \tilde{B} tensori di ordine r . Fissata la base (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, a tale base è associata la base $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r})$ in $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$. Allora

$$\tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}, \quad \tilde{B} = B_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Poiché due vettori di uno spazio vettoriale sono uguali se e solo se hanno uguali le componenti omologhe rispetto ad una stessa base, deduciamo:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \iff A_{i_1 \dots i_r} = B_{i_1 \dots i_r}.$$

In particolare il tensore nullo di ordine r , che denotiamo con $\tilde{0}$, ha nulle tutte le sue componenti rispetto ad ogni base.

Dati i due tensori \tilde{A}, \tilde{B} di ordine r , sono ben definiti:

- la *somma dei due tensori*, denotata con $\tilde{A} + \tilde{B}$, che è ancora un tensore di ordine r
- il prodotto di uno scalare $\lambda (\in \mathbb{R})$ per il tensore \tilde{A} , denotato con $\lambda \tilde{A}$, che è ancora tensore di ordine r .

Poiché \tilde{A} e \tilde{B} sono due elementi dello stesso spazio vettoriale, fissata la base $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$, per ben note proprietà degli spazi vettoriali, si ha:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (A_{i_1 \dots i_r} + B_{i_1 \dots i_r}) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r},$$

$$\lambda \tilde{A} = (\lambda A_{i_1 \dots i_r}) \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}.$$

Poiché i tensori di un dato ordine sono elementi di uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, potremo sempre eseguire la moltiplicazione tensoriale di due tensori non necessariamente dello stesso ordine.

Infatti consideriamo un tensore \tilde{A} di ordine r e un tensore \tilde{B} di ordine s con r non necessariamente uguale a s . Il primo è un elemento di $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$, spazio

vettoriale reale di dimensione 3^r e il secondo è un elemento di $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$,

spazio vettoriale reale di dimensione 3^s .

Il prodotto tensoriale di \tilde{A} e \tilde{B} è ben definito e si ha:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{(r+s) \text{ volte}}$$

cioè $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ è un tensore di ordine $r + s$.

Se ora fissiamo una base ortonormale (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, a tale base restano associate la base $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r})$ per $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ e la base $(\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s})$ per $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$.

Decomponiamo \tilde{A} e \tilde{B} rispetto alla rispettiva base per cui:

$$\tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}, \quad \tilde{B} = B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}.$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (A_{i_1 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) \otimes (B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}) = \\ &= A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}. \end{aligned}$$

D'altra parte, se consideriamo la successione di 3^{r+s} tensori di ordine $(r + s)$ data da $(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s})$, questa è una base per $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{(r+s) \text{ volte}}$.

Quindi il prodotto tensoriale del tensore \tilde{A} di ordine r e del tensore \tilde{B} di ordine s è un tensore di ordine $r + s$ che ha componente $A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s}$ rispetto al vettore di base $\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_s}$. Dunque la successione delle componenti di $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ rispetto alla base \vec{e}_i è $(A_{i_1 \dots i_r} B_{j_1 \dots j_s})$.

Finora non abbiamo ancora introdotto alcun concetto nuovo nell'ambito dell'Algebra Tensoriale, poiché abbiamo semplicemente tenuto presente che i tensori di ordine r sono elementi dello spazio vettoriale reale $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$.

Introdurremo a questo punto due nuove operazioni tra tensori: *contrazione di due o più coppie di indici e composizione di due tensori*

Definizione 1.16. *Dato un tensore \tilde{t} di ordine r ($r \geq 2$), consideriamo la successione delle sue componenti $(t_{i_1 \dots i_r})$ rispetto ad una base ortonormale (\vec{e}_i) di $\vec{\mathcal{E}}$. La contrazione di due indici consiste nell'uguagliare due degli r indici che contraddistinguono le componenti di \tilde{t} e poi sommare da 1 a 3 rispetto a tali indici uguagliati.*

Ad esempio, se in $(t_{i_1 \dots i_r})$ contraiamo il primo e l'ultimo indice ($i_1 = i_r = i$), otteniamo la successione di 3^{r-2} scalari data da $(t_{i i_2 \dots i})$.

Si dimostra che questa nuova successione ha ancora carattere tensoriale e quindi individua un tensore di ordine $r - 2$, detto *tensore contratto del tensore di partenza*.

In particolare, il contratto del tensore \tilde{t} di ordine 2 è lo scalare invariante al variare della base ortonormale, dato dalla somma delle tre componenti con i due indici uguali: $t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}$.

Se abbiamo un tensore di ordine $r \geq 4$, possiamo ripetere più volte l'operazione di contrazione. Se supponiamo di eseguire p volte la contrazione di due indici (ovviamente $p \leq \frac{r}{2}$), otteniamo un tensore di ordine $r - 2p$.

Introduciamo ora una nuova operazione.

Definizione 1.17. Prende il nome di *moltiplicazione contratta* o *composizione* l'operazione che si ottiene combinando la moltiplicazione tensoriale e la contrazione di indici nel modo seguente.

Dati i due tensori \tilde{A} di ordine r e \tilde{B} di ordine s , consideriamone il prodotto tensoriale $\tilde{A} \otimes \tilde{B} =: \tilde{C}$ che è ovviamente un tensore di ordine $r + s$. Contraiamo nel tensore \tilde{C} p indici di \tilde{A} e p indici di \tilde{B} ($p \leq \min\{r, s\}$). Il risultato è un tensore di ordine $r + s - 2p$. Si dice allora che questo nuovo tensore è ottenuto componendo \tilde{A} e \tilde{B} con la contrazione di p indici di \tilde{A} e di p indici di \tilde{B} .

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.2. Siano dati un tensore \tilde{A} di ordine 2 e un vettore $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$.

Il loro prodotto tensoriale è $\tilde{A} \otimes \vec{v} =: \tilde{C}$, tensore di ordine 3.

Fissata una qualsiasi base $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$, la successione delle componenti di \tilde{C} è data da

$$(C_{ijr} = A_{ij} v_r).$$

Se contraiamo il primo indice di \tilde{A} e l'indice di \vec{v} , otteniamo una successione semplice di scalari $(A_{ij} v_i)$, che rappresenta la successione delle componenti di un vettore \vec{u} :

$$(A_{ij} v_i) = (u_j).$$

Diciamo allora che il vettore \vec{u} è ottenuto componendo il tensore doppio \tilde{A} e il vettore \vec{v} con la contrazione del primo indice di \tilde{A} e dell'indice di \vec{v} .

Esempio 1.3. Siano dati i due tensori \tilde{A} e \tilde{B} di ordine 2 e consideriamo il loro prodotto tensoriale: $\tilde{A} \otimes \tilde{B} =: \tilde{C}$, tensore di ordine 4. Fissata la base (\vec{e}_i) , abbiamo:

$$(C_{ijrs}) = (A_{ij} B_{rs}).$$

Contraiamo il secondo indice di \tilde{A} e il primo indice di \tilde{B} .

Otteniamo così una successione doppia di scalari $(A_{ij} B_{js})$ che rappresenta la successione delle componenti di un tensore doppio \tilde{D} :

$$(A_{ij} B_{js}) = (D_{is}).$$

Diciamo allora che \tilde{D} è ottenuto componendo il tensore doppio \tilde{A} e il tensore doppio \tilde{B} con la contrazione del secondo indice di \tilde{A} e del primo indice di \tilde{B} .

Facciamo ora una doppia contrazione di indici in $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$: contraiamo il primo indice di \tilde{A} e il primo indice di \tilde{B} ed analogamente il secondo indice di \tilde{A} e il secondo indice di \tilde{B} .

Otteniamo in tal modo uno scalare dato da: $A_{ij} B_{ij}$ che risulta invariante al variare della base ortonormale, ossia un tensore di ordine 0.

Osservazione 1.1 Il tensore fondamentale \tilde{a} è elemento neutro rispetto alla composizione. Infatti, dato un tensore \tilde{t} di ordine r , contraendone un indice con uno di \tilde{a} , si ottiene il tensore stesso.

Introduciamo ora una particolare notazione che useremo molto spesso in seguito.

Siano dati i due tensori \tilde{A} di ordine r e \tilde{B} di ordine s con $s \geq r$. Denotiamo con

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

il tensore \tilde{C} di ordine $s - r$ che si ottiene componendo \tilde{A} e \tilde{B} con la contrazione degli r indici di \tilde{A} con i primi r indici di \tilde{B} presi nello stesso ordine. Allora, fissata una base (\vec{e}_i) , le componenti di \tilde{C} sono date da:

$$C_{j_1 \dots j_{s-r}} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{s-r}}.$$

Denotiamo poi con

$$\tilde{B} \cdot \tilde{A}$$

il tensore \tilde{C}' di ordine $s - r$ che si ottiene componendo \tilde{A} e \tilde{B} con la contrazione degli r indici di \tilde{A} con gli ultimi r indici di \tilde{B} presi nello stesso ordine. Allora, fissata una base (\vec{e}_i) , le componenti di \tilde{C}' sono date da:

$$C'_{i_1 \dots i_{s-r}} = B_{i_1 \dots i_{s-r} j_1 \dots j_r} A_{j_1 \dots j_r}.$$

Ovviamente se $r = s$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r},$$

che è un tensore di ordine 0.

Esempio 1.4. Siano dati il vettore \vec{v} e il tensore \tilde{B} di ordine 2. Se facciamo uso della notazione appena introdotta, denoteremo con $\vec{v} \cdot \tilde{B}$ il vettore \vec{u} di componenti:

$$u_j = v_i B_{ij},$$

e con $\tilde{B} \cdot \vec{v}$ il vettore \vec{u}' di componenti:

$$u'_i = B_{ij} v_j.$$

1.4 Altre nozioni di algebra tensoriale

Nella prima parte del paragrafo ci limiteremo a considerare tensori doppi, ossia elementi dello spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$.

Come abbiamo osservato in precedenza, fissata una base $(\vec{e}_i) \in \mathcal{B}_0$, ad ogni tensore doppio \tilde{t} risulta associata una matrice 3×3 , cioè la matrice $[t_{ij}]$ delle sue componenti rispetto a tale base.

Se consideriamo il contratto di \tilde{t} , questo è lo scalare: $t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}$, ossia la somma degli elementi della diagonale principale della matrice $[t_{ij}]$ delle componenti del tensore, che, con linguaggio matriciale, è nota come traccia della matrice $[t_{ij}]$.

Fissata un'altra base ortonormale (\vec{e}_h) , al tensore \tilde{t} è associata una nuova matrice, cioè la matrice $[\bar{t}_{hk}]$ delle sue nuove componenti. D'altra parte, per quanto visto nel paragrafo precedente, $\bar{t}_{hh} = t_{ii}$. Quindi la somma degli elementi della diagonale principale della matrice delle componenti di un tensore doppio rispetto ad una base ortonormale non varia al variare della base. Siamo così portati ad introdurre la seguente:

Definizione 1.18. *Dato un tensore doppio \tilde{t} , definiamo traccia di \tilde{t} e la denotiamo con $tr\tilde{t}$, la somma degli elementi della diagonale principale della matrice delle componenti di \tilde{t} rispetto ad una qualsiasi base ortonormale di $\vec{\mathcal{E}}$, ossia il contratto di \tilde{t} .*

Inoltre, per quanto visto nel Capitolo 1,

$$[\bar{t}_{hk}] = \mathbb{A}^t [t_{ij}] \mathbb{A} \quad (1.4.1)$$

con $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$.

Se allora consideriamo il determinante delle matrici a primo e secondo membro della (1.4.1), otteniamo:

$$\det[\bar{t}_{hk}] = \det \mathbb{A}^t \det[t_{ij}] \det \mathbb{A} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \det[t_{ij}] \det \mathbb{A}, = \det[t_{ij}].$$

Sussiste allora la

Proposizione 1.6. *Il determinante della matrice delle componenti di un tensore doppio non varia al variare della base ortonormale.*

Per tale motivo possiamo dare la seguente

Definizione 1.19. *Definiamo determinante del tensore doppio \tilde{t} e lo denotiamo con $\det \tilde{t}$ il determinante della matrice delle componenti del tensore rispetto ad una qualsiasi base ortonormale.*

Introduciamo nell'insieme dei tensori doppi una legge di composizione interna.

Definizione 1.20. *Dati i due tensori doppi \tilde{A} e \tilde{B} , definiamo prodotto di \tilde{A} per \tilde{B} il tensore doppio, denotato con $\tilde{A}\tilde{B}$, che si ottiene componendo \tilde{A} e \tilde{B} con la contrazione del secondo indice di \tilde{A} e del primo indice di \tilde{B} .*

Se per semplicità poniamo $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$, avremo che le componenti di \tilde{C} in una base (\vec{e}_i) sono date da

$$C_{ij} = A_{ir} B_{rj}.$$

Osservazione 1.2. Notiamo che :

$$[C_{ij}] = [A_{ij}][B_{ij}],$$

ossia la matrice delle componenti di $\tilde{A}\tilde{B}$ è data dal prodotto della matrice delle componenti di \tilde{A} per la matrice delle componenti di \tilde{B} rispetto alla stessa base. Quindi il prodotto di due tensori doppi è ricondotto al prodotto delle matrici delle loro componenti e pertanto gode delle stesse proprietà del prodotto di due matrici quadrate.

E' evidente che per il prodotto di due tensori doppi esiste l'elemento neutro che è rappresentato dal tensore fondamentale \tilde{a} .

Definizione 1.21. *Dato un tensore doppio \tilde{A} , diciamo che è invertibile se esiste un tensore doppio \tilde{A}^{-1} , detto inverso di \tilde{A} , tale che:*

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{a}.$$

Si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un tensore doppio \tilde{A} sia invertibile è che $\det \tilde{A} \neq 0$. Inoltre se \tilde{A} è invertibile, in ogni base ortonormale si ha:*

$$[A_{ij}^{-1}] = [A_{ij}]^{-1}.$$

Per quanto riguarda l'inverso di un tensore doppio, sussistono le stesse proprietà di cui gode l'inversa di una matrice quadrata.

Definizione 1.22. *Dato il tensore doppio \tilde{A} , definiamo trasposto di \tilde{A} quel tensore doppio, che denotiamo con \tilde{A}^t , le cui componenti A_{ij}^t in una base ortonormale sono correlate a quelle di \tilde{A} nel modo seguente:*

$$A_{ij}^t = A_{ji}.$$

E' immediato verificare che tale definizione è indipendente dalla base ortonormale utilizzata.

Osservazione 1.3. Fissata una qualsiasi base ortonormale, la matrice delle componenti di \tilde{A}^t è la trasposta della matrice delle componenti di \tilde{A} :

$$[A_{ij}^t] = [A_{ij}]^t.$$

Si deduce pertanto che il trasposto di un tensore doppio gode delle proprietà di cui gode la trasposta di una matrice.

Definizione 1.23. Diciamo che il tensore doppio \tilde{S} è simmetrico se $\tilde{S} = \tilde{S}^t$.

E' immediato provare che \tilde{S} è simmetrico se e solo se, fissata una base ortonormale, $S_{ij} = S_{ji}$.

Osservazione 1.4. In genere, fissata una base ortonormale, un tensore doppio possiede 9 componenti indipendenti. Se il tensore è simmetrico, le sue componenti indipendenti si riducono a 6: $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}$.

Un esempio di tensore doppio simmetrico è costituito dal tensore fondamentale \tilde{a} .

Definizione 1.24. Diciamo che un tensore doppio \tilde{E} è emisimmetrico (o antisimmetrico) se $\tilde{E} = -\tilde{E}^t$.

E' immediato provare che \tilde{E} è emisimmetrico se e solo se, fissata una base ortonormale, $E_{ij} = -E_{ji}$.

Osservazione 1.5. Fissata una base ortonormale, un tensore emisimmetrico ha nulle le tre componenti con i due indici uguali, cioè $E_{11} = E_{22} = E_{33} = 0$ e dunque le sue componenti indipendenti si riducono a 3.

Proposizione 1.7. Un tensore doppio \tilde{t} è esprimibile in uno ed un solo modo come somma di un tensore doppio simmetrico ed uno emisimmetrico, cioè

$$\tilde{t} = \tilde{S} + \tilde{E},$$

dove \tilde{S} è detto parte simmetrica di \tilde{t} ed \tilde{E} è detto parte emisimmetrica di \tilde{t} .

Come è facile verificare:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(\tilde{t} + \tilde{t}^t), \quad \tilde{E} = \frac{1}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^t).$$

Le nozioni di simmetria ed emisimmetria date per i tensori doppi si possono estendere anche a tensori di ordine $r > 2$, rifacendoci direttamente agli indici delle loro componenti.

Definizione 1.25. Dato un tensore di ordine $r > 2$, si parla di simmetria (o emisimmetria) parziale se sussiste solo per qualche coppia di indici. Si parla di simmetria (o emisimmetria) totale se sussiste per tutte le coppie di indici.

E' facile provare la seguente:

Proposizione 1.8. Non esiste nessun tensore totalmente emisimmetrico di ordine $r > 3$ eccetto il tensore nullo.

Un esempio di tensore totalmente emisimmetrico di ordine 3 è il tensore di Ricci $\tilde{\vartheta}$.

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 1.2. Ogni volta che si contraggono due indici di simmetria con due di emisimmetria si ottiene il tensore nullo.

Dimostrazione

Dimostriamo il teorema nel caso più semplice: siano \tilde{S} e \tilde{E} due tensori doppi, il primo simmetrico e il secondo emisimmetrico e consideriamo lo scalare che si ottiene contraendo i due indici di \tilde{S} , che sono ovviamente indici di simmetria, con i due indici di \tilde{E} , che sono ovviamente di emisimmetria. Sfruttando la simmetria e l'emisimmetria dei due tensori, otteniamo:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{E} = S_{ij} E_{ij} = -S_{ji} E_{ji} = -S_{ij} E_{ij} = -\tilde{S} \cdot \tilde{E}.$$

Nel passare dal secondo al terzo membro delle uguaglianze scritte sopra abbiamo sfruttato la simmetria di \tilde{S} ($S_{ij} = S_{ji}$) e l'emisimmetria di \tilde{E} ($E_{ij} = -E_{ji}$), mentre nel passaggio successivo abbiamo semplicemente scambiato di nome i due indici saturati i e j . Poiché lo scalare $\tilde{S} \cdot \tilde{E}$ coincide con il suo opposto, si ha necessariamente:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{E} = 0.$$

Definizione 1.26. Diciamo che un tensore è isotropo se le sue componenti non mutano quando si passa da una base ortonormale ad un'altra pure ortonormale.

Un esempio di tensore isotropo è il tensore fondamentale \tilde{a} poiché le sue componenti in ogni base ortonormale coincidono con i simboli di Kronecker. Si potrebbero dimostrare le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.9. Se si riguarda $\vec{\mathcal{E}}$ non orientato, non esistono tensori isotropi di ordine dispari (eccetto il tensore nullo).

Proposizione 1.10. L'insieme dei tensori isotropi di ordine 2 è un sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori doppi, ha dimensione 1 ed una sua base è il tensore fondamentale \tilde{a} .

Dall'ultima proposizione discende che ogni tensore doppio isotropo è della forma:

$$\tilde{t} = \alpha \tilde{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Relativamente allo spazio vettoriale dei tensori di un dato ordine, sussiste il seguente

Teorema 1.3. *Lo spazio vettoriale reale $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ ($r > 1$) è euclideo, la moltiplicazione scalare essendo l'applicazione*

$$\left(\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \right) \times \left(\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \longmapsto \tilde{A} \cdot \tilde{B} = A_{i_1 \dots i_r} B_{i_1 \dots i_r}.$$

Da tale teorema segue che $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ ($r > 1$) è uno spazio vettoriale normato, poiché, se consideriamo l'applicazione:

$$\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\tilde{A} \longmapsto \sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{A}},$$

questa è una norma.

Concludiamo il paragrafo mettendo in rilievo la relazione che sussiste tra tensori e applicazioni lineari definite sull'insieme dei tensori di ordine r e a valori nell'insieme dei tensori di ordine s .

A tal fine introduciamo il seguente insieme:

$$\mathcal{L}_{(r,s)} = \left\{ \tau : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \mid \tau \text{ lineare} \right\}$$

con $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sia poi \tilde{B} un tensore di ordine $r + s$ e consideriamo l'applicazione lineare:

$$\tau : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$$

$$\tilde{A} \longmapsto \tau(\tilde{A}) = \tilde{B} \cdot \tilde{A}.$$

Ricordiamo che con $\tilde{B} \cdot \tilde{A}$ denotiamo il tensore di ordine s che si ottiene componendo \tilde{A} e \tilde{B} con la contrazione degli ultimi r indici di \tilde{B} con gli indici di \tilde{A} .

Si potrebbe provare il seguente teorema:

Teorema 1.4. *L'applicazione così definita*

$$\begin{aligned} \gamma : \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\mathcal{E}}}_{r+s \text{ volte}} &\longrightarrow \mathcal{L}_{(r+s)} \\ \tilde{B} &\longmapsto \tau(\tilde{A}) \end{aligned}$$

con τ tale che

$$\forall \tilde{A} \in \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \quad \tau(\tilde{A}) = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$$

è biettiva.

Vediamo due esempi di applicazione di tale teorema.

Esempio 1.5. Sia τ un'applicazione lineare definita su $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ a valori in \mathbb{R} , ossia una forma lineare su $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Dunque

$$\tau : \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \text{ lineare.}$$

Se teniamo presente che $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ è l'insieme dei tensori di ordine 1 e \mathbb{R} l'insieme dei tensori di ordine 0, deduciamo che $\tau \in \mathcal{L}_{(1,0)}$.

Grazie al teorema 2.6 possiamo asserire che esiste un vettore $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tale che:

$$\tau(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}.$$

Esempio 1.6. Sia τ un endomorfismo di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, ossia

$$\tau : \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}, \quad \tau \text{ lineare.}$$

Perciò $\tau \in \mathcal{L}_{(1,1)}$.

In base al teorema 2.6 concludiamo che esiste un tensore doppio \tilde{t} tale che:

$$\tau(\vec{v}) = \tilde{t} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}.$$

In componenti, fissata una base ortonormale (\vec{e}_i) e posto $\vec{w} := \tau(\vec{v})$, la relazione precedente assume la forma

$$w_i = t_{ij} v_j.$$

1.5 Funzioni tensoriali di una o più variabili reali

Diamo dapprima alcune definizioni di carattere generale.

Definizione 1.27. Dato il sottoinsieme S dello spazio metrico X , chiamiamo *applicazione tensoriale di ordine r definita in S* ogni applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{t}: S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ x &\longmapsto \tilde{t}(x). \end{aligned}$$

Definizione 1.28. Data l'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r , definita in $S \in X$, diciamo che \tilde{t} ha come limite per x tendente a x_0 , punto di accumulazione per S , il tensore \tilde{l} di ordine r e scriviamo : $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l}$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in S_\delta(x_0) \cap S, x \neq x_0 \text{ si ha } |\tilde{t}(x) - \tilde{l}| < \epsilon.$$

La definizione data è l'usuale definizione di limite per un'applicazione definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico e a valori in uno spazio vettoriale normato.

Sia data un'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r , definita in $S \subset X$ e fissiamo in $\vec{\mathcal{E}}$ la base (\vec{e}_i) indipendente da x , che chiameremo base fissa. Preso un elemento arbitrario $x \in S$, possiamo considerare la successione delle componenti di $\tilde{t}(x)$, cioè $(t_{i_1 \dots i_r}(x))$; dunque all'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r definita in S sono associate 3^r applicazioni reali definite in S , cioè le applicazioni $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$ con $i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3$. Si prova il seguente teorema che consente di ricondurre la nozione di limite di un'applicazione tensoriale a quello di limite delle sue componenti e quindi a quella di limite di un'applicazione a valori reali definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico.

Teorema 1.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ abbia limite \tilde{l} per $x \rightarrow x_0$ è che, considerata la base ortonormale fissa (\vec{e}_i) , le sue componenti rispetto alla base tendano per $x \rightarrow x_0$ alle componenti corrispondenti di \tilde{l} , cioè:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{l} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} t_{i_1 \dots i_r}(x) = l_{i_1 \dots i_r} \quad i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3.$$

Definizione 1.29. Data l'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$, definita in S , sia x_0 un elemento di S . Distinguiamo due casi:

- 1) se x_0 è un punto isolato, allora diciamo che \tilde{t} è continua in x_0 ;
- 2) se x_0 è un punto di accumulazione, allora diciamo che \tilde{t} è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}(x) = \tilde{t}(x_0).$$

Definizione 1.30. Diciamo che l'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in S è continua in S se lo è in ogni suo punto. In tal caso scriviamo $\tilde{t} \in \mathcal{C}(S)$.

Dal teorema 1.5 discende immediatamente il seguente

Teorema 1.6. Condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in S sia continua in $x_0 \in S$ (o in S) è che lo siano le sue componenti rispetto ad una base fissa.

Ora assumiamo che lo spazio metrico X coincida con \mathbb{R} o con \mathbb{R}^n ($n > 1$). Ovviamente:

se $x \in \mathbb{R}$, allora x è un numero reale;

se $x \in \mathbb{R}^n$, allora x è una n -upla ordinata di numeri reali (x_1, \dots, x_n) .

Inoltre

$x, x_0 \in \mathbb{R} \implies d(x, x_0) = |x - x_0| = \text{valore assoluto};$

$x, x_0 \in \mathbb{R}^n \implies d(x, x_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^2} = |x - x_0| = \text{norma euclidea}.$

Definizione 1.31. Sia $S \subset \mathbb{R}$ o $\subset \mathbb{R}^n$. Ogni applicazione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r definita in S è detta funzione tensoriale di ordine r di una o più variabili reali.

Data la funzione tensoriale di ordine r di una o più variabili reali $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in S , la definizione di limite così come quella di continuità sono le stesse che abbiamo dato nel caso generale all'inizio del paragrafo.

Introduciamo ora una nuova definizione per una funzione tensoriale di una sola variabile reale.

Definizione 1.32. Data la funzione tensoriale di ordine r $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in $S \subset \mathbb{R}$, sia x_0 un punto interno di S . Diremo che la funzione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ è derivabile in x_0 se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{t}(x) - \tilde{t}(x_0)}{x - x_0}$$

ed è finito in norma. Tale limite, che è un tensore di ordine r , è detto derivata della funzione tensoriale \tilde{t} in x_0 ed è denotato con $\frac{d\tilde{t}}{dx}(x_0)$.

Per il teorema 1.5, si deduce immediatamente il

Teorema 1.7. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione tensoriale \tilde{t} sia derivabile in x_0 è che le sue componenti rispetto ad una base fissa siano tutte derivabili in x_0 . Inoltre le componenti del tensore $\frac{d\tilde{t}}{dx}(x_0)$ sono le derivate in x_0 delle componenti corrispondenti di \tilde{t} .

Se S è un aperto di \mathbb{R} e \tilde{t} è derivabile in ogni punto di S , allora in S risulta definita una nuova funzione tensoriale di ordine r , la funzione derivata di \tilde{t} :

$$\frac{d\tilde{t}}{dx} = \frac{d\tilde{t}}{dx}(x).$$

Se a sua volta questa è derivabile in $x_0 \in S$, diremo che $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ ammette derivata seconda o di ordine 2 in x_0 . La derivata seconda in x_0 verrà denotata

$$\text{con } \frac{d^2\tilde{t}}{dx^2}(x_0).$$

In maniera analoga si definiscono le derivate di ordine 3, 4, .. e queste sono tensori di ordine r .

Consideriamo ora una funzione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r definita in $S \subset \mathbb{R}^n$ con ($n > 1$).

Definizione 1.33. *Data la funzione tensoriale di ordine r $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in $S \subset \mathbb{R}^n$, sia x_0 un punto interno di S e v un versore di \mathbb{R}^n , ossia una direzione (orientata). Diremo che $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ è derivabile in x_0 rispetto alla direzione v se esiste ed è finito in norma il seguente limite:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{t}(x_0 + hv) - \tilde{t}(x_0)}{h}.$$

Tale limite viene chiamato derivata di \tilde{t} in x_0 rispetto alla direzione v e denotato

$$\text{con } \frac{\partial \tilde{t}}{\partial v}(x_0).$$

Se in particolare v coincide con l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n , cioè $v = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, allora la derivata di \tilde{t} in x_0 rispetto ad e_i prende il nome di derivata parziale di \tilde{t} in x_0 fatta rispetto a x_i ed è indicata con $\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0)$.

Possiamo ovviamente definire le derivate parziali di ordine 2, 3, ..., etc., ma su ciò non insistiamo.

Per la teoria della derivazione delle funzioni tensoriali di una o più variabili reali valgono tutte le proprietà delle derivazione delle funzioni reali, poiché, grazie al teorema 1.5, ci si riconduce alla derivazione delle componenti rispetto ad una base fissa, che sono funzioni a valori reali.

Definizione 1.34. *Data la funzione tensoriale di ordine r $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ definita in $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$), sia x_0 un punto interno per S . Diciamo che $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare dipendente da x_0*

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{t}(x) - \tilde{t}(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)}{|x - x_0|} = \tilde{0},$$

con $\tilde{0}$ tensore nullo di ordine r .

L'applicazione lineare L_{x_0} è detta differenziale di \tilde{t} in x_0 .

Si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 1.8. *Se \tilde{t} è differenziabile in x_0 , in tale punto è anche continua.*

Poiché la definizione di differenziabilità fa intervenire la nozione di limite, è evidente che sussiste il seguente

Teorema 1.9. *Condizione necessaria e sufficiente affinché \tilde{t} sia differenziabile in x_0 è che lo siano tutte le sue componenti rispetto ad una base fissa.*

Quindi alla differenziabilità delle funzioni tensoriali di più variabili reali possiamo estendere tutti i risultati validi per la differenziabilità delle funzioni reali di più variabili reali. In particolare sussistono i due seguenti teoremi:

Teorema 1.10. *Se $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ è differenziabile in x_0 , allora in x_0 ammette le derivate parziali prime e si ha:*

$$L_{x_0}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.

Teorema 1.11. *Teorema del differenziale totale. Se $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ in un intorno di x_0 (punto interno dell'insieme S in cui è definita \tilde{t}) ammette derivate parziali prime e queste sono continue in x_0 , allora $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ è differenziabile in x_0 .*

Per motivi storici si usa spesso la seguente notazione per il differenziale:

$$L_{x_0} =: d\tilde{t}(x_0).$$

Con la nuova notazione la tesi del teorema 1.10 si scrive nel modo seguente:

$$d\tilde{t}(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5.1)$$

D'altra parte, se ricordiamo che si indica con dx_i l'applicazione così definita:

$$\begin{aligned} dx_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_i, \end{aligned}$$

allora si può scrivere:

$$d\tilde{t}(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) dx_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Per tale motivo si usa la seguente notazione:

$$d\tilde{t}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i}(x_0) dx_i.$$

Osservazione 1.6. Nel caso di una funzione tensoriale di una sola variabile reale la nozione di differenziabilità coincide con quella di derivabilità.

Definizione 1.35. *Data una funzione tensoriale \tilde{t} di ordine r definita nell'aperto $S \subset \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^n , diciamo che \tilde{t} è di classe $\mathcal{C}^p(S)$ con $p \in \mathbb{N}$ se è continua in S insieme a tutte le sue derivate sino all'ordine p . Scriveremo allora $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$. Se \tilde{t} è solo continua in S , scriveremo: $\tilde{t} \in \mathcal{C}(S)$.*

A questo punto diamo anche la nozione di integrabilità secondo Riemann o secondo Lebesgue di una funzione tensoriale di una o più variabili reali.

Sia $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ una funzione tensoriale di ordine r definita in $S \subset \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^n con S misurabile secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue. Fissata una base (\vec{e}_i) ortonormale e fissa, consideriamo le componenti di \tilde{t} rispetto a tale base: $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$. Supponiamo che tali componenti siano tutte integrabili su S secondo Riemann o secondo Lebesgue. Denotiamo l'integrale su S secondo Riemann o secondo Lebesgue di $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$ con

$$\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx$$

dove se $S \subset \mathbb{R}^n$ l'integrale è multiplo e $dx = dx_1 \dots dx_n$.

Si può dimostrare facilmente che la successione r -upla di scalari $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$ muta con legge tensoriale quando si passa da una base ortonormale fissa ad un'altra pure ortonormale e fissa. Resta così individuato un tensore di ordine r che ha come successione delle componenti rispetto alla base considerata la successione $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$.

Possiamo allora fornire la seguente definizione:

Definizione 1.36. *Data la funzione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$ di ordine r definita in $S \subset \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^n con S misurabile secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue e fissata una base (\vec{e}_i) ortonormale e fissa, tutte le componenti di \tilde{t} rispetto a tale base: $t_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r}(x)$ siano integrabili su S secondo Riemann o secondo Lebesgue. Allora diciamo che \tilde{t} è integrabile su S secondo Riemann o secondo Lebesgue e il tensore di ordine r individuato dalla successione $(\int_S t_{i_1 \dots i_r}(x) dx)$ è detto integrale su S di Riemann o di Lebesgue dell'applicazione \tilde{t} .*

Perciò l'integrazione di una funzione tensoriale è ricondotta all'integrazione delle sue componenti rispetto ad una base fissa. Ne segue che per l'integrazione

delle funzioni tensoriali valgono tutti i teoremi dell'integrazione delle funzioni reali di una o più variabili reali, eccetto il teorema del valor medio. Infatti tale teorema vale per l'integrale di ogni componente, ma non per l'integrale della funzione tensoriale nel suo complesso, come si evince facilmente tenendo presente che in tale teorema interviene per ogni componente un punto opportuno che varia da componente a componente.

1.6 Campi tensoriali ed operatori differenziali

Consideriamo ora il caso particolare in cui $X = \mathcal{E}$.

Com'è noto, lo spazio geometrico \mathcal{E} è uno spazio metrico e dati i punti $P, P_0 \in \mathcal{E}$ si ha:

$$d(P, P_0) = |P - P_0|.$$

Fissato nello spazio geometrico il riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) =: x. \end{aligned}$$

Come è facile verificare, l'applicazione ξ è un omeomorfismo (cioè è continua insieme alla sua inversa).

Inoltre, se x è la successione delle coordinate di P e x_0 è la successione delle coordinate di P_0 , allora

$$d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{0i})^2} = d(x, x_0).$$

Dunque l'applicazione ξ conserva le distanze, cioè è un'isometria; di conseguenza lo spazio geometrico \mathcal{E} ha le stesse proprietà metriche di \mathbb{R}^3 .

In questo paragrafo supporremo sempre di considerare sottoinsiemi S dello spazio geometrico.

Definizione 1.37. *Chiamiamo campo tensoriale di ordine r definito in S ogni applicazione della forma:*

$$\begin{aligned} \tilde{t} : S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ P &\longmapsto \tilde{t}(P). \end{aligned}$$

Se $r = 0$, \tilde{t} è detto campo scalare, se $r = 1$, \tilde{t} è detto campo vettoriale, se $r \geq 2$ \tilde{t} è detto campo tensoriale di ordine r .

Nel seguito indicheremo spesso un generico campo tensoriale con la notazione (imprecisa):

$$\tilde{t} = \tilde{t}(P).$$

Siano allora dati un campo tensoriale di ordine r definito in $S \in \mathcal{E}$ e un riferimento cartesiano spaziale $[O, (\vec{e}_i)]$.

Osserviamo che l'isometria ξ , introdotta in precedenza, essendo un omeomorfismo, è invertibile e dunque:

$$\xi(P) = x \iff P = \xi^{-1}(x).$$

Poniamo poi $S_\xi := \xi(S) \subset \mathbb{R}^3$.

Definizione 1.38. *Definiamo rappresentazione analitica del campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ nel riferimento cartesiano $[O, (\vec{e}_i)]$ la funzione tensoriale di 3 variabili reali definita in S_ξ , che indichiamo con \tilde{t}^o tale che*

$$\tilde{t}^o = \tilde{t} \circ \xi_{|S_\xi}^{-1}.$$

Dalla definizione data segue che:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in S_\xi \quad \tilde{t}^o(x) = \tilde{t}(\xi^{-1}(x)).$$

Dunque se la successione delle coordinate di P è (x_i) , allora si ha:

$$\tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3) = \tilde{t}(P).$$

Esempio 1.7. Sia dato il seguente campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \tilde{t}(P) = [(P - O) \cdot \vec{e}] \vec{e} \otimes \vec{e}$$

con O punto fissato di \mathcal{E} ed \vec{e} versore fissato.

Considerato in \mathcal{E} il riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$ tale che $\vec{e}_1 = \vec{e}$, la rappresentazione analitica di \tilde{t} è data da:

$$\tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Osserviamo che alla base (\vec{e}_i) per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$ è associata la base $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ per $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$. Le componenti della rappresentazione analitica di \tilde{t} nel riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$ sono:

$$t_{11}^o(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad t_{ij}^o(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{con } (i, j) \neq (1, 1).$$

Considerato ora il riferimento $[O, (\vec{e}_h)]$ tale che $\vec{e}_2 = \vec{e}$, la nuova rappresentazione analitica di \tilde{t} è della forma:

$$\tilde{t}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \quad \forall (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Perciò le componenti della rappresentazione analitica di \tilde{t} nel secondo riferimento sono:

$$\tilde{t}_{22}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_2, \quad \tilde{t}_{hk}^o(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0 \quad \text{con } (h, k) \neq (2, 2).$$

Si noti che la rappresentazione analitica del campo varia al variare del riferimento.

Sia dato un campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r definito in $S \subset \mathcal{E}$. La definizione di limite per $P \rightarrow P_0$ con P_0 punto di accumulazione per S rientra nella definizione generale che abbiamo dato nel paragrafo 1.5.

Fissiamo il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$ nello spazio geometrico e consideriamo la rappresentazione analitica del campo tensoriale considerato:

$$\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x) \quad \forall x \in S_\xi \subset \mathbb{R}^3.$$

E' immediato dimostrare il seguente

Teorema 1.12. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\lim_{P \rightarrow P_0} \tilde{t} = \tilde{l}$ è che*

$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{t}^o(x) = \tilde{l}$, dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ è la successione delle coordinate cartesiane di P e $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ è la successione delle coordinate cartesiane di P_0 .

La definizione di continuità in un punto o in un insieme rientra nelle definizioni generali date nel paragrafo 1.5.

E' evidente che sussiste il seguente

Teorema 1.13. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ sia continuo in P_0 è che lo sia in x_0 la sua rappresentazione analitica in un dato riferimento cartesiano.*

Dunque per la continuità di un campo tensoriale in un punto o in un insieme valgono gli stessi teoremi che valgono per le funzioni reali di tre variabili reali.

Definizione 1.39. *Dato il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r definito in $S \subset \mathcal{E}$, sia P_0 un punto interno di S . Diciamo che \tilde{t} è differenziabile in P_0 se esiste un'applicazione lineare dipendente da P_0*

$$L_{P_0} : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$$

tale che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\tilde{t}(P) - \tilde{t}(P_0) - L_{P_0}(P - P_0)}{|P - P_0|} = \tilde{0}.$$

L'applicazione L_{P_0} è detta differenziale del campo tensoriale \tilde{t} in P_0 .

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 1.14. *Se un campo tensoriale è differenziabile in un punto, in tale punto è anche continuo.*

Tenendo presente che la definizione di differenziabilità è data attraverso un limite e che il limite di un campo tensoriale è ricondotto a quello della sua rappresentazione analitica, ne discende immediatamente il seguente:

Teorema 1.15. *Fissato nello spazio geometrico un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, condizione necessaria e sufficiente affinché il campo tensoriale \tilde{t} sia differenziabile in P_0 è che la sua rappresentazione analitica \tilde{t}^o sia differenziabile in x_0 . Inoltre si ha che comunque prendiamo un vettore $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ avente (u_i) come successione delle componenti rispetto alla base (\vec{e}_i) , l'immagine di \vec{u} tramite L_{P_0} è uguale all'immagine tramite L_{x_0} (differenziale di \tilde{t}^o in x_0) della terna delle componenti di \vec{u} , cioè*

$$L_{P_0} \vec{u} = L_{x_0}(u_1, u_2, u_3).$$

Esempio 1.8. Consideriamo il campo vettoriale così definito:

$$\forall P \in \mathcal{E} \quad \vec{v}(P) = P - O,$$

dove O è un punto fissato in \mathcal{E} .

E' facile verificare che \vec{v} è differenziabile in ogni punto $P_0 \in \mathcal{E}$ e che il suo differenziale L_{P_0} è l'applicazione identica definita su $\vec{\mathcal{E}}$ che denotiamo con $I_{\vec{\mathcal{E}}}$.

Sia dato un campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r definito in $S \subset \mathcal{E}$ e differenziabile nel punto P_0 di S . Il suo differenziale L_{P_0} , per definizione di differenziabilità di un campo tensoriale, è un'applicazione lineare che appartiene all'insieme $\mathcal{L}_{(1,r)}$, definito nel paragrafo 1.4. Allora, grazie al teorema 1.4, possiamo asserire che esiste un tensore di ordine $r + 1$, \tilde{T}_{P_0} , dipendente da P_0 come il differenziale, tale che

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad L_{P_0}(\vec{u}) = \tilde{T}_{P_0} \cdot \vec{u}.$$

Il tensore \tilde{T}_{P_0} è detto *gradiente o derivato tensoriale del campo tensoriale \tilde{t} nel punto P_0* e denotato nel modo seguente:

$$\tilde{T}_{P_0} =: \text{grad} \tilde{t}(P_0) \text{ o } \nabla \tilde{t}(P_0).$$

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, consideriamo la rappresentazione analitica del campo tensoriale \tilde{t} :

$$\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3).$$

Nell'ipotesi che \tilde{t} sia differenziabile in P_0 , è definito il gradiente di \tilde{t} in P_0 , ossia il tensore $\text{grad} \tilde{t}(P_0)$ di ordine $r + 1$. Denotiamo le componenti di tale tensore rispetto alla base (\vec{e}_i) con $t_{i_1 \dots i_r, j}$; i primi r indici corrispondono agli indici del tensore di partenza, mentre l'indice dopo la virgola è detto indice di derivazione. Si potrebbe dimostrare la seguente

Proposizione 1.11. *Dato il campo tensoriale \tilde{t} di ordine r differenziabile in P_0 e fissato il riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, si ha:*

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_0),$$

dove $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ è la successione delle coordinate cartesiane di P_0 .

Se in particolare abbiamo un campo scalare $f = f(P)$ differenziabile in P_0 , si ha che $\text{grad} f(P_0)$ è un vettore le cui componenti, fissato il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$, sono date da:

$$f_{,j}(P_0) = \frac{\partial f^o}{\partial x_j}(x_0).$$

Se abbiamo un campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(P)$ differenziabile in P_0 , si ha che $\text{grad} \vec{v}(P_0)$ è un tensore doppio le cui componenti, fissato il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$, sono date da:

$$v_{i,j}(P_0) = \frac{\partial v_i^o}{\partial x_j}(x_0).$$

Osservazione 1.7 Per ragioni storiche il differenziale in P_0 , L_{P_0} , di un campo tensoriale \tilde{t} si indica usualmente con una notazione differente:

$$L_{P_0} =: d\tilde{t}(P_0). \quad (1.6.1)$$

Vediamo di introdurre un'ulteriore notazione che viene utilizzata molto spesso. Abbiamo visto che il campo vettoriale $\vec{v} = P - O$ con O punto fissato in \mathcal{E} è differenziabile in tutto \mathcal{E} e che il suo differenziale è dato da $I_{\vec{\mathcal{E}}}$, identità di $\vec{\mathcal{E}}$. Per tale motivo si suole denotare $I_{\vec{\mathcal{E}}}$ con dP .

Dunque

$$dP : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u}. \end{array}$$

Se si tiene presente che se \tilde{t} è differenziabile in P_0 si ha:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad L_{P_0}(\vec{u}) = \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot \vec{u}$$

e si usano le notazioni prima introdotte, si arriva a scrivere:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \quad d\tilde{t}(P_0)(\vec{u}) = \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot dP(\vec{u}).$$

Ciò porta ad indicare con $\text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot dP$ la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot dP : \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ \vec{u} &\longmapsto \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot dP(\vec{u}) = \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Con quest'ultima notazione possiamo allora scrivere:

$$d\tilde{t}(P_0) = \text{grad} \tilde{t}(P_0) \cdot dP.$$

Diamo ora la definizione di gradiente secondo, gradiente terzo e così via.

Sia dato un campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r , definito in un sottoinsieme aperto S dello spazio geometrico e differenziabile in ogni punto di S . Dunque in S risulta definito un nuovo campo tensoriale di ordine $r + 1$, ossia il campo del gradiente di \tilde{t} :

$$\text{grad} \tilde{t} = \text{grad} \tilde{t}(P).$$

Preso un punto $P_0 \in S$, può avvenire che il campo tensoriale $\text{grad} \tilde{t}$ sia differenziabile in P_0 . Allora in P_0 esiste il gradiente di $\text{grad} \tilde{t}$, cioè $\text{grad}(\text{grad} \tilde{t})(P_0)$.

Definizione 1.40. *Il tensore $\text{grad}(\text{grad} \tilde{t})(P_0)$ di ordine $r + 2$ è detto gradiente secondo o derivato tensoriale di ordine 2 di \tilde{t} in P_0 e viene denotato con $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}(P_0)$ o $\nabla^{(2)} \tilde{t}(P_0)$.*

Come abbiamo visto, in un riferimento cartesiano oronormale le componenti del tensore di ordine $r + 1$ $\text{grad} \tilde{t}(P_0)$ si indicano con $t_{i_1 \dots i_r, j}(P_0)$; per quanto riguarda le componenti del tensore $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}(P_0)$, che è un tensore di ordine $r + 2$, queste si denotano con $t_{i_1 \dots i_r, jh}(P_0)$.

Si può poi definire in maniera ovvia anche il gradiente di ordine p con $p > 2$ del campo tensoriale \tilde{t} in P_0 : questo è un tensore di ordine $r + p$, è denotato con $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}(P_0)$ o $\nabla^{(p)} \tilde{t}(P_0)$ e le sue componenti sono indicate con $t_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_p}(P_0)$.

Definizione 1.41. *Sia dato il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r definito in S , sottoinsieme aperto di \mathcal{E} . Diciamo che \tilde{t} è di classe \mathcal{C}^p in S con $p \in \mathbb{N}$ e scriviamo $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$ se \tilde{t} ammette in S gradiente sino all'ordine p e tutti i suoi gradienti sono continui in S .*

E' immediato provare la seguente

Proposizione 1.12. *Dato il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine r definito in S , sottoinsieme aperto di \mathcal{E} , e fissato un riferimento cartesiano ortonormale, $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$ se e solo se $\tilde{t}^o \in \mathcal{C}^p(S_\xi)$.*

Poiché la derivazione tensoriale dei campi tensoriali si riconduce alla derivazione usuale delle loro rappresentazioni analitiche in un qualsiasi riferimento cartesiano ortonormale, la derivazione tensoriale gode delle stesse proprietà della derivazione usuale.

In particolare, se $\tilde{A} = \tilde{A}(P)$ e $\tilde{B} = \tilde{B}(P)$ sono due campi tensoriali di ordine r definiti in un aperto S dello spazio geometrico, entrambi differenziabili nel punto $P_0 \in S$, allora $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha che il campo tensoriale $\lambda \tilde{A} + \mu \tilde{B}$ di ordine r è differenziabile in P_0 ed inoltre:

$$\text{grad}(\lambda \tilde{A} + \mu \tilde{B})(P_0) = \lambda \text{grad} \tilde{A}(P_0) + \mu \text{grad} \tilde{B}(P_0).$$

L'operatore differenziale gradiente è dunque lineare.

Sussistono anche le due seguenti proposizioni

Proposizione 1.13. *Se il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$, definito in un aperto S , è costante, allora è differenziabile in ogni punto di S e il suo gradiente è identicamente nullo in S . Viceversa se il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ ha il gradiente identicamente nullo in S , insieme aperto e connesso (ossia dominio) dello spazio geometrico, allora \tilde{t} è costante in S .*

Proposizione 1.14. *Se S è aperto e il campo tensoriale $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(S)$ con $p \geq 2$, allora $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}$ in ogni punto di S è simmetrico rispetto ad ogni coppia di indici di derivazione.*

Esempio 1.9. Sia $f = f(P)$ un campo scalare definito su un aperto S e si abbia $f \in \mathcal{C}^2(S)$.

Allora f ammette in S gradiente di ordine 2: $\text{grad}^{(2)} f$. In un fissato riferimento cartesiano ortonormale le componenti di tale campo tensoriale di ordine 2 sono date da $f_{,ij} = f_{,ji}$.

Sara' utile nel seguito una proprietà dell'operatore gradiente applicato ad un campo scalare che richiamiamo.

Proposizione 1.15. *Siano dati il campo scalare $g = g(P)$ definito in S e la funzione reale $h = h(\lambda)$ definita in $g(S)$. Se g è differenziabile in P_0 , punto interno di S , e h è derivabile in $\lambda_0 = g(P_0)$, allora il campo scalare f , ottenuto componendo h e g , cioè tale che $\forall P \in S \quad f(P) = h(g(P))$, è differenziabile in P_0 e si ha:*

$$\text{grad} f(P_0) = \frac{dh}{d\lambda}(g(P_0)) \text{grad} g(P_0).$$

Se si considerano campi tensoriali differenziabili su un aperto S di \mathcal{E} , mediante l'operatore gradiente, che è un operatore differenziale del primo ordine, è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine. Noi vedremo due esempi: l'operatore divergenza e l'operatore rotore.

Definizione 1.42. *Dato il campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(P)$ differenziabile in ogni punto di un aperto S , chiamiamo divergenza di \vec{v} quel campo scalare definito in S che si ottiene considerando in ogni punto di S il contratto di $\text{grad } \vec{v}$. Tale campo scalare viene denotato con $\text{div } \vec{v}$ o $\nabla \cdot \vec{v}$.*

Dalla definizione data sopra, fissato un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, deduciamo allora:

$$\forall P \in S \quad \text{div } \vec{v}(P) = v_{i,i}(P).$$

Se poi ricorriamo alla rappresentazione analitica del campo vettoriale, otteniamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad \text{div } \vec{v}(P) = \frac{\partial v_1^o}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2^o}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_3^o}{\partial x_3}(x).$$

Una proprietà della divergenza di un campo vettoriale, di facile dimostrazione, è espressa dalla seguente

Proposizione 1.16. *Dati il campo scalare f e il campo vettoriale \vec{v} , entrambi differenziabili nell'aperto S , si ha in S*

$$\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div } \vec{v} + \text{grad } f \cdot \vec{v} \quad (1.6.2)$$

Definizione 1.43. *Dato il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine 2 differenziabile in ogni punto di un aperto S , chiamiamo divergenza di \tilde{t} ognuno dei due campi vettoriali definiti in S che si ottengono considerando in ogni punto di S i due contratti di $\text{grad } \tilde{t}$ risultanti dalla contrazione di un indice del tensore di partenza con l'indice di derivazione. Ognuna delle due divergenze del campo tensoriale \tilde{t} viene denotata con $\text{div } \tilde{t}$ o $\nabla \cdot \tilde{t}$.*

Dunque dato il campo tensoriale \tilde{t} di ordine 2, questo ammette due divergenze ed ognuna di queste è un campo vettoriale.

Indichiamo con \vec{D} la divergenza ottenuta contraendo in $\text{grad } \tilde{t}$ il primo indice del tensore di partenza con quello di derivazione e con \vec{D}' la divergenza ottenuta contraendo in $\text{grad } \tilde{t}$ il secondo indice del tensore di partenza con quello di derivazione. Allora, fissato il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$, le componenti di \vec{D} e di \vec{D}' sono date da

$$D_j = t_{ij,i} \quad D'_i = t_{ij,j}.$$

Se il campo \tilde{t} è simmetrico in ogni punto di S , allora $\vec{D} = \vec{D}'$; se \tilde{t} è emisimmetrico in ogni punto di S , allora $\vec{D} = -\vec{D}'$.

La definizione di divergenza si estende a un qualsiasi campo tensoriale di ordine $r > 2$, differenziabile in un aperto S .

Definizione 1.44. *Dato il campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P)$ di ordine $r > 2$ differenziabile in ogni punto di un aperto S , chiamiamo divergenza di \tilde{t} ognuno degli r campi tensoriali di ordine $r - 1$ definiti in S che si ottengono considerando in ogni punto di S gli r contratti di $\text{grad}\tilde{t}$ risultanti dalla contrazione di un indice del tensore di partenza e dell'indice di derivazione. Ognuna delle r divergenze del campo tensoriale \tilde{t} viene denotata con $\text{div}\tilde{t}$ o $\nabla \cdot \tilde{t}$.*

Definizione 1.45. *Dato il campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(P)$ differenziabile in ogni punto di un aperto S , chiamiamo rotore di \vec{v} quel campo vettoriale definito in S che si ottiene considerando in ogni punto di S il vettore, denotato con $\text{rot}\vec{v}$ o $\nabla \times \vec{v}$, risultante dalla composizione di $\text{grad}\vec{v}$ con il tensore di Ricci effettuata nel modo seguente:*

$$\text{rot}\vec{v} = \text{grad}^t \vec{v} \cdot \tilde{\vartheta}.$$

Fissato il riferimento cartesiano ortogonale $[O, (\vec{e}_i)]$, vediamo come si esprimono le componenti di $\text{rot}\vec{v}$ che per brevità denotiamo con \vec{r} . Dalla definizione data sopra deduciamo:

$$\forall P \in S \quad r_k(P) = \vartheta_{ijk} v_{j,i}(P) = \epsilon_{ijk} v_{j,i}(P),$$

dove abbiamo tenuto presente che in una base ortonormale le componenti del tensore di Ricci coincidono con il simbolo di permutazione a tre indici.

Se poi facciamo uso della rappresentazione analitica del campo \vec{v} , denotata con \vec{v}^o , possiamo scrivere:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_k(P) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j^o}{\partial x_i}(x).$$

In particolare per $k = 1$ otteniamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_1(P) = \epsilon_{231} \frac{\partial v_3^o}{\partial x_2}(x) + \epsilon_{321} \frac{\partial v_2^o}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial v_3^o}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2^o}{\partial x_3}(x).$$

Analogamente si ha:

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_2(P) = \frac{\partial v_1^o}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3^o}{\partial x_1}(x)$$

$$\forall P(x_i) \in S \quad r_3(P) = \frac{\partial v_2^o}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1^o}{\partial x_2}(x).$$

Si noti che il rotore di un campo vettoriale si può anche rappresentare nella forma:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \tilde{\vartheta} \cdot \operatorname{grad}^t \vec{v}.$$

Infatti, se ci rifacciamo alle componenti in un dato riferimento cartesiano ortonormale, abbiamo:

$$r_k = \vartheta_{ijk} v_{j,i} = \vartheta_{kij} v_{j,i}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'emisimmetria del tensore di Ricci. Una proprietà del rotore di un campo vettoriale è espressa mediante la seguente

Proposizione 1.17. *Dati il campo scalare f e il campo vettoriale \vec{v} , entrambi differenziabili nell'aperto S , si ha in S*

$$\operatorname{rot}(f \vec{v}) = f \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{grad} f \times \vec{v}. \quad (1.6.3)$$

Osservazione 1.8. Nei testi inglesi in luogo della notazione rot si trova curl .

Se un campo tensoriale di ordine r , definito in un aperto S , ammette ivi gradiente sino all'ordine p con $p > 1$, possiamo applicare a tale campo gli operatori differenziali del primo ordine sino a p volte, dando luogo ad operatori differenziali sino all'ordine p .

Noi introdurremo un operatore differenziale del secondo ordine che svolge un ruolo molto importante in Fisica Matematica: l'operatore laplaciano.

Definizione 1.46. *Sia \tilde{t} un campo tensoriale di ordine r definito nell'aperto S e dotato in S di gradiente di ordine 2. Chiamiamo laplaciano di \tilde{t} il campo tensoriale di ordine r , definito in S che si ottiene applicando l'operatore divergenza a $\operatorname{grad} \tilde{t}$ con la contrazione dei due indici di derivazione nel $\operatorname{grad}^{(2)} \tilde{t}$.*

Se in particolare è dato il campo scalare f dotato di gradiente secondo nell'aperto S , abbiamo:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = f_{,jj}.$$

Fissato un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, e considerata la rappresentazione analitica del campo f^o , deduciamo:

$$\forall P(x_i) \in S \quad \Delta f(P) = \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f^o}{\partial x_3^2}(x).$$

Proposizione 1.18. *Sia \tilde{t} un campo tensoriale di ordine r dotato nell'aperto S di gradiente di ordine 2. Allora, fissato un qualsiasi riferimento cartesiano ortonormale, le componenti di $\Delta \tilde{t}$ sono uguali al laplaciano delle corrispondenti componenti di \tilde{t} , ossia:*

$$(\Delta \tilde{t})_{i_1 \dots i_r} = \Delta t_{i_1 \dots i_r}.$$

Dimostrazione

La dimostrazione è immediata.

Infatti in un fissato riferimento cartesiano ortonormale si ha:

$$(\Delta \tilde{t})_{i_1 \dots i_r} = t_{i_1 \dots i_r, jj} = \Delta t_{i_1 \dots i_r}.$$

Per il laplaciano di un campo vettoriale si può provare la seguente

Proposizione 1.19. *Se $\vec{v} \in C^2(S)$, allora in S si ha*

$$\Delta \vec{v} = \text{grad div} \vec{v} - \text{rot rot} \vec{v}.$$

Diamo ora una definizione che ci sarà utile in seguito.

Definizione 1.47. *Sia \tilde{t} un campo tensoriale di ordine r definito in un sottoinsieme chiuso S dello spazio geometrico. Diciamo che \tilde{t} è di classe $C^p(S)$ con $p \in \mathbb{N}$ e scriviamo $\tilde{t} \in C^p(S)$ se esiste un campo tensoriale $\tilde{\tilde{t}}$ di ordine r definito in un aperto $\hat{S} \supset S$ tale che $\tilde{\tilde{t}} \in C^p(\hat{S})$ e $\tilde{\tilde{t}}|_S = \tilde{t}$.*

1.7 Integrazione dei campi tensoriali

Fissiamo nello spazio geometrico \mathcal{E} un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$.

Diamo la seguente definizione:

Definizione 1.48. *Un sottoinsieme $S \subset \mathcal{E}$ è misurabile nel senso di Peano-Jordan o di Lebesgue se S_ξ è misurabile nel senso di Peano-Jordan o di Lebesgue ed in tal caso definiamo misura di S nel senso di Peano-Jordan o di Lebesgue la misura di S_ξ .*

La misura di sottoinsiemi dello spazio geometrico secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue è detta usualmente volume.

Si noti che, come si può verificare, tale definizione è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale.

Definizione 1.49. *Dato il campo scalare f definito nell'insieme S misurabile secondo Peano-Jordan o secondo Lebesgue, diciamo che f è integrabile in S secondo Riemann o secondo Lebesgue se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale, lo è in S_ξ la sua rappresentazione analitica f° . Inoltre definiamo integrale di f su S l'integrale di f° su S_ξ ed usiamo la seguente notazione:*

$$\int_S f(P) dS = \int_{S_\xi} f^\circ(x) dx.$$

Ovviamente

$$\int_{S_\xi} f^0(x) dx = \int \int \int_{S_\xi} f^0(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

E' facile verificare che la definizione data sopra è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale utilizzato.

E' immediato estendere la definizione data per un campo scalare a qualsiasi campo tensoriale.

Definizione 1.50. *Dato il campo tensoriale \tilde{t} di ordine r definito nell'insieme S misurabile (secondo Jordan o secondo Lebesgue), diciamo che \tilde{t} è integrabile in S secondo Riemann o secondo Lebesgue se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale, lo è in S_ξ la sua rappresentazione analitica \tilde{t}^0 . Inoltre definiamo integrale di \tilde{t} in S l'integrale di \tilde{t}^0 in S_ξ ed usiamo la seguente notazione:*

$$\int_S \tilde{t}(P) dS = \int_{S_\xi} \tilde{t}^0(x) dx.$$

Ovviamente la definizione è indipendente dal riferimento cartesiano ortonormale utilizzato e per l'integrazione dei campi tensoriali sussistono tutti i teoremi relativi all'integrazione delle funzioni tensoriali di tre variabili reali.

Nel seguito tutti gli integrali che prenderemo in considerazione devono intendersi nel senso di Lebesgue.

A questo punto è opportuno enunciare alcuni teoremi integrali che in Fisica Matematica svolgono un ruolo fondamentale.

Premettiamo e richiamiamo alcune indispensabili definizioni.

Definizione 1.51. *Sia σ una superficie regolare dello spazio geometrico sostegno dell'applicazione φ tale che*

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (u, v) &\longmapsto P = \varphi(u, v), \end{aligned}$$

dove K è un compatto di \mathbb{R}^2 , connesso e chiusura di un aperto. La superficie σ abbia le seguenti equazioni parametriche cartesiane nel riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$:

$$x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (u, v) \in K.$$

Allora, dato il campo scalare $f = f(P) \in C(S)$ con S aperto dello spazio geometrico tale che $\sigma \subset S$, definiamo integrale di f esteso a σ lo scalare:

$$\begin{aligned} \int_\sigma f(P) d\Sigma &= \int \int_K f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv \\ &= \int \int_K f^0(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv, \end{aligned}$$

dove

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \vec{e}_i, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x_j}{\partial v} \vec{e}_j.$$

Si dimostra che la definizione è indipendente dalla rappresentazione parametrica di σ .

Tale definizione si estende immediatamente anche ai campi tensoriali.

Definizione 1.52. *Dati la superficie regolare σ e il campo tensoriale di ordine r $\tilde{t} = \tilde{t}(P) \in C(S)$ con S aperto dello spazio geometrico tale che $\sigma \subset S$, definiamo integrale di \tilde{t} esteso a σ il tensore di ordine r dato da:*

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \tilde{t}(P) d\Sigma &= \int \int_K \tilde{t}(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv \\ &= \int \int_K \tilde{t}^0(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv. \end{aligned}$$

Definizione 1.53. *Chiamiamo dominio dello spazio geometrico ogni sottoinsieme di \mathcal{E} aperto e connesso.*

Definizione 1.54. *Un sottoinsieme S dello spazio geometrico è un dominio regolare se è un dominio limitato la cui frontiera ∂S è l'unione di un numero finito di superfici regolari che non hanno fra loro punti comuni se non punti del bordo. Dunque*

$$\partial S = \bigcup_{j=1}^s \sigma_j$$

dove $s \in \mathbb{N}$ e le s superfici $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ sono regolari.

Se S è un dominio regolare con $\partial S = \bigcup_{j=1}^s \sigma_j$, e f è un campo scalare continuo

in un aperto contenente la chiusura di S , cioè \overline{S} o anche soltanto continuo in \overline{S} , useremo la seguente notazione:

$$\int_{\partial S} f(P) d\Sigma := \sum_{j=1}^s \int_{\sigma_j} f(P) d\Sigma.$$

Per definizione di dominio regolare, ogni superficie σ_j è regolare e quindi in ogni punto, esclusi eventualmente punti del bordo, possiede la retta normale; dei due versori di tale retta consideriamo in ogni punto quello orientato verso l'esterno di S . Lo denoteremo con \vec{n} e diremo che è *il versore della normale esterna a ∂S* .

Enunciamo ora un teorema di cui non forniamo la dimostrazione.

Teorema 1.16. *Siano S un dominio regolare dello spazio geometrico e f un campo scalare $\in \mathcal{C}^1(S) \cap \mathcal{C}(\bar{S})$. Fissato un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, si ha:*

$$\int_S f_{,i} dS = \int_{\partial S} f n_i d\Sigma, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.7.1)$$

dove $f_{,i}$ e n_i sono le componenti rispetto a \vec{e}_i di $\text{grad } f$ e di $\vec{n} =$ versore della normale esterna a ∂S .

Le (1.7.1) sono note come *formule integrali di Gauss-Ostrogradski* e sono equivalenti alla relazione vettoriale:

$$\int_S \text{grad } f dS = \int_{\partial S} f \vec{n} d\Sigma. \quad (1.7.2)$$

Conseguenza immediata delle formule integrali di Gauss-Ostrogradski è il seguente teorema, noto come teorema della divergenza.

Teorema 1.17. *Siano S un dominio regolare dello spazio geometrico e \vec{v} un campo vettoriale $\in \mathcal{C}^1(S) \cap \mathcal{C}(\bar{S})$. Allora:*

$$\int_S \text{div } \vec{v} dS = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma.$$

L'integrale di superficie che compare a secondo membro della formula che traduce il teorema della divergenza è detto *flusso uscente da S del campo vettoriale \vec{v}* .

Il teorema della divergenza si può estendere anche a campi tensoriali di ogni ordine purché vengano soddisfatte le ipotesi imposte al campo vettoriale \vec{v} .

1.8 Campi tensoriali dipendenti da una variabile reale

Consideriamo il prodotto cartesiano: $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ ed osserviamo che, essendo \mathcal{E} e \mathbb{R} spazi metrici, anche il loro prodotto cartesiano è uno spazio metrico, poiché l'applicazione

$$\begin{aligned} d: \quad (\mathcal{E} \times \mathbb{R}) \times (\mathcal{E} \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((P, \lambda), (P_0, \lambda_0)) &\longmapsto \sqrt{|P - P_0|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2} \end{aligned}$$

gode delle proprietà della distanza.

Definizione 1.55. Siano $S \subset \mathcal{E}$, $I \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo campo tensoriale di ordine r dipendente da una variabile reale, definito in $S \times I$, ogni applicazione del tipo:

$$\begin{aligned} \tilde{t}: S \times I &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ (P, \lambda) &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

Fissato $\lambda \in I$, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(\cdot, \lambda): S &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ P &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

Tale applicazione $\tilde{t}(\cdot, \lambda)$ è un campo tensoriale di ordine r definito in S . Fissato $P \in S$, consideriamo ora l'applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(P, \cdot): I &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ \lambda &\longmapsto \tilde{t}(P, \lambda). \end{aligned}$$

L'applicazione $\tilde{t}(P, \cdot)$ è una funzione tensoriale di ordine r definita in I .

Poiché $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ è uno spazio metrico, $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$ è un'applicazione tensoriale definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico.

Pertanto se (P_0, λ_0) è un punto di accumulazione per $S \times I$ e \tilde{l} un tensore di ordine r , è noto il significato della scrittura:

$$\lim_{(P, \lambda) \rightarrow (P_0, \lambda_0)} \tilde{t}(P, \lambda) = \tilde{l},$$

dal momento che la definizione di limite per un campo tensoriale dipendente da una variabile reale rientra nella definizione generale data nel paragrafo 1.3. Analogamente non è necessario ridare la definizione di continuità.

Fissato in \mathcal{E} il riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, al campo tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$, dipendente da una variabile reale, resta associata un'applicazione di quattro variabili reali: $\tilde{t}^o = \tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ con $(x_1, x_2, x_3, \lambda) \in S_\xi \times I$, detta *rappresentazione analitica di \tilde{t} nel riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$* , ottenuta nel modo seguente:

$$\tilde{t}^o(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \tilde{t}(\xi^{-1}(x_1, x_2, x_3), \lambda) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, \lambda) \in S_\xi \times I.$$

Vediamo ora di introdurre opportuni operatori differenziali.

Sia dato il campo tensoriale dipendente da una variabile reale $\tilde{t} = \tilde{t}(P, \lambda)$ di ordine r , definito in $S \times I$ dove S è un aperto dello spazio geometrico e I è un

aperto di \mathbb{R} . Dunque $S \times I$ è un aperto dello spazio metrico $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

Fissato λ in I , può accadere che il campo tensoriale $\tilde{t}(\cdot, \lambda)$, definito in S , ammetta gradiente in un punto $P \in S$. Questo è detto *gradiente di \tilde{t} in (P, λ)* ed è denotato con $\text{grad} \tilde{t}(P, \lambda)$ o $\nabla \tilde{t}(P, \lambda)$.

Fissato un riferimento cartesiano $[O, (\vec{e}_i)]$, denotiamo con $t_{i_1 \dots i_r, j}(P, \lambda)$ le componenti rispetto alla base (\vec{e}_i) di $\text{grad} \tilde{t}(P, \lambda)$. E' facile provare che:

$$t_{i_1 \dots i_r, j}(P, \lambda) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3, \lambda)$$

dove \tilde{t}^o è la rappresentazione analitica del campo e (x_1, x_2, x_3) è la successione delle coordinate cartesiane di P .

Se in corrispondenza di ogni valore λ fissato in I , esiste $\text{grad} \tilde{t}(P, \lambda)$ in ogni punto $P \in S$, resta definito in $S \times I$ un nuovo campo tensoriale dipendente da una variabile reale, di ordine $r + 1$, il campo del gradiente di \tilde{t} , fatto rispetto al punto con λ fissato:

$$\text{grad} \tilde{t} = \text{grad} \tilde{t}(P, \lambda).$$

Tale campo, a sua volta, per λ fissato, può ammettere gradiente in un punto $P \in S$; questo tensore, di ordine $r + 2$, è detto *gradiente secondo o di ordine 2 di \tilde{t} in (P, λ)* e denotato con $\text{grad}^{(2)} \tilde{t}(P, \lambda)$ o $\nabla^{(2)} \tilde{t}(P, \lambda)$.

In maniera analoga si può definire il gradiente di ordine p di \tilde{t} in (P, λ) con $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$, denotato con $\text{grad}^{(p)} \tilde{t}(P, \lambda)$ o $\nabla^{(p)} \tilde{t}(P, \lambda)$. Questo è un tensore di ordine $r + p$.

Ora fissiamo $P \in S$. Può avvenire che la funzione tensoriale $\tilde{t}(P, \cdot)$ definita in I in corrispondenza di un dato valore di λ ammetta derivata. Questa è ancora un tensore di ordine r , è detta *derivata rispetto a λ di \tilde{t} in (P, λ)* e denotata con

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \lambda}(P, \lambda) \text{ o } \partial_\lambda \tilde{t}(P, \lambda).$$

E' evidente che, fissato un riferimento cartesiano $[O, (\vec{e}_i)]$, si ha:

$$\frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}}{\partial \lambda}(P, \lambda) = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^o}{\partial \lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda).$$

Se tale derivata esiste $\forall P \in S$ fissato in ogni $\lambda \in I$, allora in $S \times I$ è definito un nuovo campo tensoriale dipendente da una variabile reale di ordine r , detto campo della derivata rispetto a λ di \tilde{t} :

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \lambda}(P, \lambda).$$

Il campo della derivata rispetto a λ di \tilde{t} può a sua volta ammettere derivata per un dato valore di λ , fissato P ; questa, che è un tensore di ordine r , la chiamiamo

derivata seconda rispetto a λ di \tilde{t} in (P, λ) e la denotiamo con $\frac{\partial^2 \tilde{t}}{\partial \lambda^2}(P, \lambda)$ o $\partial_\lambda^2 \tilde{t}(P, \lambda)$.

Analogamente si può definire la derivata rispetto a λ di ordine q di \tilde{t} in (P, λ) con $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$, denotata con $\frac{\partial^q \tilde{t}}{\partial \lambda^q}(P, \lambda)$ o $\partial_\lambda^q \tilde{t}(P, \lambda)$.

Diamo ora una definizione che ci sarà utile in seguito.

Definizione 1.56. Diremo che il campo tensoriale \tilde{t} di ordine r dipendente da una variabile reale, definito in $S \times I$, con S e I aperti è di classe $\mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$ con $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e scriveremo $\tilde{t} \in \mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$ se esistono in $S \times I$ e sono ivi continui i seguenti campi tensoriali dipendenti da una variabile reale:

$$\text{grad}^{(l)} \frac{\partial^m \tilde{t}}{\partial \lambda^m} = \text{grad}^{(l)} \frac{\partial^m \tilde{t}}{\partial \lambda^m}(P, \lambda)$$

dove

$$l \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad m \in \{0, 1, \dots, q\}, \quad l + m \leq \max\{p, q\}$$

e

$$\text{grad}^{(0)} \tilde{t} := \tilde{t}, \quad \frac{\partial^0 \tilde{t}}{\partial \lambda^0} := \tilde{t}.$$

Se $p = q$, diremo che \tilde{t} è di classe $\mathcal{C}^p(S \times I)$, se $p = q = 0$, cioè se \tilde{t} è continuo in $S \times I$, allora diremo che \tilde{t} è di classe $\mathcal{C}(S \times I)$.

E' evidente che $\tilde{t} \in \mathcal{C}^{p,q}(S \times I)$ se e solo se, fissato un riferimento cartesiano ortonormale $[O, (\vec{e}_i)]$, $\tilde{t}^\sigma \in \mathcal{C}^{p,q}(S_\xi \times I)$, dove \tilde{t}^σ è la rappresentazione analitica di \tilde{t} .

Quanto visto per i campi tensoriali dipendenti da una variabile reale si estende facilmente ai campi tensoriali dipendenti da più variabili reali.

1.9 Funzioni tensoriali di una variabile tensoriale

Considerato l'insieme dei tensori di ordine s : $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$, questo, com'è noto, è uno spazio vettoriale normato e quindi diviene in modo naturale uno spazio metrico, poiché l'applicazione così definita:

$$d: \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \times \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\tilde{A}, \tilde{A}_0) \longmapsto |\tilde{A} - \tilde{A}_0|$$

gode delle proprietà di una distanza.

Definizione 1.57. Sia \mathcal{S} un sottoinsieme di $\underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$. Chiamiamo funzione tensoriale di ordine r di una variabile tensoriale di ordine s , definita in \mathcal{S} , una qualsiasi applicazione del tipo:

$$\begin{aligned} \tilde{t}: \mathcal{S} &\longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}} \\ \tilde{A} &\longmapsto \tilde{t}(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Per l'osservazione precedente, $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$ è un'applicazione tensoriale definita in un sottoinsieme di uno spazio metrico. Limite e continuità sono perciò definiti nel modo usuale.

Fissiamo una base ortonormale (\vec{e}_i) per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$ e osserviamo che ad ogni tensore \tilde{A} di ordine s è associata la successione delle sue componenti: $(A_{j_1 \dots j_s})$, successione di 3^s scalari. Consideriamo poi l'applicazione

$$\begin{aligned} \Xi: \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3^s} \\ \tilde{A} &\longmapsto (A_{11\dots 1}, \dots, A_{33\dots 3}) \end{aligned}$$

dove $(A_{11\dots 1}, \dots, A_{33\dots 3})$ è la disposizione ordinata ottenuta mediante le 3^s componenti di \tilde{A} disposte in un dato ordine.

E' facile provare che Ξ è un omeomorfismo analogo all'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi: \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Considerata la funzione tensoriale di una variabile tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$, se si fissa in $\vec{\mathcal{E}}$ una base (\vec{e}_i) , a \tilde{t} resta associata la funzione tensoriale \tilde{t}^* di 3^s variabili reali definita in $\mathcal{S}_\Xi \subset \mathbb{R}^{3^s}$ ottenuta nel modo seguente:

$$\tilde{t}^* = \tilde{t} \circ \Xi^{-1}|_{\mathcal{S}_\Xi}.$$

Tale funzione è detta *rappresentazione analitica di \tilde{t} nella base (\vec{e}_i)* ed è analoga alla rappresentazione analitica di un campo tensoriale in un riferimento cartesiano ortonormale.

Diamo ora la definizione di differenziabilità di una funzione tensoriale di una variabile tensoriale.

Definizione 1.58. Sia $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$ una funzione tensoriale di una variabile tensoriale, definita in $\mathcal{S} \subset \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}}$. Dato il tensore \tilde{A}_0 , punto interno per \mathcal{S} ,

diciamo che \tilde{t} è differenziabile in \tilde{A}_0 se esiste un'applicazione lineare, dipendente da \tilde{A}_0 , $L_{\tilde{A}_0} : \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{r \text{ volte}}$ tale che

$$\lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_0} \frac{\tilde{t}(\tilde{A}) - \tilde{t}(\tilde{A}_0) - L_{\tilde{A}_0}(\tilde{A} - \tilde{A}_0)}{|\tilde{A} - \tilde{A}_0|} = \tilde{0}.$$

L'applicazione $L_{\tilde{A}_0}$ è detta *differenziale della funzione tensoriale di una variabile tensoriale \tilde{t} in \tilde{A}_0* .

Per quanto visto nel paragrafo 1.4, in corrispondenza di $L_{\tilde{A}_0}$ esiste un tensore, dipendente da \tilde{A}_0 , $\tilde{B}_{\tilde{A}_0}$, di ordine $r + s$, tale che:

$$\forall \tilde{A} \in \underbrace{\vec{\mathcal{E}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathcal{E}}}_{s \text{ volte}} \quad L_{\tilde{A}_0}(\tilde{A}) = \tilde{B}_{\tilde{A}_0} \cdot \tilde{A}.$$

Il tensore $\tilde{B}_{\tilde{A}_0}$ è detto *derivata di \tilde{t} in \tilde{A}_0* e viene denotato nel modo seguente:

$$\tilde{B}_{\tilde{A}_0} =: \partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}_0).$$

Analogamente a quanto abbiamo visto per i campi tensoriali, si può dimostrare la seguente

Proposizione 1.20. *Data la funzione tensoriale di ordine r di una variabile tensoriale di ordine s $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$, definita in \mathcal{S} , questa è differenziabile in \tilde{A}_0 , punto interno di \mathcal{S} , se e solo se, fissata una base ortonormale (\vec{e}_i) in $\vec{\mathcal{E}}$, la sua rappresentazione analitica \tilde{t}^* lo è nel punto corrispondente di \tilde{A}_0 in \mathbb{R}^{3^s} . Inoltre le componenti della derivata di \tilde{t} in \tilde{A}_0 si ottengono tramite le derivate delle componenti di \tilde{t}^* nel modo seguente:*

$$\left[\partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}_0) \right]_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \frac{\partial t_{i_1 \dots i_r}^*}{\partial A_{j_1 \dots j_s}}(\Xi(\tilde{A}_0)).$$

Se \mathcal{S} è un aperto, può avvenire che \tilde{t} sia differenziabile in ogni punto di \mathcal{S} ; si ottiene così una nuova funzione tensoriale di una variabile tensoriale definita in \mathcal{S} di ordine $r + s$:

$$\partial_{\tilde{A}} \tilde{t} = \partial_{\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{A}).$$

Questa, a sua volta, può essere differenziabile in un determinato punto \tilde{A}_0 di \mathcal{S} e quindi avere derivata; tale derivata, che è un tensore di ordine $r + 2s$, viene detta *derivata seconda o di ordine 2 di \tilde{t} in \tilde{A}_0* e denotata con $\partial_{\tilde{A}}^2 \tilde{t}(\tilde{A}_0)$.

In maniera analoga si definisce la derivata di ordine $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$, denotata con $\partial_{\tilde{A}}^p \tilde{t}(\tilde{A}_0)$

Definizione 1.59. Diremo che la funzione tensoriale \tilde{t} di ordine r di una variabile tensoriale di ordine s , definita in \mathcal{S} con \mathcal{S} aperto è di classe $\mathcal{C}^p(\mathcal{S})$ con $p \in \mathbb{N}$ e scriveremo $\tilde{t} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{S})$ se \tilde{t} ammette in \mathcal{S} derivate continue fino all'ordine p .

In maniera analoga a quanto abbiamo fatto, potremmo anche considerare funzioni tensoriali di più variabili tensoriali, ma su ciò non insistiamo.

Capitolo 2

Corpi continui deformabili: cinematica

2.1 Definizione di corpo continuo

La Fisica Matematica si propone di ricondurre lo studio dei fenomeni fisici a problemi differenziali. A tal fine vengono introdotti dei modelli matematici atti a schematizzare il comportamento dei corpi reali. Un modello particolarmente importante è quello del corpo continuo che è applicabile ai corpi reali quando si studiano fenomeni fisici nei quali non interviene la natura particellare della materia.

Vediamo di dare la definizione di *corpo continuo tridimensionale*.

Teniamo presente che i corpi reali sono caratterizzati dal fatto che occupano determinate regioni dello spazio fisico e che sono dotati di una particolare struttura materiale. Dunque una definizione matematica di corpo continuo deve tenere conto di queste due proprietà.

Definizione 2.1. *Definiamo corpo continuo tridimensionale ogni terna $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, m)$, dove:*

- \mathcal{C} è uno spazio topologico dotato di una famiglia Φ di omeomorfismi del tipo
 $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow S_\varphi$ con S_φ chiusura di un aperto dello spazio geometrico;
- \mathcal{A} è la σ -algebra di Borel dello spazio topologico \mathcal{C} ;
- m è una misura, che prende il nome di distribuzione di massa.

Ogni omeomorfismo φ è detto *configurazione possibile per il corpo continuo*, $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$ è detta *regione occupata da \mathcal{C} nella configurazione φ* e Φ rappresenta la *famiglia delle configurazioni possibili del corpo continuo*.

(Per le definizioni di spazio topologico, σ -algebra, σ -algebra di Borel e misura si rimanda all'Appendice).

Osservazione 2.1. Si noti che aver associato a \mathcal{C} la famiglia delle sue possibili configurazioni tiene conto del fatto che i corpi reali occupano determinate regioni dello spazio geometrico, mentre la distribuzione di massa m sintetizza, almeno in parte, la struttura materiale del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo.

Osserviamo inoltre che la distribuzione di massa di un corpo continuo è indipendente dalle sue possibili configurazioni.

Definizione 2.2. *Preso un sottoinsieme $A \in \mathcal{A}$, definiamo $m(A)$ massa di A e, in particolare, $m(\mathcal{C})$ è detta massa totale del corpo continuo.*

Nel seguito per brevità denoteremo un corpo continuo semplicemente con \mathcal{C} .

Definizione 2.3. *Un sottocorpo di in corpo continuo \mathcal{C} è un qualsiasi suo sottoinsieme \mathcal{C}^* che sia la chiusura di un aperto.*

Si prova che ad ogni sottocorpo \mathcal{C}^* si può far assumere la struttura di corpo continuo tridimensionale.

Definizione 2.4. *Gli elementi di un corpo continuo \mathcal{C} sono detti particelle di \mathcal{C} e li denoteremo con X, Y, Z, \dots*

Definizione 2.5. *Se φ è una configurazione possibile per il corpo continuo \mathcal{C} e X è una particella di \mathcal{C} , il punto $P = \varphi(X) \in S_\varphi$ è detto posizione occupata dalla particella X nella configurazione φ .*

Essendo φ un omeomorfismo, si ha:

$$P = \varphi(X) \iff X = \varphi^{-1}(P).$$

Si potrebbe dare anche la definizione di corpo continuo bidimensionale o unidimensionale, ma su ciò non insistiamo.

Definizione 2.6. *Diciamo che il corpo continuo \mathcal{C} , dotato della famiglia Φ delle sue possibili configurazioni, è rigido se $\forall \varphi, \varphi' \in \Phi$, si ha:*

$$|\varphi(X) - \varphi(X^*)| = |\varphi'(X) - \varphi'(X^*)| \quad \forall X, X^* \in \mathcal{C}.$$

Dunque se \mathcal{C} è un corpo rigido, prese due sue qualsiasi configurazioni possibili, per ogni coppia di particelle la distanza tra le posizioni che queste occupano in entrambe le configurazioni è la stessa.

Definizione 2.7. *Se il corpo continuo \mathcal{C} non è rigido, diciamo che \mathcal{C} è un corpo continuo deformabile.*

Noi ci occuperemo della meccanica dei corpi continui deformabili.

2.2 Cinematica dei corpi continui

Per studiare il moto di un corpo continuo occorre in primo luogo fissare un osservatore. Sia $[O, (\vec{e}_i)]$ il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore.

Definizione 2.8. *Dato un corpo continuo \mathcal{C} , chiamiamo moto di \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ rispetto all'osservatore fissato una qualsiasi famiglia di possibili configurazioni $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$.*

La regione occupata da \mathcal{C} all'istante t , ossia nella configurazione φ_t , con $t \in [t_0, t_1]$, è denotata con $S(t)$.

Ovviamente il moto di \mathcal{C} è noto se ad ogni istante è nota la posizione occupata da ogni sua particella.

Dunque il moto di \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è descritto dall'equazione puntuale:

$$P = \varphi_t(X) \quad \forall X \in \mathcal{C}, \forall t \in [t_0, t_1]$$

che fornisce la posizione occupata dalla particella X all'istante t .

Nel seguito per motivi di convenienza useremo la seguente notazione:

$$\varphi(X, t) = \varphi_t(X)$$

per cui t non viene più riguardato come un parametro, ma come una variabile indipendente. Dunque l'equazione precedente assume la forma:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (2.2.1)$$

D'altra parte, presa una qualsiasi particella X , siano $\varphi_i(X, t)$ $i = 1, 2, 3$ le applicazioni (a valori reali) che forniscono le coordinate x_i della posizione occupata dalla particella X all'istante t .

Allora il moto di \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ può anche essere descritto mediante le tre equazioni scalari:

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.2)$$

Inoltre, presa una qualsiasi particella X , possiamo anche introdurre il vettore posizione rispetto ad O della posizione P occupata da X all'istante t :

$$P - O = \varphi_i(X, t) \vec{e}_i =: \vec{\varphi}(X, t)$$

dove $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(X, t)$ è un'applicazione vettoriale definita in $\mathcal{C} \times [t_0, t_1]$. Perciò il moto di \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ può anche essere descritto mediante l'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]. \quad (2.2.3)$$

In conclusione il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = \varphi(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1]$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante t dalla particella X ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{\varphi}(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1].$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante t dalla particella X ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = \varphi_i(X, t) \quad \forall (X, t) \in \mathcal{C} \times [t_0, t_1] \quad i = 1, 2, 3$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante t dalla particella X .

Tutte le funzioni al secondo membro delle equazioni scritte sopra hanno come variabili indipendenti X e t . Tuttavia è conveniente assumere come variabile indipendente non la generica particella del corpo continuo, ma la sua posizione in una configurazione fissata, detta *configurazione di riferimento*.

Fissiamo dunque una configurazione $\varphi_0 \in \Phi$ che assumiamo come configurazione di riferimento. Tale configurazione non deve necessariamente coincidere con una configurazione assunta dal corpo continuo durante il moto, ma è del tutto arbitraria. Talvolta può essere opportuno scegliere come configurazione di riferimento la configurazione di \mathcal{C} all'istante t_0 , cioè all'istante iniziale del moto.

La configurazione di riferimento φ_0 sia l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathcal{C} &\longrightarrow S_0 \\ X &\longmapsto P_0 = \varphi_0(X). \end{aligned}$$

Poiché, per definizione di configurazione, φ_0 è un omeomorfismo, ammette inversa ed abbiamo:

$$P_0 = \varphi_0(X) \iff X = \varphi_0^{-1}(P_0).$$

Ciò consente di far comparire nella (6.1), anziché la generica particella X , la posizione P_0 che questa occupa nella configurazione di riferimento.

Infatti poniamo:

$$\forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1] \quad x(P_0, t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (6.1) si può scrivere come:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Se poi, per brevità, introduciamo la notazione:

$$\mathcal{S}_0 := S_0 \times [t_0, t_1],$$

l'equazione puntuale assume la forma:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Analogamente si può operare per l'equazione vettoriale (2.2.2). In tal caso si pone:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \vec{x}(P_0, t) = \vec{\varphi}(\varphi_0^{-1}(P_0), t).$$

Allora la (2.2.2) si può scrivere come:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Consideriamo la rappresentazione analitica del campo vettoriale dipendente da una variabile reale $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$, definito in \mathcal{S}_0 :

$$\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$$

dove (x_{01}, x_{02}, x_{03}) è la terna delle coordinate del punto P_0 ed abbiamo ommesso, per brevità, l'apice o .

Ricordiamo che, fissato il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$, resta definita l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Ovviamente avremo:

$$P_0(x_{0i}) \in S_0 \implies (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0) \subset \mathbb{R}^3.$$

Dunque $\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ è una funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in $\xi(S_0) \times [t_0, t_1]$.

Per brevità poniamo:

$$\xi(\mathcal{S}_0) := \xi(S_0) \times [t_0, t_1].$$

A questo punto, nelle equazioni scalari (2.2.3) al secondo membro sostituiamo le componenti della rappresentazione analitica del campo $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ per cui, in luogo delle (2.2.3), possiamo scrivere le tre equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

In conclusione, se viene fissata una configurazione di riferimento, un moto di un corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (2.2.4)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (2.2.5)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (2.2.6)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane (x_{01}, x_{02}, x_{03}) .

Osservazione 2.2. Fissato $t \in [t_0, t_1]$, indichiamo con $x(\cdot, t)$ l'applicazione:

$$\begin{aligned} x(\cdot, t) : \mathcal{S}_0 &\longrightarrow \mathcal{S}(t) \\ P_0 &\longmapsto P = x(P_0, t). \end{aligned}$$

Tale applicazione è un omeomorfismo, essendo ottenuta componendo due omeomorfismi:

$$x(\cdot, t) = \varphi(\varphi_0^{-1}(\cdot), t) = \varphi_t \circ \varphi_0^{-1}(\cdot)$$

Quindi, per ogni t fissato in $[t_0, t_1]$, l'applicazione $x(\cdot, t)$ ammette inversa $x^{-1}(\cdot, t)$, per cui

$$\forall t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad P = x(P_0, t) \iff P_0 = x^{-1}(P, t).$$

Definizione 2.9. Il moto di un corpo continuo è detto regolare se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

1) $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ o equivalentemente $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$ $i = 1, 2, 3$;

2) $J(P_0, t) = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) > 0 \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \mathcal{S}_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Nel seguito considereremo sempre moti regolari.

Osservazione 2.3. Se $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$, ossia se si assume come configurazione di riferimento quella iniziale del moto, e vale la 1), alla condizione 2) possiamo sostituire la condizione:

$$2') \quad J(P_0, t) \neq 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Infatti, come ora proveremo, dalla 2') discende la 2).

Consideriamo $J(P_0, t_0)$ e teniamo presente che, essendo $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$, abbiamo dalle (2.2.6):

$$x_{0i} = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0).$$

Dunque all'istante $t = t_0$ le funzioni x_i assumono il valore x_{0i} per $i = 1, 2, 3$ e perciò:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0) = \delta_{ij} \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0).$$

Segue

$$J(P_0, t_0) = 1 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

D'altra parte, valendo la condizione 1), $J \in \mathcal{C}(S_0)$, per cui, grazie alla continuità, se J è positivo in S_0 all'istante iniziale t_0 e sussiste la 2'), J si manterrà positivo in $S_0 \forall t \in]t_0, t_1]$, come volevamo dimostrare.

Osservazione 2.4. Come abbiamo precedentemente osservato, fissato $t \in [t_0, t_1]$, l'applicazione $x(\cdot, t)$ è un omeomorfismo e quindi stabilisce una corrispondenza biunivoca tra S_0 e $S(t)$. Ne segue che le (2.2.6) vengono a stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\xi(S_0)$ e $\xi(S(t))$. Se il moto è regolare, noti risultati di Analisi Matematica ci consentono di concludere che, fissato $t \in [t_0, t_1]$, le equazioni $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$ sono invertibili e possiamo quindi esprimere le x_{0i} in funzione di (x_1, x_2, x_3, t) :

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Le funzioni x_{0i} godono delle stesse proprietà di regolarità delle x_i , ovviamente con le opportune modifiche.

Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, introduciamo per brevità le seguenti notazioni:

$$\mathcal{S} = \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\};$$

$$\xi(\mathcal{S}) = \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Sia \mathcal{C} un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Come abbiamo visto, il moto può essere descritto mediante l'equazione:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Definizione 2.10. *Definiamo velocità all'istante t della particella X del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 la derivata rispetto al tempo del campo vettoriale \vec{x} in (P_0, t) :*

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$, istante per istante possiamo considerare la velocità di ogni particella. Risulta quindi definito in \mathcal{S}_0 il campo vettoriale dipendente dalla variabile reale t :

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t),$$

che ad ogni istante t durante il moto fornisce la velocità di ogni particella del corpo continuo in funzione della posizione che questa occupa nella configurazione di riferimento.

D'altra parte, al campo vettoriale $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t)$ definito in \mathcal{S}_0 possiamo associare un nuovo campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ definito in \mathcal{S} nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t),$$

essendo P la posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 .

Mettiamo in rilievo la differenza tra i due campi $\dot{\vec{x}}$ e \vec{v} :

$\dot{\vec{x}}(P_0, t)$ è la velocità all'istante t della particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 , mentre $\vec{v}(P, t)$ è la velocità all'istante t della particella che in tale istante occupa la posizione P .

Poiché $\dot{\vec{x}}$ e \vec{v} sono campi vettoriali, dipendenti anche da t , possiamo considerare la rappresentazione analitica nel riferimento associato all'osservatore:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in $\xi(\mathcal{S}_0)$;

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t),$$

funzione vettoriale di quattro variabili reali definita in $\xi(\mathcal{S})$.

Ovviamente delle rappresentazioni analitiche si possono prendere in considerazione anche le componenti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) & \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che la velocità delle particelle nel moto di un corpo continuo si può rappresentare mediante un campo vettoriale, dipendente da t , definito in \mathcal{S}_0 o un campo vettoriale, dipendente da t , definito in \mathcal{S} .

Ciò che abbiamo visto riguardo la velocità delle particelle si può estendere a qualsiasi grandezza fisica scalare, vettoriale o tensoriale legata al moto del corpo continuo.

Ogni grandezza infatti si può rappresentare mediante un campo (scalare, vettoriale o tensoriale), dipendente anche da t , definito in \mathcal{S}_0 o definito in \mathcal{S} . Nel primo caso, nello studio del moto si utilizzano come variabili indipendenti la posizione P_0 occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo t ; nel secondo caso le variabili indipendenti sono la posizione P occupata dalla generica particella all'istante t e il tempo t . Se ci rifacciamo alle rappresentazioni analitiche dei campi, nel primo caso le variabili indipendenti sono la successione (x_{01}, x_{02}, x_{03}) delle coordinate cartesiane della posizione P_0 occupata dalla generica particella nella configurazione di riferimento e il tempo t , mentre nel secondo sono la successione (x_1, x_2, x_3) delle coordinate cartesiane della posizione P occupata dalla generica particella all'istante t e il tempo t .

Definizione 2.11. *Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in \mathcal{S}_0 o in un suo sottoinsieme, è detto campo materiale (o lagrangiano).*

Ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale, che interviene nello studio del moto del corpo continuo, definito in \mathcal{S} o in un suo sottoinsieme, è detto campo spaziale (o euleriano).

Vediamo di meglio comprendere la differenza tra campo materiale e campo spaziale.

Sia dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

Rivolgiamo la nostra attenzione ad una grandezza fisica scalare legata a tale moto rappresentata mediante il campo scalare materiale: $g = g(P_0, t)$, definito in \mathcal{S}_0 . Fissiamo $P_0 \in \mathcal{S}_0$, ossia fissiamo la particella del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 , e consideriamo la funzione del tempo $g(P_0, \cdot)$ facendo variare t in $[t_0, t_1]$. Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo g al trascorrere del tempo per la particella che occupa la posizione P_0 nella configurazione di riferimento.

Assumiamo ora che la grandezza scalare considerata prima sia rappresentata mediante il campo scalare spaziale $f = f(P, t)$, definito in \mathcal{S} . Fissiamo un punto P nella regione dello spazio geometrico in cui si muove \mathcal{C} e consideriamo la funzione del tempo $f(P, \cdot)$ facendo variare t in $[t_0, t_1]$. Tale funzione ci dice come varia la grandezza scalare rappresentata mediante il campo f al trascorrere del tempo nel punto P fissato, che verrà occupato via via da particelle diverse del corpo continuo.

Ciò che abbiamo detto per i campi scalari si estende ovviamente a campi vettoriali e tensoriali.

E' evidente che se una grandezza è rappresentata mediante un campo materiale è sempre possibile rappresentarla mediante un campo spaziale, così come abbiamo visto per la velocità delle particelle. Vale naturalmente anche il viceversa: se una grandezza è rappresentata mediante un campo spaziale possiamo sempre rappresentarla anche mediante un campo materiale.

Vediamo dapprima come si passa dalla rappresentazione materiale a quella spaziale.

Sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo materiale $g = g(P_0, t)$, definito in \mathcal{S}_0 . Vogliamo dedurne la rappresentazione spaziale; questa è il campo spaziale che denotiamo con $g_s = g_s(P, t)$, definito in \mathcal{S} , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad g_s(P, t) = g(x^{-1}(P, t), t),$$

dove abbiamo tenuto presente che per ogni t fissato in $[t_0, t_1]$

$$P = x(P_0, t) \quad \Longleftrightarrow \quad P_0 = x^{-1}(P, t).$$

Viveversa, sia data una grandezza scalare rappresentata mediante il campo spaziale $f = f(P, t)$, definito in \mathcal{S} . Vogliamo dedurne la rappresentazione materiale; questa è il campo materiale che denotiamo con $f_m = f_m(P_0, t)$, definito in \mathcal{S}_0 , che si ottiene nel modo seguente:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad f_m(P_0, t) = f(x(P_0, t), t).$$

Ciò che abbiamo visto per una grandezza scalare si estende a grandezze vettoriali e tensoriali.

E' facile dimostrare la seguente

Proposizione 2.1. *Dato un corpo continuo in moto, se f è un campo spaziale e g è un campo materiale, si ha:*

$$(f_m)_s = f \quad e \quad (g_s)_m = g.$$

Definizione 2.12. *Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze che intervengono sono rappresentate dal punto di vista materiale si dice che il moto è studiato dal punto di vista materiale (o lagrangiano).*

Se nello studio del moto di un corpo continuo le grandezze sono rappresentate dal punto di vista spaziale si dice che il moto è studiato dal punto di vista spaziale (o euleriano).

Quando si studia il moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale si segue il moto di ogni particella, mentre quando lo si studia dal punto di vista spaziale si osserva come variano le grandezze legate al moto al trascorrere del tempo in punti fissati della regione dello spazio geometrico in cui il corpo si muove.

E' evidente che se si affrontano problemi tecnici ed ingegneristici si segue il punto di vista spaziale.

Tenendo presente la differenza tra i due punti di vista risultano naturali le due seguenti definizioni.

Definizione 2.13. *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale i tre tipi di equazioni che abbiamo già considerato in precedenza:*

$$\begin{aligned} P &= x(P_0, t) & \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ P - O &= \vec{x}(P_0, t) & \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ x_i &= x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \end{aligned}$$

Definizione 2.14. *Si chiamano equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale i tre tipi seguenti di equazioni:*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}(P, t) & \forall (P, t) \in \mathcal{S} \\ \vec{v} &= \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}) \\ v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 & \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Rileviamo che la (10.1.1)₁ fornisce il campo spaziale della velocità, cioè ci dice qual è la velocità all'istante t della particella che in tale istante occupa la posizione P , la (10.1.1)₂ ci dà la rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità ed infine le (10.1.1)₃ forniscono le componenti della rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità.

Vediamo ora come sia possibile passare dalle equazioni del moto di un corpo continuo dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale e viceversa.

Consideriamo dapprima il passaggio dalle equazioni dal punto di vista materiale a quelle dal punto di vista spaziale.

Partiamo dall'equazione vettoriale:

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Se deriviamo rispetto al tempo il campo vettoriale $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$, otteniamo il campo materiale della velocità:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di questo possiamo poi dare la rappresentazione spaziale, così come abbiamo visto in precedenza:

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Potremmo anche partire dalle tre equazioni scalari:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0). \quad (2.2.8)$$

Derivando rispetto al tempo le tre funzioni $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$, otteniamo le tre componenti della rappresentazione analitica del campo materiale della velocità:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t).$$

D'altra parte, come sappiamo, invertendo le (2.2.8), possiamo ricavare le x_{0i} in funzione di x_1, x_2, x_3, t e sostituendo tali espressioni nelle \dot{x}_i , arriviamo alle equazioni:

$$\forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$$

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{x}_i(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t).$$

Mostriamo ora come sia possibile passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$.

Rivolgiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante t_0 si trova in P_0 e denotiamo con $P(t)$ la posizione che tale particella occupa all'istante $t \in [t_0, t_1]$ per cui $P(t) = x(P_0, t)$ e $P(t_0) = P_0$.

Essendo il moto descritto dal punto di vista spaziale, è noto il campo spaziale della velocità. Se allora la particella all'istante t si trova in P , la sua velocità, data da $\frac{dP}{dt}$, è uguale a $\vec{v}(P, t)$.

Deduciamo perciò che la curva $P(t)$ che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Il sistema è in forma normale e supponiamo che i secondi membri delle tre equazioni soddisfino alle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy relativo all'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Allora per risolvere il problema di Cauchy (2.3.5) ci procuriamo dapprima la soluzione generale del sistema che, come è noto, è una terna di funzioni che dipende da tre costanti arbitrarie C_1, C_2, C_3 :

$$x_i = \hat{x}_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Determiniamo poi i valori che devono essere attribuiti alle tre costanti in modo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali; ovviamente tali valori dipendono dai dati iniziali x_{01}, x_{02}, x_{03} . Se nella soluzione generale sostituiamo alle tre costanti i valori trovati, otteniamo la soluzione cercata che risulta dipendere oltre che da t anche da x_{01}, x_{02}, x_{03} :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.2.11)$$

Le (2.3.6) sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale t_0 occupa la posizione P_0 avente come terna delle sue coordinate cartesiane (x_{01}, x_{02}, x_{03}) . Se facciamo variare (x_{01}, x_{02}, x_{03}) in $\xi(\mathcal{S}_0)$, determiniamo le equazioni cartesiane del moto di tutte le particelle, ossia otteniamo le equazioni:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

Sia dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Consideriamo un campo materiale che per semplicità assumiamo scalare:

$$g = g(P_0, t)$$

definito in \mathcal{S}_0 o in un suo sottoinsieme.

Definizione 2.15. *Fissato P_0 in \mathcal{S}_0 , supponiamo che in corrispondenza di un certo istante $t \in [t_0, t_1]$ esista la derivata di g fatta rispetto al tempo. Tale derivata prende il nome di derivata materiale fatta rispetto al tempo del campo materiale g in (P_0, t) e viene denotata nel modo seguente:*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(P_0, t) =: \dot{g}(P_0, t).$$

Dunque la derivata materiale rispetto al tempo di g in (P_0, t) è la derivata rispetto al tempo del campo materiale calcolata all'istante t fissando la particella che occupa la posizione P_0 nella configurazione di riferimento.

Se $\dot{g}(P_0, t)$ è definita $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ (oppure in un suo sottoinsieme), abbiamo un nuovo campo materiale scalare definito in \mathcal{S}_0 (o in un suo sottoinsieme), il campo della derivata materiale di g fatta rispetto al tempo:

$$\dot{g} = \dot{g}(P_0, t).$$

Definizione 2.16. Fissato $t \in [t_0, t_1]$, supponiamo che in corrispondenza di un certo $P_0 \in S_0$ il campo g ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di *gradiente materiale di g in (P_0, t)* e viene denotato con $\text{grad}_m g(P_0, t)$.

Se il gradiente materiale di g esiste per ogni $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo materiale vettoriale, il campo del gradiente materiale di g , cioè:

$$\text{grad}_m g = \text{grad}_m g(P_0, t).$$

Le due definizioni date per un campo scalare materiale sussistono ovviamente anche per campi vettoriali o tensoriali materiali.

A partire dal campo del gradiente materiale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicati a tale campo che vengono detti *operatori differenziali materiali*.

Ovviamente se il campo materiale è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate materiali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti materiali ed altri operatori differenziali materiali di ordine 2, 3,

Sia ora dato un campo spaziale, che per semplicità supponiamo scalare, definito in \mathcal{S} (oppure in un suo sottoinsieme):

$$f = f(P, t).$$

Definizione 2.17. Fissato P in $S(t)$ con $t \in [t_0, t_1]$, supponiamo che in corrispondenza dell'istante t esista la derivata di f rispetto al tempo. Tale derivata viene detta *derivata locale di f fatta rispetto al tempo in (P, t)* ed è denotata nel modo seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P, t) =: f'(P, t).$$

Tale derivata è detta locale perché è effettuata mettendosi in un punto fissato appartenente alla regione in cui si muove il corpo continuo senza tenere conto del fatto che al trascorrere del tempo tale punto è occupato da particelle diverse.

Se la derivata locale di f rispetto al tempo esiste per ogni $(P, t) \in \mathcal{S}$ (o in suo sottoinsieme), è definito in \mathcal{S} (o in un suo sottoinsieme) un nuovo campo spaziale scalare, il campo della derivata locale di f fatta rispetto al tempo:

$$f' = f'(P, t).$$

Definizione 2.18. Fissato $t \in [t_0, t_1]$, supponiamo che in corrispondenza di un certo $P \in S$ il campo f ammetta gradiente. Tale gradiente prende il nome di *gradiente spaziale di f in (P, t)* e viene denotato con $\text{grad} f(P, t)$.

Se il gradiente spaziale di f esiste per ogni $(P, t) \in \mathcal{S}$ (oppure in un suo sottoinsieme), è ivi definito un campo spaziale vettoriale, il campo del gradiente spaziale di f , cioè:

$$\text{grad } f = \text{grad } f(P, t).$$

Le definizioni date per un campo scalare spaziale si estendono ovviamente anche a campi vettoriali e tensoriali spaziali.

A partire dal campo del gradiente spaziale applicato ad un campo vettoriale o tensoriale spaziale è possibile costruire altri operatori differenziali del primo ordine applicabili a tale campo che vengono detti *operatori differenziali spaziali*.

Ovviamente se il campo spaziale considerato è sufficientemente regolare, potremmo considerarne derivate locali rispetto al tempo di ordine 2, 3, ... e gradienti spaziali ed altri operatori differenziali spaziali di ordine 2, 3,

Sussiste la seguente

Proposizione 2.2. *Dato un corpo continuo in moto regolare, il campo spaziale $f = f(P, t)$ è di classe \mathcal{C}^1 in \mathcal{S} se e solo se la sua rappresentazione materiale $f_m = f_m(P_0, t)$ è di classe \mathcal{C}^1 in \mathcal{S}_0 .*

Ovviamente la proposizione continua a valere se sostituiamo \mathcal{C}^1 con \mathcal{C}^2 , oppure \mathcal{S} con un suo sottoinsieme e \mathcal{S}_0 con il sottoinsieme corrispondente e per campi vettoriali e tensoriali.

Grazie alla proposizione 2.2, deduciamo, che se un corpo continuo si muove di moto regolare, poiché il campo materiale $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$, allora $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$.

Noi abbiamo dato la definizione di derivata materiale rispetto al tempo per un campo materiale, ma in alcune situazioni può essere conveniente determinare la derivata rispetto al tempo di un campo spaziale non tenendo fissi i punti nella regione del moto, come avviene nella derivata locale rispetto al tempo, ma tenendo fisse le particelle, ossia seguendo ogni particella nel suo moto.

Definizione 2.19. *Dato il campo spaziale scalare f , definiamo derivata materiale di f rispetto al tempo nel modo seguente:*

$$\dot{f} = ((f_m)')_s.$$

Dunque, presi $(P, t) \in \mathcal{S}$ e $(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ in modo tale che $P_0 = x^{-1}(P, t)$, abbiamo:

$$\dot{f}(P, t) = \left[\frac{\partial f_m}{\partial t}(P_0, t) \right]_{P_0 = x^{-1}(P, t)}.$$

Analogha definizione sussiste per un campo spaziale vettoriale o tensoriale.

Proposizione 2.3. *La derivata materiale rispetto al tempo commuta con la rappresentazione materiale e spaziale, ossia, dati il campo spaziale f e il campo materiale g , si ha:*

$$(\dot{f})_m = (f_m)^\cdot \quad (\dot{g})_s = (g_s)^\cdot.$$

Per tale motivo poniamo:

$$(\dot{f})_m = (f_m)^\cdot =: \dot{f}_m \quad (\dot{g})_s = (g_s)^\cdot =: \dot{g}_s.$$

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, il legame che sussiste tra derivata materiale e derivata locale rispetto al tempo per campi spaziali sufficientemente regolari.

Proposizione 2.4. *Dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo spaziale scalare f di classe \mathcal{C}^1 in \mathcal{S} (o in un sottoinsieme di \mathcal{S}), si ha: $\forall(P, t) \in \mathcal{S}$ (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)*

$$\dot{f}(P, t) = f'(P, t) + \text{grad } f(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Osservazione 2.5. Procedendo per componenti si dimostra che la relazione della proposizione precedente vale anche per campi vettoriali e tensoriali.

In particolare, dato un corpo continuo in moto regolare e considerato il campo spaziale vettoriale $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$ di classe \mathcal{C}^1 in \mathcal{S} (o in un sottoinsieme di \mathcal{S}), si ha:

$\forall(P, t) \in \mathcal{S}$ (o appartenente al sottoinsieme detto sopra)

$$\dot{\vec{u}}(P, t) = \vec{u}'(P, t) + \text{grad } \vec{u}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

In componenti la relazione scritta sopra fornisce:

$$\dot{u}_i = u'_i + u_{i,j} v_j.$$

Introduciamo ora una nuova definizione.

Sia \mathcal{C} un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

Definizione 2.20. *Definiamo accelerazione all'istante t della particella X del corpo continuo che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 la derivata seconda rispetto al tempo del campo vettoriale \vec{x} in (P_0, t) :*

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}(P_0, t) =: \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Poiché $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$, è definita l'accelerazione di ogni particella ad ogni istante appartenente all'intervallo di moto.

Resta così definito in \mathcal{S}_0 il campo materiale:

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Di tale campo possiamo dare la rappresentazione spaziale che denotiamo con $\vec{a} = \vec{a}(P, t)$. Precisamente si ha:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \ddot{\vec{x}}(x^{-1}(P, t), t).$$

Dunque:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})^\cdot)_s.$$

Ma poichè la rappresentazione spaziale commuta con la derivata materiale, deduciamo:

$$\vec{a} = ((\dot{\vec{x}})^\cdot)_s = ((\dot{\vec{x}}_s)^\cdot) = \dot{\vec{v}}.$$

L'accelerazione spaziale perciò coincide con la derivata materiale della velocità spaziale e di conseguenza è esprimibile nella forma:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \vec{a}(P, t) = \vec{v}'(P, t) + \text{grad } \vec{v}(P, t) \cdot \vec{v}(P, t).$$

Enunciamo, senza dimostrarlo, un teorema che utilizzeremo spesso, il **teorema del trasporto**.

Teorema 2.1. *Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, sia $f = f(P, t)$ una campo spaziale scalare di classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{S})$. Allora per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* , indicata con $S^*(t)$ la regione occupata da \mathcal{C}^* all'istante t , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \left[\dot{f}(P, t) + f(P, t) \text{div } \vec{v}(P, t) \right] dS.$$

Il teorema sussiste anche per campi spaziali vettoriali e tensoriali.

Stabiliamo ora un lemma che, come vedremo, giocherà un ruolo importante nel seguito.

Lemma 2.1. *Sia $f = f(P)$ un campo scalare continuo in un aperto S dello spazio geometrico. Se*

$$\int_A f(P) dS = 0 \quad \forall A \text{ sottoinsieme aperto di } S,$$

allora

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in S.$$

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $\exists \bar{P} \in S$ tale che $f(\bar{P}) \neq 0$. Assumiamo, ad esempio, $f(\bar{P}) > 0$.

Essendo il campo f continuo in S , per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $U(\bar{P})$ di \bar{P} tale che

$$\forall P \in U(\bar{P}) \text{ si ha } f(P) > 0.$$

Ma allora

$$\int_{U(\bar{P})} f(P) dS > 0$$

che è in contraddizione con l'ipotesi cui soddisfa il campo f .

Dunque $f(P) = 0 \quad \forall P \in S$ c.v.d.

Il lemma sussiste anche se si considera un campo vettoriale o tensoriale oppure se S è la chiusura di un aperto e sono nulli tutti gli integrali del campo preso in considerazione estesi a tutti i sottoinsiemi di S chiusura di un aperto.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di moto incomprimibile.

Definizione 2.21. *Dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, sia \mathcal{C}^* un suo qualsiasi sottocorpo occupante all'istante t la regione $S^*(t)$ di volume $V^*(t) = \int_{S^*(t)} dS$. Diciamo che in $[t_0, t_1]$ il moto di \mathcal{C} è incomprimibile se $\forall \mathcal{C}^*$ si ha:*

$$V^*(t) = \text{costante} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Perciò in un moto incomprimibile, al trascorrere del tempo, può cambiare la forma della regione occupata da ogni sottocorpo, ma non ne cambia il volume.

Definizione 2.22. *Diciamo che un corpo continuo è incomprimibile se gli sono consentiti solo moti incomprimibili.*

E' evidente che ogni corpo continuo rigido è incomprimibile.

Determiniamo la condizione di incomprimibilità per il moto di un corpo continuo dal punto di vista spaziale.

Teorema 2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto regolare di un corpo continuo sia incomprimibile nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è che:*

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ in } \mathcal{S}.$$

Dimostrazione

Dimostriamo la condizione necessaria. Per ipotesi il moto è incomprimibile e

dobbiamo mostrare che $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ in \mathcal{S} .

Per definizione di moto incomprimibile, abbiamo che

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{dV^*}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ossia

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Grazie al teorema del trasporto possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} dS = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS$$

e quindi:

$$\forall \mathcal{C}^* \quad \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per l'arbitrarietà di \mathcal{C}^* si ha:

$$\int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{v} dS = 0 \quad \forall S^*(t), \text{ chiusura di un aperto } \subset S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Ma, essendo il moto regolare,

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \operatorname{div} \vec{v} \in \mathcal{C}(S(t)),$$

poiché $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$.

Allora, sfruttando il lemma 2.1, concludiamo che

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{ossia in } \mathcal{S},$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Per quanto riguarda la dimostrazione della condizione sufficiente basta ripercorrere il cammino inverso tenendo presente che per ipotesi

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e che dobbiamo provare che il moto del corpo continuo è incomprimibile.

Definizione 2.23. *Un campo vettoriale a divergenza nulla in una regione S è detto solenoidale in S .*

Dunque se un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, il campo spaziale della velocità è solenoidale in $S(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$.

Esercizi proposti

1) Dato il corpo continuo \mathcal{C} occupante tutto lo spazio, le sue equazioni di moto nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$ dal punto di vista materiale siano le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} e^t + x_{02} e^{-t} \\ x_2 = x_{02} e^t \\ x_3 = x_{03} e^{-t}. \end{cases} \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

Si chiede

- di provare che il moto è regolare;
- di determinare i campi materiali della velocità e dell'accelerazione;
- di dedurre le equazioni del moto di \mathcal{C} dal punto di vista spaziale.

2) Dato il corpo continuo \mathcal{C} occupante tutto lo spazio, le sue equazioni di moto nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$ dal punto di vista spaziale siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_1 = x_1 - x_2 \\ v_2 = 2x_1 - x_2 \\ v_3 = \cos t. \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

Si chiede

- di provare che il moto è incomprimibile;
- di determinare il campo spaziale dell'accelerazione;
- di calcolare la derivata materiale rispetto al tempo del campo scalare spaziale $f = f(P, t)$ definito in $\mathcal{E} \times [0, +\infty)$ avente la seguente rappresentazione analitica:

$$f^0(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_3 \cos t \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty);$$

- di dedurre le equazioni del moto di \mathcal{C} dal punto di vista materiale e provare che il moto è regolare.

2.3 Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario.

Sia dato un corpo continuo in moto rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. All'osservatore sia associato il riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$ e denotiamo con S_0 la regione occupata dal corpo nella configurazione di riferimento.

Come sappiamo, dal punto di vista materiale il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti:

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (2.3.1)$$

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (2.3.2)$$

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (2.3.3)$$

Nel seguito supporremo sempre che il moto del corpo continuo sia regolare.

Consideriamo la particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 . Fissata tale particella, l'applicazione

$$\begin{aligned} x(P_0, \cdot) : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathcal{E} \\ t &\mapsto P = x(P_0, t) \end{aligned}$$

è la curva che ne descrive il moto.

Definizione 2.24. *Il sostegno della curva $x(P_0, \cdot)$ è detta traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in P_0 .*

Se (x_{01}, x_{02}, x_{03}) è la terna delle coordinate di P_0 , allora le (2.3.3) sono le equazioni cartesiane parametriche con parametro t della traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in P_0 .

Se il moto del corpo continuo è descritto dal punto di vista materiale le traiettorie delle particelle sono dunque note.

Supponiamo ora che il moto sia descritto dal punto di vista spaziale. Indichiamo con $S(t)$ la regione occupata dal continuo all'istante t con $t \in [t_0, t_1]$. Dal punto di vista spaziale il moto è descritto in uno dei tre modi seguenti

- $\vec{v} = \vec{v}(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}$
- $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$
- $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S})$.

Per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ e rivolgiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante t_0 si trova in P_0 e denotiamo con $P(t)$ la posizione che tale particella occupa all'istante $t \in [t_0, t_1]$ per cui $P(t) = x(P_0, t)$ e $P(t_0) = P_0$.

La curva $P(t)$ che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Come abbiamo già osservato nel precedente paragrafo, la soluzione del problema è data dalla terna di funzioni

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (2.3.6)$$

che sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale t_0 occupa la posizione P_0 avente come terna delle sue coordinate cartesiane (x_{01}, x_{02}, x_{03}) e quindi rappresentano anche le equazioni parametriche con parametro t della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare (x_{01}, x_{02}, x_{03}) in $\xi(S_0)$, determiniamo le traiettorie di tutte le particelle.

Introduciamo ora una nuova definizione.

Definizione 2.25. *Sia dato un corpo continuo in moto regolare rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ ed il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale.*

Fissato t in $[t_0, t_1]$, chiamiamo linea di flusso all'istante t il sostegno di ogni curva $P(\lambda)$ che sia soluzione massimale dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t). \quad (2.3.7)$$

È importante osservare che nell'equazione differenziale (2.3.7) la variabile indipendente è λ , mentre t assume un valore fissato.

Ovviamente l'equazione vettoriale (2.3.7) è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

le cui incognite sono le tre funzioni: $x_1 = x_1(\lambda)$, $x_2 = x_2(\lambda)$, $x_3 = x_3(\lambda)$.

Osservazione 2.6. Se teniamo presente che, essendo il moto regolare, il campo $\vec{v}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ per ogni t fissato in $[t_0, t_1]$, grazie a noti teoremi relativi all'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per sistemi differenziali ordinari del I ordine in forma normale, concludiamo che, fissato $t \in [t_0, t_1]$, per ogni $P \in S(t)$ passa una ed una sola linea di flusso.

Sia γ_t una linea di flusso all'istante t ; ovviamente $\gamma_t \subset S(t)$. Sia poi $P \in \gamma_t$ per cui $P = P(\lambda)$ per un dato valore di λ . Per definizione di linea di flusso:

$$\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) = \vec{v}(P(\lambda), t). \quad (2.3.8)$$

Supponiamo $\vec{v}(P(\lambda), t) \neq \vec{0}$ per cui anche $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) \neq \vec{0}$.

Come è ben noto, $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda)$ è un vettore direttore per la retta tangente a γ_t in $P(\lambda)$. Deduciamo allora che in tutti quei punti di γ_t in corrispondenza dei quali il campo della velocità all'istante t non è nullo la retta tangente è parallela al campo stesso.

Osserviamo che ovviamente traiettorie e linee di flusso in generale non sono coincidenti, poiché le traiettorie sono relative all'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, mentre le linee di flusso sono relative a singoli istanti e variano in generale da istante a istante.

Vediamo un esempio.

Esempio 2.1.

Determiniamo traiettorie e linee di flusso per un corpo continuo, occupante tutto lo spazio, in moto nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$, le cui equazioni di moto dal punto di vista spaziale siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{x_2}{\tau} \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

dove V e τ sono costanti.

Occupiamoci dapprima delle traiettorie.

Come abbiamo visto, per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale prendendo come configurazione di riferimento quella iniziale, ossia quella assunta dal corpo continuo all'istante $t = 0$.

Consideriamo dunque la particella che all'istante $t = 0$ si trova in $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ e troviamo le equazioni cartesiane del suo moto.

A tal fine dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (2.3.5) che nel nostro caso si presenta nella forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_i(0) = x_{0i} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Come si vede immediatamente, il sistema differenziale è costituito da tre equazioni disaccoppiate e perciò possiamo risolvere separatamente i tre problemi di Cauchy che si ottengono associando ad ogni equazione la relativa condizione iniziale.

Consideriamo dapprima il problema differenziale con incognita x_1 :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ x_1(0) = x_{01}. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

L'equazione differenziale del problema (2.3.9) è del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea e possiamo scriverla nella forma

$$\frac{dx_1}{dt} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}.$$

Per un noto risultato di Analisi, la sua soluzione generale è data dalla somma della soluzione generale \hat{x}_1 dell'omogenea associata e di una soluzione particolare x_1^* dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da:

$$\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}},$$

dove C_1 è una costante arbitraria.

Per determinare x_1^* , teniamo presente che il termine a secondo membro dell'equazione completa è un polinomio di I grado in t ; siamo allora ricondotti a cercare x_1^* della forma:

$$x_1^* = At + B,$$

dove A, B sono costanti da determinarsi imponendo che x_1^* sia soluzione dell'equazione.

Poiché $\frac{dx_1^*}{dt} = A$, sostituendo nell'equazione completa, otteniamo:

$$A - \frac{At + B}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \quad \forall t > 0, \quad (2.3.10)$$

ossia

$$-At + A\tau - B = -Vt. \quad (2.3.11)$$

Dalla (2.3.11) si deduce

$$A = \frac{B}{\tau}, \quad A = V \quad \implies \quad B = V\tau.$$

Otteniamo perciò che la soluzione generale dell'equazione del problema (2.3.9) ha la seguente forma:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Per determinare la costante C_1 imponiamo la condizione iniziale:

$$x_{01} = C_1 + V\tau,$$

da cui si ottiene

$$C_1 = x_{01} - V\tau.$$

Perciò la soluzione del problema (2.3.9) è

$$x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy relativo a x_2 :

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ x_2(0) = x_{02}. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

L'equazione del problema è lineare, a coefficienti costanti ed omogenea. La sua soluzione generale è

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove C_2 è una costante arbitraria che si determina imponendo la condizione iniziale e precisamente si ha

$$C_2 = x_{02}.$$

Dunque la soluzione del problema (2.3.12) è

$$x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Infine il problema di Cauchy relativo a x_3

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_3(0) = x_{03} \end{cases}$$

ha la soluzione

$$x_3 = x_{03}.$$

Otteniamo dunque che le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale occupa la posizione P_0 di coordinate (x_{01}, x_{02}, x_{03}) sono

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau) \\ x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ x_3 = x_{03}. \end{cases} \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (2.3.13)$$

Tali equazioni sono anche le equazioni cartesiane parametriche con parametro t della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare (x_{01}, x_{02}, x_{03}) in \mathbb{R}^3 , le (2.3.13) rappresentano le equazioni del moto del corpo continuo dal punto di vista spaziale ed anche le equazioni cartesiane parametriche delle traiettorie delle particelle con parametro t .

In primo luogo osserviamo che le traiettorie sono cammini piani che giacciono su piani $x_3 = \text{costante}$.

Se consideriamo una qualsiasi particella che all'istante $t = 0$ occupa la posizione P_0 avente $x_{02} = 0$, dalla seconda equazione delle (2.3.13) vediamo che la posizione da essa occupata ha nulla la seconda coordinata ad ogni istante $t > 0$. Dunque ogni particella di tale tipo ha come traiettoria un cammino rettilineo parallelo all'asse Ox_1 .

Consideriamo ora quelle particelle per le quali si abbia $x_{02} \neq 0$. Sempre dalla seconda delle (2.3.13) vediamo che per tali particelle la coordinata $x_2 \neq 0$ per ogni istante $t > 0$ ed ha sempre lo stesso segno di x_{02} . In tal caso è possibile eliminare il parametro t dalle equazioni (2.3.13). Infatti dalla seconda deduciamo

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{x_2}{x_{02}} \implies e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{x_{02}}{x_2} \implies t = \tau \ln \frac{x_{02}}{x_2}.$$

Se sostituiamo nella prima equazione delle (2.3.13) otteniamo le equazioni cartesiane della traiettoria della particella che all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ con $x_{02} \neq 0$:

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) \frac{x_{02}}{x_2} + V\tau(1 + \ln \frac{x_{02}}{x_2}) \\ x_3 = x_{03}. \end{cases}$$

Vediamo ora di determinare le linee di flusso ad un istante fissato $t \in [0, +\infty)$. In primo luogo dobbiamo procurarci le curve $P(\lambda)$ che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

le cui incognite sono le tre funzioni: $x_1 = x_1(\lambda)$, $x_2 = x_2(\lambda)$, $x_3 = x_3(\lambda)$.

Non abbiamo un problema differenziale di Cauchy poiché al sistema non sono associate condizioni iniziali.

Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0, \end{cases}$$

dove ricordiamo che t è un istante fissato e la variabile indipendente è λ .

Il sistema (2.3.14) è costituito da tre equazioni disaccoppiate che possiamo risolvere separatamente.

Occupiamoci dapprima dell'equazione nell'incognita $x_1(\lambda)$ che scriviamo come

$$\frac{dx_1}{d\lambda} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}. \quad (2.3.14)$$

Si tratta di un'equazione differenziale del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, con secondo membro costante (t è un valore fissato).

La soluzione generale dell'omogenea associata è $\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}}$ con C_1 costante arbitraria, mentre possiamo prendere come soluzione particolare dell'equazione completa: $x_1^* = A$ con A costante da determinarsi imponendo che x_1^* sia soluzione dell'equazione. Si ottiene:

$$-\frac{A}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \quad \implies \quad A = Vt.$$

La soluzione generale della (2.3.14) è perciò:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \quad \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Per quanto riguarda la seconda equazione delle (2.3.14), la sua soluzione generale è data da

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \quad \text{con } C_2 = \text{costante arbitraria, } \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Infine la soluzione generale dell'ultima delle (2.3.14) è

$$x_3 = C_3 \quad \text{con } C_3 = \text{costante arbitraria.}$$

In conclusione le equazioni cartesiane parametriche con parametro λ delle linee di flusso all'istante t fissato sono

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \\ x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \\ x_3 = C_3. \end{cases} \quad \forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

In corrispondenza di ogni terna $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ otteniamo una singola linea di flusso.

Osserviamo che le linee di flusso ad ogni istante sono cammini piani.

Inoltre, come si vede dalla seconda delle (2.3.15), le linee di flusso corrispondenti a $C_2 = 0$ e $C_1 \neq 0$ sono cammini rettilinei paralleli all'asse Ox_1 . Se poi è nullo anche C_1 la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Se $C_2 \neq 0$ e $C_1 = 0$, le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli all'asse Ox_2 .

Infine nel caso $C_1, C_2 \neq 0$ possiamo eliminare dalle (2.3.15) il parametro λ utilizzando la seconda equazione parametrica:

$$e^{\frac{\lambda}{\tau}} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima, deduciamo:

$$x_1 - Vt = C_1 \frac{C_2}{x_2} \quad \implies (x_1 - Vt) x_2 = \text{costante}.$$

Se poi teniamo presente che $x_3 = C_3$, concludiamo che le linee di flusso ad ogni istante t fissato corrispondenti a $C_1, C_2 \neq 0$ sono iperboli che giacciono su piani $x_3 = \text{costante}$, la cui posizione varia al variare di t .

Introduciamo ora altre definizioni.

Definizione 2.26. *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale. Diremo che il moto del corpo continuo è stazionario in $[t_0, t_1]$ dal punto di vista cinematico se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- 1) $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ con $S =$ regione fissa di \mathcal{E} ;
 2) $\vec{v} = \vec{v}(P)$, ossia il campo spaziale della velocità è indipendente da t .

Ci proponiamo di dimostrare la seguente

Proposizione 2.5. *Se in un dato intervallo di tempo il moto di un corpo continuo è stazionario, traiettorie e linee di flusso coincidono.*

Dimostrazione

Ricordiamo che le traiettorie sono il sostegno delle curve $P(t)$ soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t).$$

Ma, per definizione di moto stazionario, il campo della velocità è indipendente da t , per cui l'equazione scritta sopra assume la forma:

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P). \quad (2.3.15)$$

D'altra parte, le linee di flusso ad un dato istante t sono il sostegno delle curve $P(\lambda)$ soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che, essendo il moto stazionario, si riduce a:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P). \quad (2.3.16)$$

Allora in primo luogo otteniamo che le linee di flusso, nel caso di moto stazionario, non variano al trascorrere del tempo.

Inoltre è immediato notare che le equazioni (2.3.15) e (2.3.16) sono della stessa forma con l'unica differenza che nella prima la variabile indipendente è t , mentre nella seconda è λ . Otteniamo allora che traiettorie e linee di flusso coincidono, come ci proponevamo di dimostrare.

Dunque se il moto è stazionario ogni traiettoria è linea di flusso e viceversa.

Definizione 2.27. *Dato un corpo continuo il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, diremo che un campo spaziale (scalare, vettoriale o tensoriale) legato al moto del continuo è stazionario se non dipende dal tempo.*

Ad esempio un campo scalare spaziale, legato al moto del corpo continuo, stazionario è della forma $f = f(P)$.

Si osservi che la derivata locale rispetto al tempo di un campo stazionario è nulla in ogni punto ed in ogni istante.

Dimostriamo il seguente

Teorema 2.3. *Sia dato un corpo continuo in moto stazionario dal punto di vista cinematico e sia f un campo scalare stazionario di classe $C^1(S)$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- 1) $\dot{f} = 0$ in S
- 2) f è costante lungo ogni linea di flusso
- 3) $\text{grad } f \cdot \vec{v} = 0$ in S .

Dimostrazione

$$1) \implies 2).$$

Se $\dot{f} = 0$ in S , tenendo presente la definizione di derivata materiale rispetto al tempo di un campo spaziale, concludiamo che f è costante per ogni particella che seguiamo nel suo moto e dunque f è costante lungo ogni traiettoria. Ma, essendo il moto stazionario, ogni traiettoria è anche linea di flusso e quindi f è costante lungo ogni linea di flusso.

$$2) \implies 1).$$

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

$$1) \implies 3).$$

Per ipotesi

$$\dot{f} = f' + \text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Ma, essendo f un campo stazionario, abbiamo $f' = 0$ in S per cui la relazione precedente si riduce a

$$\text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

$$3) \implies 1).$$

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

Le restanti implicazioni sono conseguenza di quelle dimostrate.

2.4 Teorema del trasporto della circolazione, moti piani

Sia dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ rispetto ad un dato osservatore e indichiamo con S_0 la regione occupata nella configurazione di riferimento.

Come sappiamo, il moto, dal punto di vista materiale, può essere descritto mediante l'equazione

$$P = x(P_0, t) \quad \text{con } (P_0, t) \in S_0.$$

Consideriamo una curva $\psi_0 = \psi_0(\lambda)$ con $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, avente il sostegno γ_0 contenuto in S_0 :

$$\begin{aligned} \psi_0 : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S_0 \\ \lambda &\mapsto P_0 = \psi_0(\lambda). \end{aligned}$$

Inoltre siano

$$x_{0i} = x_{0i}^*(\lambda) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad i = 1, 2, 3$$

le equazioni cartesiane parametriche della curva.

Se consideriamo il corpo continuo nella configurazione di riferimento, allora tutti i punti di γ_0 sono occupati da particelle del continuo.

Fissiamo un istante $t \in [t_0, t_1]$ e consideriamo la curva

$$\begin{aligned} \psi_t : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S(t) \\ \lambda &\mapsto P = x(\psi_0(\lambda), t), \end{aligned}$$

dove $S(t)$ è la regione occupata all'istante t dal corpo continuo nel suo moto. Se indichiamo con γ_t il sostegno di ψ_t (ovviamente $\gamma_t \in S(t)$), i punti di γ_t sono occupati all'istante t da quelle stesse particelle che occupano i punti di γ_0 quando il corpo continuo si trova nella configurazione di riferimento.

Al variare di t nell'intervallo di moto $[t_0, t_1]$ il sostegno γ_t della curva ψ_t segue il corpo continuo nel suo moto. Allora la famiglia di curve $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ prende il nome di *curva materiale del corpo continuo*.

D'ora poi per ragioni di brevità indicheremo con ψ la curva materiale $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ e chiameremo ψ_t *posizione della curva materiale ψ all'istante t* .

E' immediato scrivere le equazioni cartesiane parametriche della curva ψ_t .

Infatti, poiché

$$\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1],$$

le equazioni sono le seguenti:

$$x_i = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel seguito ci saranno utili le seguenti posizioni

$$\begin{aligned} x_i^*(\lambda, t) &= x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3, \\ \vec{r}^*(\lambda, t) &= x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Definizione 2.28. Diremo che la curva materiale ψ è chiusa se $\forall t \in [t_0, t_1]$ le curve ψ_t sono chiuse, ossia se

$$\psi_t(\lambda_1) = \psi_t(\lambda_2) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

E' immediato dimostrare che la curva materiale ψ è chiusa se lo è ψ_0 .

Definizione 2.29. La curva materiale ψ è regolare se le sue posizioni ψ_t sono regolari $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Richiamiamo la definizione di curva regolare applicata a ψ_t . Poiché $\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$ con $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, t fissato $\in [t_0, t_1]$, avremo che, preso un punto $P \in \gamma_t$, il suo vettore posizione rispetto all'origine del riferimento associato all'osservatore è dato da:

$$P - O = \vec{x}(\psi_0(\lambda), t) = x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i = \vec{r}^*(\lambda, t) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1].$$

Allora la curva ψ_t è regolare se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \vec{r}^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2])$$

o equivalentemente se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad x_i^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2]), \quad i = 1, 2, 3$$

ed inoltre se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\cdot, t) := \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \lambda}(\cdot, t) \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2).$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

Proposizione 2.6. Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva ψ_0 è regolare, allora la curva materiale ψ , definita a partire da ψ_0 , è regolare.

Supponiamo di essere nelle ipotesi della proposizione enunciata sopra. Allora sussiste il

Lemma 2.2. *Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva ψ_0 è regolare, allora*

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t)$$

dove

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial \lambda \partial t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial t \partial \lambda}.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}.$$

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che, poiché le componenti di $\vec{r}^*(\lambda, t)$ sono le funzioni $x_i^*(\lambda, t)$, è sufficiente dimostrare che:

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3$$

e che tali derivate sono uguali.

D'altra parte

$$x_i^*(\lambda, t) = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque le x_i^* sono funzioni composte.

Osserviamo che le funzioni $x_i \in \mathcal{C}^2$ perché il moto è regolare e le $x_{0i}^* \in \mathcal{C}^1$ perché la curva ψ_0 è regolare. Allora per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo che $\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \frac{dx_{0j}^*}{d\lambda}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

(Ovviamente nella relazione precedente abbiamo fatto uso della convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Dal momento che le funzioni $x_i \in \mathcal{C}^2$, vediamo che le funzioni scritte sopra si possono derivare ancora rispetto a t e le funzioni che così si ottengono sono continue. Dunque

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \quad \text{e} \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo anche che $\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\lambda, t) = \dot{x}_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Sempre per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per le proprietà di regolarità delle funzioni x_i e delle funzioni x_{0i}^* , deduciamo che le funzioni scritte sopra sono derivabili rispetto a λ e che le derivate che così si ottengono sono continue. Dunque:

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) \quad e \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Infine, grazie al teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione, possiamo concludere che

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Il lemma è così dimostrato.

Dal lemma e dalla sua dimostrazione discende anche che:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t).$$

Definizione 2.30. *Dato un corpo continuo in moto regolare, siano ψ una curva materiale regolare e $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$ un campo vettoriale (spaziale) tale che $\vec{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$. Definiamo circolazione all'istante $t \in [t_0, t_1]$ del campo vettoriale \vec{u} lungo la curva materiale ψ l'integrale, denotato con $\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP$, dato da :*

$$\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{u}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

In particolare la circolazione del campo della velocità $\vec{v}(P, t)$ lungo una curva materiale ψ verrà chiamata semplicemente circolazione lungo ψ .

Stabiliamo ora il **Teorema del trasporto della circolazione**

Teorema 2.4. *Dato un corpo continuo in moto regolare e presa una qualsiasi curva materiale ψ definita a partire dalla curva ψ_0 chiusa e regolare, si ha:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.4.1)$$

Dimostrazione

Poiché ψ è definita a partire dalla curva ψ_0 chiusa e regolare ed il moto è regolare, risulta anch'essa chiusa e regolare.

Fissiamo un istante $t \in [t_0, t_1]$ e consideriamo la circolazione in tale istante lungo la curva materiale ψ

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{v}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \quad (2.4.2)$$

Vediamo di scrivere in altro modo $\vec{v}(\psi_t(\lambda), t)$ che compare sotto integrale a secondo membro della (2.4.2).

Osserviamo che se $P = x(P_0, t)$ è la posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in P_0 , allora

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Ma nel nostro caso

$$P = \psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$$

per cui

$$\vec{v}(\psi_t(\lambda), t) = \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t).$$

Allora la (2.4.2) si può scrivere come:

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

Se deriviamo rispetto al tempo la relazione scritta sopra e teniamo presente che possiamo derivare sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \ddot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{v}}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \dot{\vec{x}}^2}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_2), t) - \dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_1), t) \right]. \end{aligned}$$

Ma, essendo la curva ψ_0 chiusa, si ha $\psi_0(\lambda_1) = \psi_0(\lambda_2)$, per cui il termine in parentesi quadra nell'ultimo membro della serie di uguaglianze scritte sopra è nullo. Dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) dP \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

che rappresenta la tesi del teorema.

Definizione 2.31. *Dato un corpo continuo in moto regolare, diremo che si conserva la circolazione durante il moto se, presa una qualsiasi curva materiale ψ , definita a partire da una curva ψ_0 chiusa e regolare, si ha :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Enunciamo e proviamo il **Teorema di Kelvin**

Teorema 2.5. *Sia dato un corpo continuo in moto regolare in un dato intervallo di tempo. Se l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare, allora si conserva la circolazione durante il moto.*

Dimostrazione

Per ipotesi $\dot{\vec{v}}$ proviene da un potenziale scalare, cioè $\exists \alpha = \alpha(P, t)$ tale che $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ e

$$\dot{\vec{v}}(P, t) = \text{grad } \alpha(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Presa una qualsiasi curva materiale ψ , definita a partire da una curva ψ_0 chiusa e regolare, per il teorema del trasporto della circolazione, $\forall t \in [t_0, t_1]$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\psi_t} \text{grad } \alpha(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

A questo punto teniamo presente che

$$\alpha(\psi_t(\lambda), t) = \alpha(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t)$$

da cui per il teorema di derivazione delle funzioni composte discende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t) \frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) \\ &= \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Sostituendo il risultato (2.4.4) nella (2.4.3), $\forall t \in [t_0, t_1]$ deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) d\lambda \\ &= \alpha(\psi_t(\lambda_2), t) - \alpha(\psi_t(\lambda_1), t) = 0. \end{aligned}$$

Il teorema di Kelvin risulta così dimostrato.

Introduciamo una nuova definizione.

Definizione 2.32. *Dato un corpo continuo, diremo che si muove di moto piano, con piano direttore Ox_1x_2 , se $\vec{v}(P, t)$ è parallelo a tale piano $\forall (P, t) \in \mathcal{S}$ e la rappresentazione analitica di \vec{v} non dipende da x_3 per cui*

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t) \vec{e}_2.$$

Supponiamo ora di avere un corpo continuo che si muove di moto stazionario (dal punto di vista cinematico) piano con piano direttore Ox_1x_2 .

Allora $\vec{v} = \vec{v}(P)$ ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2) \vec{e}_2$$

con $v_1(x_1, x_2)$ e $v_2(x_1, x_2)$ funzioni definite su un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ che supponiamo essere la chiusura di un aperto.

In particolare assumiamo di avere un corpo continuo incompressibile che si muove di moto stazionario piano.

Nell'ipotesi che le funzioni $v_1, v_2 \in C^1(D)$, la condizione di incompressibilità $\text{div } \vec{v} = 0$ in S implica

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che il moto sia irrotazionale, ossia $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ in S . Essendo il moto piano, l'irrotazionalità del moto implica

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \vec{0},$$

da cui

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

Nelle ipotesi considerate si ha quindi in D

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Facciamo le due seguenti posizioni:

$$\alpha(x_1, x_2) := v_1(x_1, x_2), \quad \beta(x_1, x_2) := -v_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Allora le (2.4.5) assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Le (2.4.6) sono le note **condizioni di Cauchy-Riemann**, che sono condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione

$$g(z) = \alpha(x_1, x_2) + i\beta(x_1, x_2) \quad \text{con } z = x_1 + ix_2, \quad i = \text{unità immaginaria}$$

sia analitica in D .

Possiamo allora enunciare il seguente

Teorema 2.6. *Dato un corpo continuo incomprimibile in moto piano, stazionario e irrotazionale, la funzione a valori complessi $g(z) = v_1(x_1, x_2) - i v_2(x_1, x_2)$, dove v_1 e v_2 sono le componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità e $z = x_1 + ix_2$ è analitica in D . Viceversa ogni funzione analitica in D genera una coppia (v_1, v_2) soluzione in D delle (2.4.5) e dunque v_1 e v_2 possono essere interpretate come le due componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità di un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto stazionario piano con velocità irrotazionale.*

La funzione $g(z)$ è detta *velocità complessa*.

Capitolo 3

Corpi continui deformabili: cinetica, dinamica e termodinamica

3.1 Cinetica.

Nello studio della cinematica non abbiamo fatto intervenire la distribuzione di massa che, per definizione, è associata ad ogni corpo continuo.

Nella cinetica la distribuzione di massa svolge invece un ruolo importante.

In primo luogo facciamo un'ipotesi di notevole rilevanza sulla distribuzione di massa.

Sia \mathcal{C} un corpo continuo e sia \mathcal{A} la sua σ -algebra di Borel su cui è definita la distribuzione di massa m .

Richiediamo che m goda della seguente proprietà.

Ipotesi 3.1. *In corrispondenza di ogni possibile configurazione di \mathcal{C} esiste un campo scalare dipendente da φ : $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$ definito in $S_\varphi = \varphi(\mathcal{C})$, strettamente positivo e integrabile secondo Lebesgue in S_φ tale che:*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad m(A) = \int_{\varphi(A)} \rho_\varphi(P) dS.$$

Definizione 3.1. *Il campo scalare $\rho_\varphi = \rho_\varphi(P)$ è detto densità di massa del corpo continuo nella configurazione φ .*

Osservazione 3.1. Mettiamo in evidenza che, mentre la distribuzione di massa m è indipendente dalle configurazioni possibili del corpo continuo, la densità di massa dipende dalla particolare configurazione considerata.

Supponiamo di avere un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Il moto di \mathcal{C} è una famiglia di configurazioni $\{\varphi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$. In

corrispondenza di ogni configurazione φ_t con $t \in [t_0, t_1]$ è definita la densità di massa:

$$\rho_{\varphi_t} = \rho_{\varphi_t}(P) \quad \forall P \in S(t).$$

Poniamo:

$$\rho_{\varphi_t}(P) =: \rho(P, t) \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Resta così definito in \mathcal{S} il campo spaziale $\rho = \rho(P, t)$, detto *campo spaziale della densità di massa del corpo continuo*.

Su tale campo facciamo la seguente ipotesi di regolarità: $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$.

Ovviamente del campo spaziale della densità di massa possiamo anche dare la rappresentazione materiale $\rho_m = \rho_m(P_0, t)$, definita in \mathcal{S}_0 nel modo seguente:

$$\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad \rho_m(P_0, t) = \rho(x(P_0, t), t).$$

Notiamo che per la proposizione 2.2, essendo per ipotesi $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$, si deduce $\rho_m \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$.

Ci proponiamo ora di dedurre dal punto di vista spaziale l'equazione nota come equazione di continuità della massa, equazione che traduce in forma locale il fatto che la distribuzione di massa è indipendente dalle configurazioni del corpo continuo e quindi da ogni suo moto.

Sia dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e consideriamo un suo qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* . Indichiamo con $S^*(t)$ la regione occupata da \mathcal{C}^* all'istante t durante il moto.

Per quanto visto prima:

$$m(\mathcal{C}^*) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Poiché la massa di \mathcal{C}^* non varia al trascorrere del tempo, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applicando il teorema del trasporto, otteniamo:

$$\int_{S^*(t)} [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v}] dS = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3.1.1)$$

Ma per l'arbitrarietà di \mathcal{C}^* , deduciamo che la relazione (3.1.1) sussiste per ogni $S^*(t)$ chiusura di un aperto contenuto in $S(t)$ qualunque sia t in $[t_0, t_1]$. D'altra parte il campo che appare sotto integrale nella (3.1.1) è continuo in $S(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Allora per il lemma 2.1 concludiamo che

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.1.2)$$

La (3.1.2) è detta **equazione di continuità della massa** dal punto di vista spaziale.

Se il moto del corpo continuo è incomprimibile, abbiamo:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque dall'equazione di continuità (3.1.2) deduciamo:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Corollario 3.1. *(del teorema del trasporto)* Dato il corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, sia f un campo spaziale scalare $\in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$. Allora, preso un qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* occupante all'istante t la regione $S^*(t)$, si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) f(P, t) dS = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \dot{f}(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3.1.3)$$

Nell'ambito della cinetica definiamo ora le principali grandezze cinetiche che useremo in dinamica nello studio del moto di un corpo continuo. Supponiamo di avere un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

Definizione 3.2. *Definiamo quantità di moto all'istante $t \in [t_0, t_1]$ del sottocorpo \mathcal{C}^* la grandezza vettoriale data da:*

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (3.1.4)$$

Analoga definizione sussiste per tutto il corpo continuo \mathcal{C} :

$$\vec{Q}(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (3.1.5)$$

Definizione 3.3. *Il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo $O \in \mathcal{E}$ per un sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è così definito:*

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

Analogamente per l'intero corpo il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo O all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è dato da

$$\vec{K}_O(t) = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS.$$

Definizione 3.4. *Definiamo energia cinetica all'istante $t \in [t_0, t_1]$ del sottocorpo \mathcal{C}^* la grandezza scalare data da:*

$$T^*(t) = \frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (3.1.6)$$

Analogha definizione sussiste per tutto il corpo continuo \mathcal{C} :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS. \quad (3.1.7)$$

Infine concludiamo il paragrafo esaminando i possibili sistemi di forze che assumeremo applicati ad un generico corpo continuo.

A tal fine supporremo di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano in qualsiasi configurazione possibile solo regioni che siano la chiusura di domini regolari.

In primo luogo assumeremo che sul corpo continuo \mathcal{C} agiscano soltanto due tipi di forze:

- forze di massa
- forze di contatto.

Più precisamente sui sistemi di forze agenti sul corpo continuo \mathcal{C} faremo alcune ipotesi.

Ipotesi 3.2. *Per ogni $t \in [t_0, t_1]$ sia definito in $S(t)$ il campo $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$, detto densità delle forze esterne di massa. Noi assumeremo $\vec{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$.*

Definizione 3.5. *Per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* chiamiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo O delle forze esterne di massa agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$, i seguenti integrali:*

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS,$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS.$$

Analoghe definizioni si danno per tutto il corpo \mathcal{C} ; in tal caso gli integrali sono estesi a $S(t)$.

Un esempio di forze esterne di massa agenti su un corpo continuo è costituito dalle forze peso per le quali la densità \vec{F} è data da \vec{g} , accelerazione di gravità.

Ipotesi 3.3. Per ogni $t \in [t_0, t_1]$, ad ogni sottocorpo \mathcal{C}^* , sia associato un campo vettoriale $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$, $P \in \partial S^*(t)$, detto densità delle forze esterne di contatto agenti su \mathcal{C}^* all'istante t . Supponiamo $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$ continuo per $P \in \partial S^*(t)$ e $t \in [t_0, t_1]$.

Si suppone che anche a \mathcal{C} sia associata la densità delle forze esterne di contatto.

Definizione 3.6. Chiamiamo risultante delle forze esterne di contatto agenti su \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

Il momento risultante delle forze esterne di contatto rispetto ad un polo O delle forze esterne di contatto agenti su \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è dato da:

$$\int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

E' immediato estendere le due definizioni date sopra a tutto il corpo.

Vediamo di interpretare fisicamente risultante e momento risultante delle forze di contatto.

Consideriamo dapprima l'intero corpo \mathcal{C} . Risultante risultante e momento risultante delle forze di contatto agenti su \mathcal{C} rappresentano l'azione esercitata dall'ambiente esterno sul corpo reale che schematizziamo con \mathcal{C} attraverso la frontiera della regione che il corpo occupa nello spazio istante per istante.

Consideriamo ora un sottocorpo \mathcal{C}^* di \mathcal{C} tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Risultante e momento risultante rappresentano l'azione che la porzione restante del corpo esercita su \mathcal{C}^* attraverso la frontiera della regione che questo occupa istante per istante.

Consideriamo infine un sottocorpo \mathcal{C}^* di \mathcal{C} tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S(t) = \partial_1 S^*(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Risultante e momento risultante delle forze di contatto agenti su \mathcal{C}^* rappresentano l'azione esercitata su \mathcal{C}^* attraverso la frontiera della regione che questo occupa in parte dalla porzione restante del corpo ed in parte dall'ambiente esterno.

Ipotesi 3.4. Supponiamo che non siano distribuite nel corpo continuo delle coppie di massa o di contatto.

I corpi per i quali sussiste tale proprietà sono detti *corpi continui non polari*, mentre quelli nei quali sono presenti delle coppie sono detti *corpi continui polari*. Noi ci limiteremo a prendere in considerazione solo corpi non polari. Tenendo presente l'ipotesi 3.4, possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 3.7. *Definiamo risultante e momento risultante rispetto ad un polo O delle forze esterne agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ i due integrali seguenti:*

$$\begin{aligned}\vec{R}^*(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma. \\ \vec{\Omega}_O^*(t) &= \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.\end{aligned}$$

Analoghe definizioni valgono per tutto il corpo \mathcal{C} .

Supponiamo che valga il seguente **assioma degli sforzi**.

Ipotesi 3.5. *Per ogni $t \in [t_0, t_1]$ esiste un campo vettoriale dipendente da t $\vec{T} = \vec{T}(P, t, \vec{u})$, definito per $P \in S(t)$, \vec{u} versore arbitrario, tale che per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* risulti:*

$$\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) = \vec{T}(P, t, \vec{n}),$$

dove $P \in \partial S^*(t)$, \vec{n} è il versore normale a $\partial S^*(t)$, rivolto verso l'esterno di $S^*(t)$.

Si assume $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ continuo rispetto ad ogni suo argomento ed inoltre si suppone che fissati t ed \vec{u} ad arbitrio, il campo $\vec{T}(\cdot, t, \vec{u}) \in \mathcal{C}^1(S(t))$.

Definizione 3.8. $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ è detto sforzo specifico relativo a P e a t , e coordinato alla direzione orientata di versore \vec{u} . Inoltre $\vec{T}(P, t, \vec{n})$, con $P \in \partial S(t)$ ed \vec{n} il versore normale a $\partial S(t)$ rivolto verso l'esterno di $S(t)$, è detto trazione superficiale e viene denotato con $\vec{f}(P, t)$.

Definizione 3.9. *Se lo sforzo specifico $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ è parallelo a \vec{u} , si dice che è uno sforzo normale; in particolare uno sforzo normale è detto pressione se ha il verso opposto di \vec{u} , tensione se ne ha lo stesso verso.*

Se lo sforzo specifico $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ è normale a \vec{u} , si dice che è uno sforzo di taglio.

In generale un qualsiasi sforzo specifico può sempre essere decomposto nella somma di uno sforzo normale e di uno sforzo di taglio.

3.2 Dinamica

Com'è noto, la meccanica dei corpi continui è governata dalle due *equazioni cardinali*, che vengono assunte come assiomi.

Richiamiamo tali equazioni.

Ipotesi 3.6. *Dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, sussistono le due equazioni seguenti:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}}{dt}(t) = \vec{R}(t) \quad (3.2.1)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O(t) \quad (3.2.2)$$

con O punto fisso dello spazio geometrico.

La (3.2.1) è nota come **I equazione cardinale**, la (3.2.2) come **II equazione cardinale**.

Le due equazioni cardinali sussistono anche per qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* di \mathcal{C} , dal momento che ogni sottocorpo di un corpo continuo è a sua volta un corpo continuo. In tal caso scriveremo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \vec{R}^*(t) \quad (3.2.3)$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) = \vec{\Omega}_O^*(t). \quad (3.2.4)$$

Vediamo ora quale forma specifica assumono le equazioni (3.2.3), (3.2.4) e le equazioni (3.2.1), (3.2.2) tenendo conto delle definizioni introdotte precedentemente.

Consideriamo un qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* del corpo continuo \mathcal{C} . Rivilgiamo la nostra attenzione dapprima alla (3.2.3). Per definizione di quantità di moto

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS$$

ed applicando il corollario 3.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\frac{d\vec{Q}^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS.$$

D'altra parte:

$$\vec{R}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma.$$

Dunque la (3.2.3) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (3.2.5)$$

Per tutto il corpo \mathcal{C} la I equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma. \quad (3.2.6)$$

Consideriamo ora la (3.2.4). Per definizione di momento delle quantità di moto

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{v} dS = \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] dS$$

ed applicando il corollario 3.1 del teorema del trasporto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho [(P - O) \times \vec{v}] \cdot dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \left[(P - O) \cdot \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS. \end{aligned}$$

D'altra parte, se P è la posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in P_0 , abbiamo

$$P - O = \vec{x}(P_0, t)$$

per cui il campo vettoriale $P - O$ definito in $S(t)$ con t che varia in $[t_0, t_1]$ è la rappresentazione spaziale del campo $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ definito in \mathcal{S}_0 . Allora

$$(P - O) \cdot = (\dot{\vec{x}})_s = \dot{\vec{v}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O^*}{dt}(t) &= \int_{S^*(t)} \rho \left[\dot{\vec{v}} \times \vec{v} + (P - O) \times \dot{\vec{v}} \right] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho (P - O) \times \dot{\vec{v}} dS. \end{aligned}$$

Se poi teniamo presente che:

$$\vec{\Omega}_0^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma,$$

otteniamo che la (3.2.4) assume la forma:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma. \quad (3.2.7)$$

Per tutto il corpo continuo \mathcal{C} la II equazione cardinale si scrive nel modo seguente:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S(t)} (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \quad (3.2.8)$$

Se in $[t_0, t_1]$ il corpo continuo è in quiete, allora $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, dove S è una regione fissa dello spazio ed inoltre $\vec{v}, \dot{\vec{v}} = \vec{0}$ in $S \times [t_0, t_1]$, per cui le due equazioni cardinali per tutto il corpo si riducono a:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} \vec{f} d\Sigma, \\ \forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{0} &= \int_S (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S} (P - O) \times \vec{f} d\Sigma. \end{aligned}$$

Tali equazioni sono dette *Equazioni cardinali della statica per un corpo continuo* e si possono scrivere anche per ogni sottocorpo.

Utilizzando la I equazione cardinale e scegliendo opportuni sottocorpi si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 3.1. Teorema di Cauchy sugli sforzi Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, per ogni $P \in S(t)$, per ogni versore \vec{u} , si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u},$$

dove $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$ è un campo tensoriale del secondo ordine, detto *tensore degli sforzi di Cauchy*.

Tenendo presenti le ipotesi di regolarità imposte allo sforzo specifico, si deduce che $\tilde{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ e che inoltre $\forall t \in [t_0, t_1] \quad \tilde{T}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$.

Come abbiamo visto, le due equazioni cardinali sono equazioni scritte in forma globale; da queste ci proponiamo ora di dedurre due equazioni che traducono

in forma locale le equazioni cardinali, cioè equazioni che devono essere soddisfatte in ogni punto di $S(t)$ ed in ogni istante $t \in [t_0, t_1]$. Tali equazioni sono dette I e II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui. Noi otterremo, per il momento, le due equazioni rimanendo in ambito spaziale.

Deduciamo dapprima la I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Consideriamo un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e scriviamo la I equazione cardinale per un suo sottocorpo \mathcal{C}^* arbitrario:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma = \\ &= \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il teorema di Cauchy.

D'altra parte, poiché abbiamo supposto di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano la chiusura di domini regolari, grazie anche alle proprietà di regolarità del tensore degli sforzi di Cauchy, all'integrale di superficie della (3.2.9) possiamo applicare il teorema della divergenza che ci fornisce:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \tilde{T} dS.$$

Ovviamente la divergenza di \tilde{T} nell'integrale di volume scritto sopra è il campo vettoriale che si ottiene contraendo il secondo indice di \tilde{T} e l'indice di derivazione. Sostituendo nella (3.2.9) e portando tutto al primo membro sotto un unico segno di integrale, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \right] dS = \vec{0}. \quad (3.2.10)$$

Ma per l'arbitrarietà di \mathcal{C}^* , la (3.2.10) sussiste per ogni $S^*(t)$ chiusura di un dominio regolare contenuto in $S(t)$ ed inoltre

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \operatorname{div} \tilde{T} \in \mathcal{C}(S(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Applichiamo allora il lemma 2.1, tenendo presente che questo continua a sussistere se supponiamo che l'insieme S e i suoi sottoinsiemi arbitrari che intervengono nel lemma siano la chiusura di domini regolari.

Così, grazie all'arbitrarietà di t in $[t_0, t_1]$ e di $S^*(t)$, abbiamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \text{ ossia in } \mathcal{S}. \quad (3.2.11)$$

La (3.2.11) è la **I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Per quanto riguarda la II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, questa si deduce dalla II equazione cardinale per un sottocorpo arbitrario \mathcal{C}^* del corpo continuo \mathcal{C} dopo aver applicato la formula di Cauchy:

$$\forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{v} dS = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (3.2.12)$$

Con opportuni calcoli, usando le formule integrali di Gauss-Ostrogradski, la I equazione indefinita e il lemma 2.1, dalla (3.2.12) si ottiene

$$\tilde{\vartheta} \cdot \tilde{T}^t dS = \vec{0} \quad \text{in } S(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \text{ ossia in } \mathcal{S} \quad (3.2.13)$$

che è la **II equazione indefinita della meccanica dei corpi continui**.

Come ora mostriamo, da questa equazione discende la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Teorema 3.2. *In un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ il tensore degli sforzi di Cauchy è simmetrico, ossia*

$$\tilde{T}(P, t) = \tilde{T}^t(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Dimostrazione

Se scriviamo in componenti la II equazione indefinita (3.2.13) abbiamo:

$$\vartheta_{ijr} T_{rj} = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Per $i = 1$, otteniamo:

$$\vartheta_{1jr} T_{rj} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ma $\vartheta_{1jr} = \epsilon_{1jr}$ e per la definizione di alternatore a tre indici, discende:

$$\epsilon_{123} T_{32} + \epsilon_{132} T_{23} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

ossia:

$$T_{32} = T_{23} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Considerando poi $i = 2$ e $i = 3$, si ottiene :

$$T_{31} = T_{13}, \quad T_{12} = T_{21} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dunque

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e il teorema risulta così dimostrato.

A questo punto introduciamo alcune definizioni che sono un'indispensabile premessa al teorema dell'energia cinetica che enunceremo subito dopo.

Definizione 3.10. *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, chiamiamo potenza delle forze esterne agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ la grandezza scalare:*

$$\Pi_e^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

La potenza delle forze esterne agenti su tutto il corpo \mathcal{C} all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è la grandezza scalare:

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma.$$

Definizione 3.11. *Dato un intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$, chiamiamo lavoro delle forze esterne agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* nell'intervallo di tempo $[t', t'']$ la seguente grandezza scalare:*

$$L_{e, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_e^*(t) \, dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

Come sappiamo, in un moto regolare $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$; è quindi possibile dare la seguente definizione.

Definizione 3.12. *Prende il nome di tensore di velocità di deformazione il campo tensoriale dipendente da t , rappresentato in ambito spaziale, $\tilde{D} = \tilde{D}(P, t)$, così definito:*

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad \tilde{D}(P, t) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{v}(P, t) + \text{grad}^t \vec{v}(P, t)].$$

Si potrebbe facilmente dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 3.1. *Se un corpo continuo \mathcal{C} ad un dato istante t possiede un atto di moto rigido, ossia se il campo spaziale della velocità di \mathcal{C} in tale istante è della forma:*

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\bar{O}, t) + \omega(t) \times (P - \bar{O}) \quad \forall P \in S(t)$$

con \bar{O} punto fissato arbitrariamente in $S(t)$, allora

$$\tilde{D}(P, t) = \tilde{0} \quad \forall P \in S(t).$$

Definizione 3.13. Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, chiamiamo potenza delle forze interne agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ la grandezza scalare:

$$\Pi_i^*(t) = - \int_{S^*(t)} \tilde{T}(P, t) \cdot \tilde{D}(P, t) dS = - \int_{S^*(t)} T_{ij}(P, t) D_{ij}(P, t) dS.$$

La definizione si estende immediatamente a tutto il corpo.

Definizione 3.14. Dato un intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$, chiamiamo lavoro delle forze interne agenti sul sottocorpo \mathcal{C}^* nell'intervallo di tempo $[t', t'']$ la seguente grandezza scalare:

$$L_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \Pi_i^*(t) dt.$$

Analoga definizione si dà relativamente a tutto il corpo.

Possiamo ora enunciare il teorema dell'energia cinetica, conseguenza della I equazione indefinita

Teorema 3.3. Teorema dell'energia cinetica Dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t). \quad (3.2.14)$$

Dimostrazione

Il teorema è conseguenza della I equazione indefinita:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Fissiamo t nell'intervallo di moto $[t_0, t_1]$ e moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della I equazione indefinita relativa a (P, t) con $P \in S(t)$ per $\vec{v}(P, t)$, integrando poi su $S(t)$ l'equazione scalare risultante. Otteniamo così:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS. \quad (3.2.15)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dS &= \int_{S(t)} \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right)' dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} dS = \frac{dT}{dt}(t), \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

avendo applicato il corollario del teorema del trasporto.

Ricordiamo poi che per definizione:

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

con $\vec{f}(\cdot, t) = \vec{T}(\cdot, t, \vec{n})|_{\partial S(t)}$.

Dunque al II membro della (3.2.15) compare il termine di $\Pi_e(t)$ rappresentato dall'integrale di volume.

Vediamo ora di operare opportunamente sul secondo integrale al II membro della (3.2.15). Precisamente consideriamone la funzione integranda e scriviamola in un modo più conveniente esprimendola in componenti:

$$\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} = T_{ij,j} v_i = (T_{ij} v_i)_{,j} - T_{ij} v_{i,j}.$$

Allora

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{S(t)} (T_{ij} v_i)_{,j} dS - \int_{S(t)} T_{ij} v_{i,j} dS.$$

Applicando al primo integrale a secondo membro le formule integrali di Gauss-Ostrogradski, si ottiene:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} T_{ij} v_i n_j d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} dS.$$

D'altra parte, su $\partial S(t)$, per la formula di Cauchy:

$$T_{ij} n_j = T_i(\vec{n}) = f_i$$

per cui:

$$\int_{\partial S(t)} T_{ij} v_i n_j d\Sigma = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma.$$

Inoltre, essendo $\operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{D} + \tilde{E}$ dove \tilde{E} è la parte emisimmetrica di $\operatorname{grad} \vec{v}$, si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \tilde{T} \cdot \tilde{E} = \tilde{T} \cdot \tilde{D},$$

poiché $\tilde{T} \cdot \tilde{E} = 0$ a causa della contrazione dei due indici di simmetria di \tilde{T} con i due di emisimmetria di \tilde{E} .

In conclusione deduciamo:

$$\int_{S(t)} \operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma - \Pi_i(t).$$

Sostituendo i risultati trovati nella (3.2.15), otteniamo la (3.2.14), c.v.d.

Ovviamente il teorema dell'energia cinetica vale anche per qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* ed in tal caso scriviamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dT^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \Pi_i^*(t).$$

Ci chiediamo a questo punto se tramite le due equazioni indefinite della meccanica dei corpi continui e l'equazione di continuità per la massa siamo in grado di determinare il moto di un corpo reale schematizzato con il modello di corpo continuo deformabile.

Come abbiamo visto, in ambito spaziale, tali equazioni, che devono essere verificate in \mathcal{S} , sono le seguenti:

- l'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita

$$\rho \vec{v} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t.$$

Il moto, dal punto di vista spaziale, è noto se è noto il campo spaziale della velocità $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$. Tale campo introduce nel problema tre incognite scalari, cioè le sue tre componenti v_i , $i = 1, 2, 3$. Sono comunque a priori incogniti anche la densità di massa $\rho = \rho(P, t)$ e il tensore degli sforzi di Cauchy $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$ che equivalgono ad altre 10 incognite scalari, poiché \tilde{T} è individuato mediante le 9 componenti T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. E' invece nota la densità delle forze esterne di massa $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$.

Perciò in tutto abbiamo 13 incognite scalari.

Vediamo ora quante sono le equazioni scalari indipendenti che abbiamo a disposizione. L'equazione di continuità è una singola equazione scalare, la I equazione indefinita equivale a tre equazioni scalari e la relazione tensoriale che esprime la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy equivale a tre equazioni scalari indipendenti. Dunque le equazioni scalari sono in tutto 7, mentre le incognite scalari sono 13.

Perciò il problema del moto non è impostato in maniera completa.

Per ottenere pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni dobbiamo aggiungere altre 6 equazioni scalari indipendenti. Tali equazioni aggiuntive non

possono essere ricavate da nozioni meccaniche generali perchè queste le abbiamo già sfruttate in maniera completa, ma occorre rilevare che le equazioni considerate valgono per ogni corpo continuo e non tengono conto della proprietà meccaniche specifiche del corpo reale che rappresentiamo con il modello del corpo continuo. L'esperienza ci mostra che i corpi reali presentano un comportamento meccanico diverso a seconda della loro struttura materiale. Le 6 equazioni da aggiungere devono quindi essere ottenute sperimentalmente per caratterizzare il corpo reale che stiamo schematizzando con il modello di corpo continuo. Tali equazioni mettono in relazione grandezze che descrivono lo stato di sforzo del corpo con grandezze che descrivono lo stato di deformazione: sono dette **relazioni sforzo-deformazione** e fanno parte delle **equazioni costitutive** o **leggi di comportamento**.

Le relazioni sforzo-deformazione, suggerite dall'esperienza, danno luogo esattamente a 6 equazioni scalari, ma l'esperienza stessa ci mostra che spesso in tali relazioni compaiono altre grandezze incognite che non hanno carattere meccanico, bensì termodinamico, come ad esempio la temperatura.

Questo fatto non è sicuramente sorprendente poichè tutti sappiamo che c'è uno stretto legame tra effetti meccanici ed effetti termici. E' ben noto, ad esempio, che se si riscalda una sbarra metallica, questa si allunga: mediante un effetto termico si ottiene un effetto meccanico. Se invece facciamo espandere un gas adiabaticamente, ossia senza fornirgli calore, questo si raffredda: mediante un effetto meccanico si ottiene un effetto termico.

Dunque per un corpo continuo deformabile in generale non è possibile impostare in maniera completa il problema del moto rimanendo in un ambito puramente meccanico, ma bisogna considerare un problema più generale: **il problema termomeccanico**.

Tenendo presente quanto asserito, è opportuno enunciare i due assiomi della termodinamica per i corpi continui.

3.3 Termodinamica

Occupiamoci prima di tutto del I assioma della termodinamica nel quale svolgono un ruolo fondamentale i concetti di energia interna e di potenza calorica.

Supponiamo di avere un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

Facciamo le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.7. $\forall t \in [t_0, t_1]$ è definito in $S(t)$, un campo scalare:

$$k = k(P, t), \quad k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}),$$

detto energia interna specifica del corpo \mathcal{C} all'istante t .

Definizione 3.15. *Preso un sottocorpo \mathcal{C}^* , chiamiamo energia interna di \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$ la grandezza scalare:*

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) k(P, t) dS.$$

Chiamiamo energia totale di \mathcal{C}^ all'istante $t \in [t_0, t_1]$:*

$$W^*(t) = T^*(t) + K^*(t).$$

Analoghe definizioni vengono date per tutto il corpo \mathcal{C} . L'energia interna fisicamente rappresenta la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale delle molecole che costituiscono il corpo reale schematizzato con \mathcal{C} .

Per quanto riguarda la potenza calorica, distinguiamo tra potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore e potenza calorica dovuta a calore di contatto (che fluisce nel corpo attraverso la frontiera della regione occupata istante per istante).

Precisamente faremo le seguenti assunzioni.

Ipotesi 3.8. *Supponiamo che $\forall t \in [t_0, t_1]$, sia definito in $S(t)$ un campo scalare:*

$$r = r(P, t), \quad r \in \mathcal{C}(\mathcal{S}),$$

detto densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore.

Definizione 3.16. *Preso un sottocorpo \mathcal{C}^* , chiamiamo potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$*

$$\mathcal{Q}_i^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

La potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore per \mathcal{C} all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è:

$$\mathcal{Q}_i(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) r(P, t) dS.$$

Ipotesi 3.9. *Per quanto riguarda il calore di contatto, supponiamo che $\forall t \in [t_0, t_1]$, ad ogni sottocorpo \mathcal{C}^* sia associato un campo scalare:*

$$q = q(P, t; \mathcal{C}^*),$$

dove $P \in \partial S^(t)$, continuo per $P \in \partial S^*(t)$ e per $t \in [t_0, t_1]$, detto densità della potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante t . Tale campo è definito anche in corrispondenza di tutto il corpo \mathcal{C} .*

Definizione 3.17. Chiamiamo potenza calorica dovuta a contatto per il sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$:

$$\mathcal{Q}_c^*(t) = \int_{\partial S^*(t)} q(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

La potenza calorica dovuta a contatto per \mathcal{C} all'istante $t \in [t_0, t_1]$ è:

$$\mathcal{Q}_c(t) = \int_{\partial S(t)} q(P, t; \mathcal{C}) d\Sigma.$$

Definizione 3.18. Definiamo potenza calorica (totale) per il sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante $t \in [t_0, t_1]$:

$$\mathcal{Q}^*(t) = \mathcal{Q}_i^*(t) + \mathcal{Q}_c^*(t).$$

Analogha definizione si dà per tutto il corpo.

Definizione 3.19. Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo \mathcal{C}^* nell'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ a causa delle sorgenti interne di calore la grandezza scalare:

$$Q_{i, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo \mathcal{C} il calore ricevuto nell'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ a causa delle sorgenti interne di calore è dato da

$$Q_{i, [t', t'']} = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_i(t) dt.$$

$Q_{i, [t', t'']}^*$ o $Q_{i, [t', t'']}$ dal punto di vista fisico rappresentano il calore ricevuto da \mathcal{C}^* o \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t', t'']$ a causa del fenomeno dell'irraggiamento o a causa di reazioni chimiche interne.

Definizione 3.20. Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo \mathcal{C}^* nell'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ dovuto a contatto la grandezza scalare:

$$Q_{c, [t', t'']}^* = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_c^*(t) dt.$$

Per tutto il corpo \mathcal{C} il calore ricevuto nell'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ dovuto a contatto è dato da

$$Q_{c, [t', t'']} = \int_{t'}^{t''} \mathcal{Q}_c(t) dt.$$

Vediamo di interpretare fisicamente anche quest'ultima grandezza.

Per tutto il corpo $Q_{c,[t',t'']}$ rappresenta il calore fluito nel corpo dall'ambiente esterno attraverso la frontiera della regione occupata da \mathcal{C} .

Per quanto riguarda i sottocorpi, distinguiamo due casi. Supponiamo dapprima che \mathcal{C}^* sia tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S^*(t) = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Allora $Q_{c,[t',t'']}$ rappresenta la quantità di calore che in $[t', t'']$ è fluita in \mathcal{C}^* dalla porzione restante di \mathcal{C} attraverso la frontiera della regione occupata da \mathcal{C}^* .

Consideriamo poi un sottocorpo \mathcal{C}^* di \mathcal{C} tale che

$$\partial S^*(t) \cap \partial S^*(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

$Q_{c,[t',t'']}$ rappresenta la quantità di calore che in $[t', t'']$ è fluita in \mathcal{C}^* attraverso la frontiera della regione da esso occupata in parte dalla porzione restante di \mathcal{C} in parte dall'ambiente esterno.

Definizione 3.21. *Chiamiamo calore ricevuto dal sottocorpo \mathcal{C}^* nell'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ la grandezza scalare:*

$$Q_{[t',t'']}^* = Q_{i,[t',t'']}^* + Q_{c,[t',t'']}^*.$$

Analogamente si dà per tutto il corpo.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi che è analoga all'assioma degli sforzi.

Ipotesi 3.10. *Supponiamo che $\forall t \in [t_0, t_1]$, sia definito in $S(t)$ un campo vettoriale*

$$\vec{q} = \vec{q}(P, t),$$

detto vettore flusso di calore, tale che $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall \mathcal{C}^$, sottocorpo di \mathcal{C} :*

$$q(P, t; \mathcal{C}^*) = -\vec{q}(P, t) \cdot \vec{n},$$

con $P \in \partial S^(t)$, ed \vec{n} versore della normale esterna in $\partial S^*(t)$. Inoltre supponiamo che $\vec{q} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ e che $\forall t \in [t_0, t_1]$ fissato, $\vec{q}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$.*

Tenendo conto di queste ipotesi, risulta:

$$Q_c^*(t) = - \int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = - \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \vec{q} dS,$$

avendo applicato il teorema della divergenza.

Otteniamo dunque:

$$\mathcal{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} [\rho r - \operatorname{div} \vec{q}] dS.$$

Siamo ora in grado di enunciare il primo assioma della termodinamica per un corpo continuo.

Assioma 3.1. I assioma della termodinamica. *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (3.3.1)$$

Tale assioma vale anche per ogni sottocorpo ed è espresso mediante l'equazione:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW^*}{dt}(t) = \Pi_e^*(t) + \mathcal{Q}^*(t). \quad (3.3.2)$$

In genere, tuttavia, tale assioma non lo si usa in questa forma, ma in una forma ridotta, che si ottiene tenendo presente anche l'equazione che traduce il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad (3.3.3)$$

Poiché $W = T + K$, si ha:

$$\frac{d}{dt}(T + K)(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t),$$

Sottraendo membro a membro da quest'ultima equazione la (3.3.3) si ottiene la seguente formulazione del primo assioma della termodinamica:

$$\frac{dK}{dt}(t) = \mathcal{Q}(t) - \Pi_i(t). \quad (3.3.4)$$

Per un sottocorpo

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \mathcal{Q}^*(t) - \Pi_i^*(t). \quad (3.3.5)$$

Nel seguito ci rifaremo sempre a questa seconda formulazione.

Nel II assioma della termodinamica svolgono un ruolo fondamentale i concetti di temperatura assoluta e di entropia.

Facciamo dunque le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.11. *Supponiamo che $\forall t \in [t_0, t_1]$ sia definito in $S(t)$ un campo scalare $\vartheta = \vartheta(P, t)$, $\vartheta > 0$, $\vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$, detto temperatura assoluta del corpo continuo \mathcal{C} all'istante t .*

Ipotesi 3.12. $\forall t \in [t_0, t_1]$ sia definito in $S(t)$ un campo scalare $h = h(P, t)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$, detto entropia specifica.

Definizione 3.22. Considerato un sottocorpo \mathcal{C}^* , definiamo entropia di \mathcal{C}^* all'istante t la grandezza scalare data da:

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

Analogamente si dà per l'entropia di \mathcal{C} :

$$H(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS.$$

Definizione 3.23. Definiamo produzione totale di entropia per un sottocorpo \mathcal{C}^* all'istante t la seguente grandezza scalare:

$$\Gamma^*(t) = \frac{dH^*}{dt}(t) - \int_{S^*(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma, \quad (3.3.6)$$

dove ricordiamo che \vec{n} è il versore della normale esterna a $\partial S^*(t)$.

Analogamente si dà per il corpo \mathcal{C} :

$$\Gamma(t) = \frac{dH}{dt}(t) - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma. \quad (3.3.7)$$

Nella definizione di $\Gamma^*(t)$ o $\Gamma(t)$ il secondo termine rappresenta la variazione di entropia dovuta a sorgenti interne di calore, mentre l'integrale di superficie preceduto dal segno $-$ è il flusso di entropia entrante in $S^*(t)$ o in $S(t)$ attraverso $\partial S^*(t)$ o $\partial S(t)$, dovuto a calore di contatto.

Assioma 3.2. II assioma della termodinamica. Dato un corpo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \Gamma(t) \geq 0.$$

Tale assioma vale ovviamente anche per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* di \mathcal{C} , essendo ogni sottocorpo un corpo.

I due assiomi della termodinamica sono enunciati in forma globale, cioè si riferiscono a tutto \mathcal{C} o a tutto \mathcal{C}^* , come le due equazioni cardinali. Ci proponiamo di dedurre da questi un'equazione ed una disequazione valide in ogni punto ed in ogni istante, cioè un'equazione ed una disequazione indefinite rimanendo, per il momento, in ambito spaziale.

Vediamo di dedurre l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica.

A tal fine consideriamo la seguente equazione, valida per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* , che traduce in forma ridotta il I assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dK^*}{dt} = \mathcal{Q}^* - \Pi_i^*. \quad (3.3.8)$$

Teniamo presente che:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho k dS,$$

da cui, poichè $k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$, per il corollario del teorema del trasporto, deduciamo:

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS.$$

Ricordando le espressioni viste per la potenza calorica e per la potenza delle forze interne, otteniamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S^*(t)} (\rho r - \operatorname{div} \vec{q}) dS + \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS.$$

Se nella precedente equazione portiamo tutto a primo membro, e riuniamo le funzioni integrande sotto un unico segno di integrale, abbiamo:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[\rho \dot{k} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \tilde{T} \cdot \tilde{D} \right] dS = 0.$$

Per l'arbitrarietà di \mathcal{C}^* , l'equazione scritta sopra sussiste per ogni $S^*(t)$ chiusura di un dominio regolare contenuto in $\mathcal{S}(t)$. Inoltre, per le ipotesi fatte, il campo scalare sotto integrale è continuo in \mathcal{S} .

Allora per il lemma 2.1, deduciamo **l'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica per i corpi continui**:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}. \quad (3.3.9)$$

Nell'equazione (3.3.9) a secondo membro è possibile sostituire $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$ con $\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$ grazie alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Deduciamo ora la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica.

Considerato un sottocorpo \mathcal{C}^* arbitrario, allora:

$$H^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS,$$

da cui, per il corollario del teorema del trasporto:

$$\frac{dH^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{h} dS.$$

Consideriamo ora, nella (3.3.6) il termine:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma.$$

Per il teorema della divergenza abbiamo che:

$$\int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) dS.$$

Tenendo presente i risultati precedenti, possiamo riscrivere nel modo seguente la disequazione (3.3.6) che traduce il secondo assioma della termodinamica:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \int_{S^*(t)} \left[\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \right] dS \geq 0. \quad (3.3.10)$$

Osserviamo che per l'arbitrarietà di \mathcal{C}^* , la (3.3.10) sussiste per ogni $S^*(t)$ chiusura di un dominio regolare contenuto in $S(t)$ e il campo scalare sotto integrale è continuo in \mathcal{S} .

D'altra parte, ragionando in maniera analoga a quanto fatto per provare il lemma 2.1, si ottiene facilmente un lemma analogo sostituendo al segno di uguaglianza a zero il segno di disuguaglianza ≥ 0 . Perciò, stante l'arbitrarietà di $S^*(t)$ e di t , deduciamo

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.11)$$

Osserviamo ora che:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{\vartheta} \right) = \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} + \operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} \cdot \vec{q}$$

ed inoltre:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\vartheta} = -\frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta.$$

Possiamo quindi riscrivere la disequazione (3.3.11) nel modo seguente:

$$\rho \dot{h} - \frac{\rho r}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta^2} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.12)$$

Se moltiplichiamo ambo i membri della (3.3.12) per ϑ , deduciamo:

$$\rho \vartheta \dot{h} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.13)$$

Abbiamo così ottenuto una disequazione che traduce in forma locale il II assioma della termodinamica.

Tuttavia è conveniente dare una forma differente a tale disequazione eliminando r , ossia la densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore, che è un termine noto. A tal fine riscriviamo l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica nella forma seguente:

$$\rho r - \operatorname{div} \vec{q} = \rho \dot{k} - \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Sostituendo nella (3.3.13), si ottiene:

$$\rho (\vartheta \dot{h} - \dot{k}) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.14)$$

La (3.3.14) è la **disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica**.

Tale disequazione si può scrivere in altra forma introducendo la definizione di energia libera specifica.

Definizione 3.24. *Definiamo energia libera specifica la grandezza scalare denotata con ψ data da:*

$$\psi = k - \vartheta h.$$

Osserviamo che:

$$\psi = k - \vartheta h \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{k} - \vartheta \dot{h} - \dot{\vartheta} h \quad \Rightarrow \quad \dot{k} - \vartheta \dot{h} = \dot{\psi} + h \dot{\vartheta}.$$

Allora possiamo riscrivere la disequazione (3.3.14) nella forma:

$$\rho (\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.15)$$

Quest'ultima prende il nome di **disequazione di Clausius-Duhem per i corpi continui**.

3.4 Problema termomeccanico per un corpo continuo

Rimaniamo in ambito spaziale come nei due precedenti paragrafi e ricordiamo le equazioni indefinite di carattere generale, cioè valide per ogni corpo continuo, ottenute finora e che devono essere soddisfatte in \mathcal{S} .

- L'equazione di continuità della massa

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- la I equazione indefinita della meccanica

$$\rho \vec{v} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T};$$

- la conseguenza della II equazione indefinita della meccanica

$$\tilde{T} = \tilde{T}^t;$$

- l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

In tali equazioni le incognite scalari sono:

$$v_i (i = 1, 2, 3), \rho, T_{ij} (i, j = 1, 2, 3), k, \vartheta, h, q_i (i = 1, 2, 3).$$

In totale abbiamo 19 incognite scalari, mentre le equazioni scritte sopra danno luogo a 8 equazioni scalari indipendenti. Per poter impostare in maniera completa il problema termomeccanico dobbiamo aggiungere altre 11 equazioni scalari indipendenti. Queste devono caratterizzare il comportamento termomeccanico del corpo reale schematizzato tramite il modello del corpo continuo e quindi dipendono dalla struttura materiale del corpo. Tali equazioni ci sono fornite dall'esperienza e sono dette **equazioni costitutive o leggi di comportamento**. Tra le 11 equazioni costitutive scalari 6 sono le relazioni sforzo-deformazione di cui abbiamo già parlato, le altre 5 caratterizzano il comportamento termodinamico del corpo.

Nelle equazioni generali elencate sopra non abbiamo scritto la disuguaglianza indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica, proprio perché non è un'equazione e quindi non contribuisce direttamente a risolvere il problema termomeccanico.

Ricordiamo che tale disequazione si può scrivere come:

$$\rho \left(\vartheta \dot{h} - \dot{k} \right) + \tilde{T} \cdot \tilde{D} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0$$

o nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\rho \left(\dot{\psi} + h \dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0.$$

Poiché tale disequazione deve essere soddisfatta in \mathcal{S} qualunque sia il moto o più in generale l'evoluzione del corpo continuo, le equazioni costitutive devono

essere tali da consentire ciò. Quindi il II assioma della termodinamica dei corpi continui svolge il ruolo di imporre delle restrizioni sulla forma delle equazioni costitutive affinché queste siano compatibili con tale assioma.

Osservazione 3.3 Tra le incognite del problema termomeccanico possiamo far comparire in luogo dell'energia interna specifica k l'energia libera specifica ψ tenendo presente che $\psi = k - \vartheta h$. In tal caso ogni volta che compare k a questa dobbiamo ovviamente sostituire $\psi + \vartheta h$ e la disequazione che traduce in forma locale il II assioma della termodinamica deve apparire nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem.

Nelle equazioni costitutive distinguiamo tra

- grandezze *costitutive*, cioè grandezze espresse mediante altre grandezze;
- grandezze *fondamentali*, cioè grandezze mediante le quali vengono espresse quelle costitutive.

Si richiede che le equazioni soddisfino tre assiomi:

1) **Assioma dell'azione locale**

I valori che le grandezze costitutive assumono in ogni punto dello spazio geometrico dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto.

2) **Assioma di determinismo**

I valori che le grandezze costitutive assumono ad ogni istante dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso istante ed eventualmente anche in tutti gli istanti precedenti, cioè dipendono dalla storia delle grandezze fondamentali. I corpi per i quali i valori assunti dalle grandezze costitutive ad ogni istante dipendono non solo dai valori che quelle fondamentali assumono nello stesso istante, ma anche dalla loro storia sono detti **corpi con memoria**.

3) **Assioma dell'obiettività o dell'indifferenza materiale**

La forma delle equazioni costitutive è indipendente dall'osservatore, cioè le equazioni costitutive sono invarianti rispetto ai moti rigidi (poiché gli osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rigido).

Se nelle equazioni generali, valide per tutti i corpi continui, eliminiamo le grandezze costitutive sostituendo ad esse le loro espressioni in funzione di quelle fondamentali, otteniamo un sistema di equazioni in cui i campi incogniti dipendono da P e da t e ai quali sono applicati operatori differenziali, eventualmente anche di ordine superiore al I, relativi sia a P sia a t .

Per poter affrontare il problema termomeccanico con metodi analitici è opportuno sostituire ai campi scalari, vettoriali e tensoriali che compaiono nel sistema le loro rappresentazioni analitiche nel riferimento associato all'osservatore. In tal modo otteniamo un sistema di equazioni (in genere) differenziali alle derivate parziali in cui le funzioni incognite dipendono dalle quattro variabili reali x_1, x_2, x_3, t . Le prime tre sono variabili spaziali, mentre l'ultima è la variabile temporale. Se il corpo di cui si studia l'evoluzione è dotato di memoria, il sistema di equazioni risulta di forma più complessa ed è precisamente un sistema integro-differenziale.

E' evidente che un sistema di equazioni differenziali (o integro-differenziali) ammette infinite soluzioni se non aggiungiamo delle ulteriori condizioni che devono essere soddisfatte dalla soluzione. Per avere l'unicità della soluzione, dobbiamo perciò associare al sistema delle opportune condizioni, dette **condizioni ai limiti**, e suggerite in genere dall'esperienza.

Le condizioni ai limiti sono di due tipi:

- **condizioni iniziali**: consistono nell'assegnare all'istante iniziale del moto (t_0) i valori che assumono alcuni campi incogniti o alcune loro derivate;
- **condizioni al contorno**: consistono nell'assegnare istante per istante sul bordo della regione occupata dal corpo i valori che assumono alcuni campi incogniti od alcune loro derivate o alcune combinazioni di campi e derivate.

Ovviamente anche ai campi che compaiono nelle condizioni ai limiti si sostituiscono le rappresentazioni analitiche.

Tutto quanto abbiamo detto in ambito spaziale continua a sussistere anche in ambito materiale, come vedremo nella II parte del corso.

Osserviamo infine che le equazioni costitutive definiscono le varie classi di corpi continui, dette *classi costitutive*, che a loro volta corrispondono a classi di corpi reali.

Capitolo 4

Fluidi perfetti

4.1 Fluidi propriamente detti e fluidi perfetti

In questo capitolo studieremo una particolare classe costitutiva di corpi continui, quella dei fluidi perfetti che a sua volta è una sottoclasse di una classe più generale, quella dei fluidi propriamente detti.

Rileviamo che i fluidi sono corpi continui che schematizzano il comportamento dei liquidi e dei gas reali. In particolare i liquidi sono rappresentati mediante fluidi incomprimibili.

In genere i fluidi sono studiati dal punto di vista spaziale.

Definizione 4.1. *Un fluido propriamente detto è un corpo continuo che, in ambito spaziale, da un punto di vista strettamente meccanico, è caratterizzato dalla seguente relazione sforzo-deformazione:*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}},$$

dove

$\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$ è il tensore degli sforzi di Cauchy;

$p = p(P, t)$ è la pressione del fluido ($p > 0$ in ogni punto ed in ogni istante);

\tilde{a} è il tensore fondamentale;

$\tilde{\hat{T}}$ è un'applicazione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ($\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$), tale che $\tilde{\hat{T}} =$

$\tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta)$, con \tilde{D} tensore di velocità di deformazione e ϑ temperatura assoluta, soddisfacente alla condizione $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta) = \tilde{0}$.

La funzione $\tilde{\hat{T}}$, detta *parte viscosa del tensore degli sforzi*, è fornita dall'esperienza.

Ricordiamo che il tensore di velocità di deformazione ha la seguente espressione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}),$$

dove \vec{v} è il campo spaziale della velocità.

Definizione 4.2. *Un fluido per il quale la parte viscosa del tensore degli sforzi è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, si dice non viscoso.*

Si osservi che per un fluido propriamente detto che sia in quiete o si muova di moto rigido la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla poiché nelle condizioni dette sopra il campo tensoriale \tilde{D} è identicamente nullo.

Definizione 4.3. *Un fluido perfetto o fluido ideale è un fluido propriamente detto, caratterizzato, da un punto di vista puramente meccanico, dalla relazione sforzo-deformazione*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}.$$

Dunque un fluido perfetto è un fluido propriamente detto non viscoso. La relazione sforzo-deformazione mostra che in un fluido perfetto il tensore degli sforzi di Cauchy è isotropo; l'isotropia di \tilde{T} traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che i liquidi e i gas reali schematizzabili con il modello di fluido perfetto hanno proprietà meccaniche indipendenti dalla direzione.

Può essere interessante vedere che forma assume in un fluido perfetto lo sforzo specifico in un punto P all'istante t coordinato alla direzione orientata di versore arbitrario \vec{u} , cioè $\vec{T}(P, t, \vec{u})$.

Per il teorema di Cauchy sugli sforzi si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u} = -p(P, t)\tilde{a} \cdot \vec{u},$$

da cui discende:

$$T_i(P, t, \vec{u}) = T_{ij}(P, t) u_j = -p(P, t) a_{ij} u_j = -p(P, t) \delta_{ij} u_j = -p(P, t) u_i,$$

ossia

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = -p(P, t) \vec{u}.$$

Allora deduciamo che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale, e questo è tradotto dal fatto che $\vec{T}(\vec{u}) \parallel \vec{u}$, ed inoltre ha carattere di pressione, e questo è tradotto dal fatto che essendo $p > 0$, $\vec{T}(\vec{u})$ e \vec{u} hanno verso opposto, qualunque sia \vec{u} .

Osservazione 4.1. La pressione in un fluido perfetto non dipende da \vec{u} . Questo fatto traduce in termini matematici il principio di Pascal che si osserva sperimentalmente: nei liquidi e nei gas reali schematizzati con il modello di fluido perfetto la pressione è uguale in tutte le direzioni.

I fluidi perfetti schematizzano abbastanza bene alcuni liquidi reali, come ad esempio l'acqua, anche se in via approssimata, e molti gas reali, come ad esempio l'aria.

Per il momento abbiamo dato solo la relazione sforzo-deformazione per un fluido perfetto. Vogliamo caratterizzare il comportamento di un fluido perfetto anche dal punto di vista termodinamico. A tal fine dobbiamo distinguere tra fluidi perfetti comprimibili e fluidi perfetti incomprimibili.

1) Fluido perfetto comprimibile

Le equazioni costitutive che caratterizzano la natura termodinamica di un fluido perfetto comprimibile sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ p &= \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ h &= \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di stato} \quad (4.1.1)$$

cui associamo la **legge di propagazione del calore**

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta. \quad (4.1.2)$$

Nelle (4.1.1) si ha:

ψ = energia libera specifica, $\mathcal{V} = 1/\rho$ = volume specifico, ϑ = temperatura assoluta, h = entropia specifica.

Le funzioni $\widehat{\psi}$, \widehat{p} e \widehat{h} sono funzioni note fornite dall'esperienza dette *funzioni risposta*.

Ovviamente \widehat{p} deve essere strettamente positiva poichè è la funzione risposta per la pressione.

Assumiamo poi $\widehat{\psi}$, \widehat{p} , \widehat{h} di classe \mathcal{C}^1 da cui discende $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^2$.

Le cinque grandezze che intervengono nelle tre equazioni di stato prendono il nome di variabili di stato; ϑ e \mathcal{V} sono variabili di stato fondamentali, mentre ψ , p e h sono variabili di stato costitutive.

La funzione risposta $\widehat{\psi}$ è detta *potenziale termodinamico*, perchè tramite le sue derivate siamo in grado di determinare le altre due funzioni risposta e la prima equazione di stato è chiamata *equazione di stato fondamentale*, perchè tramite questa si ricavano le altre due.

p , \mathcal{V} e h , θ costituiscono coppie di *variabili di stato coniugate*.

Per quanto riguarda la legge di propagazione del calore, \vec{q} è il vettore flusso di calore, mentre $\beta = \beta(\vartheta, \text{grad} \vartheta, P)$ è detto *coefficiente di conducibilità termica* e la sua espressione si ottiene sperimentalmente. Da tale legge vediamo che

in ogni punto e in ogni istante \vec{q} è parallelo a $\text{grad } \vartheta$; quando si verifica tale condizione, si dice che la **propagazione del calore è isotropa**. L'isotropia della propagazione del calore traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che nei corpi reali schematizzati con il modello considerato le proprietà termiche sono indipendenti dalla direzione.

Se il coefficiente di conducibilità termica β è costante, la legge di propagazione del calore (4.1.2) prende il nome di **legge di Fourier**.

Osservazione 4.2. E' immediato ottenere la funzione risposta dell'energia interna specifica k in termini di ϑ e di \mathcal{V} , tenendo presente che:

$$k = \psi + \vartheta h.$$

Precisamente si ha:

$$\widehat{k}(\vartheta, \mathcal{V}) = \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) + \vartheta \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Dunque anche l'energia interna specifica è una variabile di stato.

Mostriamo ora che nelle equazioni di stato si può assumere h come variabile di stato fondamentale in luogo di ϑ .

Premettiamo una definizione:

Definizione 4.4. *Dato un fluido perfetto caratterizzato dalle equazioni di stato scritte sopra, definiamo calore specifico a volume costante relativo a ϑ e \mathcal{V} la grandezza scalare data da:*

$$C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) = \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}).$$

L'esperienza mostra che $C_{\mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0$, qualunque sia l'evoluzione del fluido. Dalla definizione 4.4, deduciamo:

$$\vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}),$$

da cui, essendo $\vartheta > 0$, segue:

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) > 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V}).$$

Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione:

$$h = \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni \mathcal{V} fissato, si può ricavare, almeno localmente, la temperatura ϑ in funzione di h :

$$\vartheta = \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale h al posto di ϑ , purché le equazioni di stato si scrivano nella forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h, \mathcal{V}) \\ p &= \bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}), \end{aligned} \right\} \text{Nuove equazioni di stato} \quad (4.1.3)$$

dove

$$\bar{k}(h, \mathcal{V}) = \hat{\psi}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) h, \quad \bar{p}(h, \mathcal{V}) = \hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}).$$

Assumendo come variabili di stato fondamentali h e \mathcal{V} , si ha perciò che il potenziale termodinamico non è più la funzione risposta per l'energia libera specifica, ma quella per l'energia interna specifica.

Proviamo che:

$$\bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}).$$

Se deriviamo \bar{k} rispetto a \mathcal{V} , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) - \hat{h}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) h = \\ &= -\hat{p}(\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = -\bar{p}(h, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra:

$$\bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}).$$

Si potrebbe anche provare che, tenendo ϑ come variabile di stato fondamentale, è possibile sostituire a \mathcal{V} la pressione p come variabile di stato fondamentale. Infatti l'esperienza ci mostra che

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) < 0 \quad \forall(\vartheta, \mathcal{V})$$

e che quindi tale derivata non è mai nulla. Allora, per il teorema delle funzioni implicite, dall'equazione

$$p = \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}),$$

per ogni ϑ fissato, si può ricavare, almeno localmente, il volume specifico \mathcal{V} in funzione di p :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^*(\vartheta, p).$$

Possiamo così assumere come variabile di stato fondamentale p al posto di \mathcal{V} , purché nelle equazioni di stato compaia come nuovo potenziale termodinamico, la funzione risposta dell'*entalpia libera specifica* G , così definita:

$$G = k + p\mathcal{V} - \vartheta h = \psi + p\mathcal{V},$$

ma su ciò non insistiamo.

Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 4.5. *Dato un fluido perfetto comprimibile, chiamiamo calore specifico a pressione costante relativo a ϑ e p la grandezza scalare data da:*

$$C_p(\vartheta, p) = \vartheta \frac{\partial h^*}{\partial \vartheta}(\vartheta, p),$$

dove $h^*(\vartheta, p)$ è la funzione risposta di h in termini di ϑ e p .

Dall'esperienza si vede che:

$$C_p(\vartheta, p) > C_V(\vartheta, \mathcal{V}^*(\vartheta, p)) > 0 \quad \forall(\vartheta, p).$$

2) Fluido perfetto incomprimibile

Per un fluido perfetto incomprimibile, qualunque sia il suo moto, deve essere soddisfatta la condizione di incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

da cui dunque l'equazione di continuità della massa assume la forma:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Di conseguenza $\mathcal{V} = 1/\rho$ non è più variabile di stato, e quindi non è più variabile di stato nemmeno la sua coniugata p , che diventa così una grandezza puramente meccanica.

Le variabili di stato si riducono a 3: ψ , ϑ e h .

Le equazioni di stato assumono allora la forma:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta), \\ h &= \widehat{h}(\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}\widehat{\psi}(\vartheta). \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$

cui associamo la legge di propagazione del calore ancora data da:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad}\vartheta \quad \text{con} \quad \beta = \beta(\vartheta, \text{grad}\vartheta, P).$$

Lo stato termodinamico di un fluido perfetto incomprimibile è quindi individuato da tre variabili di stato: ψ , ϑ , h . ϑ è variabile di stato fondamentale, mentre ψ e h sono variabili di stato costitutive. Il potenziale termodinamico è $\widehat{\psi}$ e la sua derivata rispetto a ϑ , cambiata di segno, è la funzione risposta per h .

Come per i fluidi perfetti comprimibili, possiamo sostituire h a ϑ come variabile di stato fondamentale e le equazioni di stato sono allora:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h), \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h) = \frac{d}{dh}\bar{k}(h) \end{aligned} \right\} \text{nuove equazioni di stato}$$

Osservazione 4.3. Si vede immediatamente che le equazioni costitutive di un fluido perfetto comprimibile o incomprimibile soddisfano gli assiomi dell'azione locale e di determinismo poiché i valori assunti dalle grandezze costitutive in ogni punto ed in ogni istante dipendono solo dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto e nello stesso istante. I fluidi perfetti non sono corpi continui con memoria.

Si potrebbe dimostrare che è anche soddisfatto l'assioma dell'obiettività.

4.2 Problema del moto per un fluido perfetto

In primo luogo vediamo quale forma assume per un fluido perfetto la I equazione indefinita della meccanica sfruttando la relazione sforzo-deformazione

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}$$

che scritta in componenti fornisce:

$$T_{ij} = -p a_{ij} = -p \delta_{ij}.$$

Osserviamo che per le ipotesi di regolarità imposte a \tilde{T} si ha

$$p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}).$$

Ricordiamo la I equazione indefinita nella sua forma generale:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}.$$

La i -esima componente della divergenza di \tilde{T} è:

$$(\operatorname{div} \tilde{T})_i = T_{ij,j} = (-p \delta_{ij})_{,j} = -p_{,j} \delta_{ij} = -p_{,i} = -(\operatorname{grad} p)_i,$$

per cui in forma vettoriale si ha:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p.$$

Sostituendo nella I equazione indefinita otteniamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \quad (4.2.1)$$

La (4.2.1) è detta **equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti o equazione di Eulero**.

Se nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ il fluido è in quiete, si ha:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \vec{v} = \vec{0} \implies \dot{\vec{v}} = \vec{0},$$

per cui l'equazione (4.2.1) si riduce a:

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \quad (4.2.2)$$

detta **equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti**.

Osservazione 4.4. La (4.2.2) governa non solo la statica dei fluidi perfetti, ma anche la statica di qualsiasi fluido propriamente detto, poiché, quando il fluido è in quiete, la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla.

Ci proponiamo di mostrare ora come si imposta il problema del moto per un fluido perfetto. Proviamo dapprima la seguente:

Proposizione 4.1. *Per un fluido perfetto incomprimibile il problema del moto si imposta in maniera completa in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

Vediamo quali sono le equazioni che abbiamo a disposizione in ambito puramente meccanico per un fluido perfetto incomprimibile:

- condizione di incomprimibilità

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- equazione di continuità associata alla condizione di incomprimibilità

$$\dot{\rho} = 0;$$

- equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p.$$

Teniamo poi presente che la pressione p in un fluido perfetto incomprimibile è una grandezza puramente meccanica, ossia non è una variabile di stato.

Allora le incognite scalari del problema sono cinque: $v_i (i = 1, 2, 3)$, ρ , p , ma anche le equazioni scalari sono cinque. Perciò il numero delle incognite è pari al numero delle equazioni e il problema del moto è impostato in maniera completa, per quanto riguarda il bilancio tra incognite ed equazioni.

Per determinare effettivamente il moto del fluido alle equazioni scritte sopra dobbiamo associare le condizioni ai limiti che distinguiamo in condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Se assumiamo $t_0 = 0$, le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho(P, 0) &= \rho_0(P) & \forall P \in S(0) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) & \forall P \in S(0), \end{aligned}$$

dove $\rho_0 = \rho_0(P)$ e $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(P)$ sono campi assegnati.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che $\partial S(t)$ sia costituita da pareti materiali rigide di cui è noto l'atto di moto:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t), \quad P \in \partial S(t), \quad t \in [0, t_1].$$

L'esperienza mostra che le particelle di fluido a contatto con le pareti non le possono attraversare: quindi la condizione al contorno suggerita dall'esperienza è la seguente:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}. \quad (4.2.3)$$

La (4.2.3), nella quale \vec{n} è il versore della normale esterna a $\partial S(t)$, è detta **condizione di impenetrabilità**.

In particolare se le pareti rigide sono fisse:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = 0.$$

Si potrebbero utilizzare anche altri tipi di condizioni al contorno suggerite dall'esperienza, a seconda delle caratteristiche fisiche del particolare moto che si studia, ma su ciò non insistiamo.

Dunque abbiamo impostato in maniera completa il problema del moto per un fluido perfetto incomprimibile.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi sul fluido: supponiamo che, oltre ad essere incomprimibile, sia anche omogeneo, cioè che la densità di massa ρ non dipenda da P per cui $\text{grad } \rho = \vec{0}$ in \mathcal{S} . Allora per definizione di derivata materiale rispetto al tempo, abbiamo:

$$\dot{\rho} = \rho' + \text{grad } \rho \cdot \vec{v} = \rho'.$$

Ma, essendo il fluido incomprimibile,

$$\dot{\rho} = \rho' = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

D'altra parte, poiché ρ non dipende da P , possiamo scrivere:

$$\rho'(t) = \frac{d\rho}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dunque ρ non dipende neppure da t e quindi è una costante nota.

Il moto per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo si imposta perciò mediante il seguente sistema, equivalente a quattro equazioni scalari

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \text{grad } p \end{aligned}$$

con ρ costante positiva nota.

E' evidente che in tal caso al sistema scritto sopra si associa una sola la condizione iniziale, cioè quella relativa alla velocità. Se poi $\partial S(t)$ è costituita da pareti materiali rigide come condizione al contorno assumiamo quella di impenetrabilità.

Si noti che p è comunque determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo.

Infatti se la coppia (\vec{v}, p) è soluzione dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti scritta sopra, è soluzione della stessa equazione anche la coppia (\vec{v}, p^*) dove $p^* = p + \alpha$ con $\alpha = \alpha(t)$ funzione arbitraria del tempo, poiché $\text{grad } p^* = \text{grad } p$.

Ciò che abbiamo detto per la pressione vale per un qualsiasi fluido perfetto incomprimibile, tenendo presente che p per un tale fluido non è data mediante un'equazione di stato, ma è un'incognita puramente meccanica.

Occupiamoci ora dell'impostazione del problema del moto per un fluido perfetto comprimibile. Se restiamo in ambito puramente meccanico, abbiamo a

disposizione le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p\end{aligned}$$

che sono chiaramente insufficienti ad impostare il problema del moto poiché equivalgono a 4 equazioni scalari, mentre le incognite scalari sono 5: v_i ($i = 1, 2, 3$), ρ , p . Occorre perciò impostare il problema termomeccanico. Alle due equazioni precedenti dovremo aggiungere l'equazione indefinita che è conseguenza del I assioma della termodinamica:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Vediamo quale forma particolare assume tale equazione per un fluido perfetto se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione. In particolare si ha:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = T_{ij} v_{i,j} = -p \delta_{ij} v_{i,j} = -p v_{i,i} = -p \operatorname{div} \vec{v}.$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità (essendo $\rho > 0$), si deduce:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

e dunque:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione conseguenza del I assioma della termodinamica, otteniamo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (4.2.4)$$

La (4.2.4) è nota come **equazione dell'energia per un fluido perfetto comprimibile**.

Osservazione 4.5. Per un fluido perfetto incomprimibile, grazie alla condizione di incomprimibilità, risulta:

$$\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = -p \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

per cui l'equazione dell'energia per un fluido perfetto incomprimibile si riduce a:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Per impostare il problema termomeccanico per un fluido perfetto comprimibile scriviamo le seguenti equazioni, che devono tutte essere verificate in \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ \rho \dot{k} &= \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho}\end{aligned}$$

cui associamo le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

In tutto abbiamo 11 equazioni scalari ed anche le incognite scalari sono 11: v_i ($i = 1, 2, 3$), ρ , p , k (o ψ o G), h , ϑ , q_i ($i = 1, 2, 3$). Il problema termomeccanico è perciò impostato in maniera completa per quanto riguarda numero di incognite e numero di equazioni.

Se vogliamo effettivamente determinare l'evoluzione del fluido, dobbiamo aggiungere le condizioni ai limiti (iniziali e al contorno), ma su ciò non insistiamo. Ci limitiamo ad osservare che se $\partial S(t)$ è formato da pareti materiali rigide, per il campo della velocità si ha la condizione di impenetrabilità:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n},$$

dove \vec{V} è l'atto di moto delle pareti, che viene riguardato come noto.

L'influenza del II assioma della termodinamica sulle equazioni costitutive dei fluidi perfetti è espressa mediante il seguente teorema di cui non forniamo la dimostrazione.

Teorema 4.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido perfetto siano compatibili con il secondo assioma della termodinamica è che $\beta \geq 0$.*

4.3 Fluidi perfetti barotropici e gas perfetti

Definizione 4.6. *Un fluido perfetto barotropico è un fluido perfetto comprimibile tale che la pressione è funzione solo della densità di massa e precisamente:*

$$p = g(\rho)$$

dove g è una funzione definita in $(0, +\infty)$, positiva, di classe \mathcal{C}^1 con $\frac{dg}{d\rho} > 0$.

Si osservi che g , essendo strettamente crescente, è invertibile per cui:

$$\rho = g^{-1}(p).$$

Proposizione 4.2. *Per un fluido perfetto barotropico il problema del moto si imposta in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

In ambito meccanico le equazioni che abbiamo a disposizione sono:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ p &= g(\rho).\end{aligned}$$

Le equazioni scalari sono 5, esattamente come le incognite scalari e dunque il problema del moto è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Mostriamo ora che in particolari condizioni un generico fluido perfetto comprimibile si comporta come un fluido barotropico.

Premettiamo una definizione.

Definizione 4.7. *Diciamo che un corpo continuo, studiato dal punto di vista spaziale, evolve isotermicamente o in condizioni isotermiche se*

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dimostriamo la seguente

Proposizione 4.3. *Se un fluido perfetto comprimibile evolve isotermicamente, si comporta come un fluido perfetto barotropico.*

Dimostrazione

Per ipotesi

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Nelle equazioni di stato del fluido assumiamo come variabili di stato fondamentali ϑ e \mathcal{V} , per cui:

$$p = \hat{p}(\vartheta_0, \mathcal{V}).$$

Poniamo:

$$g(\rho) = \hat{p}\left(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}\right).$$

E' evidente che $g > 0$, $g \in \mathcal{C}^1$, poiché $\hat{p} > 0$, $\hat{p} \in \mathcal{C}^1$ e $\rho \neq 0$.

Inoltre

$$\frac{dg}{d\rho}(\rho) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathcal{V}}\left(\vartheta_0, \frac{1}{\rho}\right) \frac{1}{\rho^2} > 0,$$

perchè, come abbiamo osservato, l'esperienza mostra che $\frac{\partial \widehat{p}}{\partial \mathcal{V}} < 0$.

Il fluido in condizioni isoterme si comporta dunque come un fluido barotropico, c.v.d.

Definizione 4.8. *Un gas perfetto è un fluido perfetto comprimibile per il quale vale la seguente equazione di stato:*

$$p = R \frac{\vartheta}{\mathcal{V}}, \quad R = \text{costante} > 0. \quad (4.3.1)$$

Molti gas reali, come ad esempio l'aria, possono essere schematizzati mediante questo modello di fluido.

I gas perfetti godono di interessanti proprietà.

- Per un gas perfetto la funzione risposta \widehat{k} dell'energia interna specifica in termini di ϑ e \mathcal{V} dipende solo da ϑ , cioè

$$k = \widehat{k}(\vartheta).$$

- Il calore specifico a volume costante $C_{\mathcal{V}}$, che per un generico fluido perfetto comprimibile dipende da ϑ e \mathcal{V} , per un gas perfetto dipende solo da ϑ .
- Per un gas perfetto $C_p - C_{\mathcal{V}} = R$, da cui segue che per un gas perfetto, se uno dei due calori specifici è costante, lo è anche l'altro.
- Per un gas perfetto in condizioni isoterme sussiste la legge di Boyle-Mariotte, tradotta dalla seguente equazione:

$$p = C_0 \rho, \quad C_0 = \text{costante} > 0. \quad (4.3.2)$$

Proviamo solo l'ultima proprietà relativa alla legge di Boyle-Mariotte. Questa si deduce immediatamente dall'equazione di stato dei gas perfetti. Infatti se il gas evolve isotermicamente $\vartheta = \vartheta_0 = \text{costante}$ e dunque dalla (4.3.1) segue:

$$p = R \frac{\vartheta_0}{\mathcal{V}} = R \vartheta_0 \rho.$$

Posto $C_0 = R \vartheta_0$, otteniamo la relazione espressa dalla legge di Boyle-Mariotte. Si noti che in condizioni isoterme un gas perfetto si comporta come un fluido perfetto barotropico con $g(\rho) = C_0 \rho$.

Definizione 4.9. *Dato un corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale, diciamo che evolve isentropicamente o in condizioni isentropiche se*

$$h(P, t) = h_0 = \text{costante} \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

Proposizione 4.4. *Se un gas perfetto ha costante uno dei due calori specifici ed evolve in condizioni isentropiche, si comporta come un fluido perfetto barotropico con $g(\rho) = C\rho^\gamma$ dove C è una costante positiva e $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.*

4.4 Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete.

Supponiamo di avere un fluido perfetto in quiete nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti, come abbiamo visto, si riduce a

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \text{grad}p, \quad (4.4.1)$$

dove possiamo riguardare ρ , \vec{F} , p indipendenti dal tempo ossia $\rho = \rho(P)$, $\vec{F} = \vec{F}(P)$, $p = p(P)$.

Supponiamo $\vec{F} \in \mathcal{C}(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(S)$, dove S è la regione occupata dal fluido.

Dalla (4.4.1) discende immediatamente il seguente

Teorema 4.2. *Condizione necessaria affinché un fluido perfetto sia in quiete è che $\rho \vec{F}$ provenga da un potenziale scalare, ossia che esista un campo scalare $U \in \mathcal{C}^1(S)$ tale che in S*

$$\rho \vec{F} = \text{grad}U.$$

Dunque l'equazione fondamentale della statica si riduce a :

$$\text{grad}(U - p) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui deduciamo che la pressione e il potenziale da cui proviene $\rho \vec{F}$ differiscono per una costante ossia

$$p = U + c \quad \text{in } S \quad \text{con } c = \text{costante}. \quad (4.4.2)$$

Abbiamo perciò ottenuto la seguente

Proposizione 4.5. *Per un fluido perfetto in quiete gli insiemi di livello della pressione, detti superfici isobariche, coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene il campo vettoriale $\rho \vec{F}$ con \vec{F} densità delle forze esterne di massa ossia le superfici isobariche coincidono con le superfici equipotenziiali.*

Consideriamo un fluido perfetto incomprimibile che schematizzi un liquido reale (ad esempio acqua) contenuto in un recipiente rigido aperto. Indicata con S la regione occupata dal fluido, avremo:

$$\partial S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

con Σ_1 costituita dalle pareti materiali rigide del recipiente e Σ_2 superficie di separazione tra il fluido e l'aria, detta *superficie libera*. E' evidente che Σ_2 è una superficie isobarica poiché i suoi punti sono soggetti alla pressione atmosferica che si può riguardare costante in regioni limitate dello spazio.

Potremmo anche assumere che il recipiente sia immerso nel vuoto oppure che il recipiente sia chiuso e che il liquido in esso contenuto non ne raggiunga il coperchio e sia sotto vuoto. In tal caso la superficie libera Σ_2 è ancora una superficie isobarica poiché tutti i suoi punti sono soggetti a pressione nulla.

Supponiamo inoltre che il fluido perfetto incomprimibile sia omogeneo, pesante e in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

Ci proponiamo di determinarne la superficie libera e di stabilire la cosiddetta **Legge di Stevino per la pressione**.

Osserviamo in primo luogo che se il fluido incomprimibile è omogeneo, la sua densità di massa è costante tanto in condizioni di quiete che di moto. Determiniamo dapprima la superficie libera del fluido considerato, avendo introdotto il riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$, fisso rispetto ad un osservatore terrestre, con l'asse Ox_3 verticale ascendente.

Poiché le uniche forze esterne di massa agenti sono le forze peso, abbiamo:

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3,$$

dove con g denotiamo l'accelerazione di gravità.

Essendo la densità di massa costante, si ha che $\rho \vec{F}$ proviene da un potenziale dato da

$$U = -\rho g x_3$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero.

D'altra parte, le superfici isobariche sono anche superfici equipotenziali, ossia insiemi di livello per il potenziale, e dunque sono porzioni di piani orizzontali di equazione $x_3 = \text{costante}$. In particolare, anche Σ_2 , essendo una superficie isobarica, è una porzione di piano orizzontale.

Vediamo ora di stabilire la Legge di Stevino sempre per lo stesso fluido.

Dalla (4.4.2) deduciamo:

$$p = -\rho g x_3 + c \quad \text{con } c = \text{costante} . \quad (4.4.3)$$

Per determinare il valore della costante c , prendiamo l'origine O dell'asse Ox_3 sulla base del recipiente nel quale il liquido è contenuto. I punti di Σ_2 abbiano

quota h e indichiamo con p_a la pressione atmosferica, ossia la pressione su Σ_2 . Nei punti di Σ_2 abbiamo quindi:

$$p_a = -\rho gh + c$$

da cui

$$c = p_a + \rho gh.$$

Sostituendo nella (4.4.3), deduciamo:

$$p = \rho g(h - x_3) + p_a.$$

Tale relazione è detta **Legge di Stevino** e stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un fluido perfetto incomprimibile, omogeneo, pesante, contenuto in un recipiente aperto, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ovviamente se la superficie libera del fluido è a contatto col vuoto $p_a = 0$.

Vediamo ora di determinare la superficie libera per un fluido perfetto incomprimibile, omogeneo, pesante, contenuto in un recipiente aperto, che sia in quiete rispetto ad un osservatore solidale con il recipiente stesso nell'ipotesi che quest'ultimo sia in moto rispetto ad un osservatore terrestre.

Limitiamoci a considerare due casi.

Caso 1

Il recipiente si muove rispetto all'osservatore terrestre di moto traslatorio rettilineo con accelerazione costante orizzontale \vec{a}_0 .

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre il riferimento con l'asse Ox_3 diretto come la verticale ascendente e l'asse Ox_2 parallelo e concorde con \vec{a}_0 . Poiché il moto del recipiente rispetto all'osservatore terrestre (riguardato come un osservatore inerziale) non è traslatorio rettilineo uniforme, l'osservatore solidale con il recipiente, rispetto al quale il fluido è in quiete, non è inerziale e perciò nell'esaminare le forze esterne di massa agenti sul fluido, dobbiamo tener conto, oltre che delle forze peso, anche delle forze apparenti. Tuttavia queste si riducono alle sole forze di trascinamento perché le forze di Coriolis sono nulle, essendo il fluido in quiete rispetto all'osservatore non inerziale. Essendo poi il moto di questo osservatore traslatorio rispetto a quello terrestre, l'accelerazione di trascinamento delle particelle del fluido è coincidente con \vec{a}_0 . Dunque

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3 - \rho a_0 \vec{e}_2.$$

Poiché $\rho = \text{costante}$, deduciamo che $\rho \vec{F}$ proviene dal potenziale U dato da

$$U = -\rho g x_3 - \rho a_0 x_2, \quad (4.4.4)$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero. Allora per determinare la forma della superficie libera Σ_2 , che, essendo una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale, è sufficiente determinare le superfici di livello del potenziale U . Dalla (4.4.4) vediamo che tali superfici sono il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3) \in S$ tali che

$$\rho g x_3 + \rho a_0 x_2 = c,$$

con c costante, ossia tali che

$$g x_3 + a_0 x_2 = c,$$

dove abbiamo indicato ancora con c la costante $\frac{c}{\rho}$.

Le superfici equipotenziali sono perciò il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3) \in S$ tali che

$$x_3 = -\frac{a_0}{g} x_2 + c,$$

cioè porzioni di piani paralleli all'asse Ox_1 .

Se consideriamo l'intersezione di uno di tali piani con il piano Ox_2x_3 , di equazione $x_1 = 0$, questa risulta la retta giacente nel piano Ox_2x_3 di equazione

$$x_3 = -\frac{a_0}{g} x_2 + c,$$

avente pendenza $m = -\frac{a_0}{g}$.

Allora le superfici isobariche, e quindi anche la superficie libera, sono porzioni di piani inclinati sull'orizzontale.

Caso 2

Il recipiente si muove di moto rotatorio uniforme con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un asse verticale fisso rispetto ad un osservatore terrestre.

Scegliamo il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre in modo che l'asse Ox_3 coincida con l'asse di rotazione e sia orientato come la verticale ascendente. Il fluido è in quiete rispetto all'osservatore solidale con il recipiente, osservatore che non è inerziale poichè si muove di moto rotatorio uniforme rispetto a quello terrestre. Dovremo dunque tener conto delle forze apparenti che si riducono alle sole forze centrifughe dal momento che le forze di Coriolis non danno alcun contributo nel caso di quiete.

Si ha perciò:

$$\rho \vec{F}(P) = -\rho g \vec{e}_3 + \rho \omega^2 (P - P^*)$$

dove P^* è la proiezione ortogonale di P sull'asse di rotazione, cioè sull'asse Ox_3 . Tenendo presente che ρ è costante, deduciamo allora che il potenziale ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} U &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{|P - P^*|^2}{2} \\ &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

a meno di una costante additiva arbitraria.

Poiché Σ_2 è una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale e per la (4.4.5) risulta il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3) \in S$ tali che

$$\rho g x_3 = \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} + c,$$

ossia tali che

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) + c,$$

dove abbiamo indicato ancora con c la costante $\frac{c}{\rho g}$.

La superficie libera in questo secondo caso è dunque una porzione di paraboloide di rotazione attorno all'asse Ox_3 .

Consideriamo ora un fluido perfetto barotropico ed introduciamo una nuova definizione.

Definizione 4.10. *Dato un fluido perfetto barotropico, è chiamata entalpia la seguente funzione della pressione, definita a meno di una costante additiva arbitraria:*

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{g^{-1}(p)}.$$

In condizioni di quiete la pressione dipende solo da P e quindi anche l'entalpia viene a dipendere solo da P tramite la pressione. Otteniamo perciò

$$\text{grad} \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \text{grad} p = \frac{1}{g^{-1}(p)} \text{grad} p = \frac{\text{grad} p}{\rho}.$$

D'altra parte l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti fornisce:

$$\vec{F} = \frac{\text{grad} p}{\rho},$$

da cui, per il precedente risultato, discende:

$$\vec{F} = \text{grad} \mathcal{P}. \quad (4.4.6)$$

Come conseguenza della (4.4.6), si ha il seguente

Teorema 4.3. *Dato un fluido perfetto barotropico, condizione necessaria affinché sia in quiete è che la densità delle forze esterne di massa \vec{F} provenga da un potenziale, cioè che esista un campo scalare $U_1 \in \mathcal{C}^1(S)$ tale che in S*

$$\vec{F} = \text{grad}U_1.$$

Osservazione 4.6. Se in luogo di un fluido perfetto barotropico abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, sussiste lo stesso teorema perché, essendo ρ costante, l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti si può scrivere come:

$$\vec{F} = \text{grad}\frac{p}{\rho}.$$

Grazie alla (4.4.6) ed al teorema 4.3, deduciamo:

$$\text{grad}(U_1 - \mathcal{P}) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui

$$\mathcal{P} = U_1 + c_1 \quad \text{in } S \tag{4.4.7}$$

con $c_1 = \text{costante}$.

Poiché le superfici isobariche sono anche insiemi di livello per l'entalpia, otteniamo la seguente

Proposizione 4.6. *Per un fluido perfetto barotropico in quiete le superfici isobariche coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene la densità delle forze esterne di massa e sono quindi anche superfici equipotenziali.*

D'altra parte, per la relazione tra pressione e densità, le superfici nei punti delle quali è costante la densità, dette *superfici isopicnotiche*, sono anche superfici isobariche e perciò sono anch'esse superfici equipotenziali.

ESEMPI

Determiniamo l'entalpia ed alcuni interessanti risultati relativi alla quiete rispetto ad un osservatore terrestre per due classi di fluidi perfetti barotropici.

Esempio 4.1.

Come abbiamo visto, un gas perfetto in condizioni isoterme si comporta come un fluido barotropico e si ha:

$$p = C_0 \rho,$$

dove si è posto $C_0 = R\vartheta_0$ (costante positiva).

Procuriamoci l'entalpia, tenendo presente che nel nostro caso $g^{-1}(p) = \frac{p}{C_0}$:

$$\mathcal{P}(p) = C_0 \int \frac{dp}{p} = C_0 \ln p + \text{costante}.$$

Supponiamo allora di avere un gas perfetto in condizioni isoterme, soggetto solo alle forze peso, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Fissiamo come riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine O appartenente alla regione occupata dal gas e con l'asse Ox_3 verticale ascendente. Ci proponiamo di studiare come varia la pressione in tale gas al variare della quota.

Per quanto abbiamo visto relativamente alla quiete di un fluido barotropico, sappiamo che le superfici isobariche sono porzioni di piani orizzontali poiché $U_1 = -gx_3 + \text{costante}$. Se teniamo presente la (4.4.7) e l'espressione dedotta prima per l'entalpia, otteniamo:

$$C_0 \ln p = -gx_3 + c_1, \quad (4.4.8)$$

dove in c_1 abbiamo conglobato la costante inessenziale che compare nell'espressione di \mathcal{P} . Vediamo di determinare la costante c_1 .

A tal fine indichiamo con p_0 il valore che la pressione assume nei punti del gas che sono a quota $x_3 = 0$. Ponendo in (4.4.8) $x_3 = 0$, deduciamo:

$$c_1 = C_0 \ln p_0.$$

Sostituendo nella (4.4.8), abbiamo

$$C_0 (\ln p - \ln p_0) = -gx_3$$

da cui

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{C_0} x_3. \quad (4.4.9)$$

D'altra parte per $x_3 = 0$ anche la densità di massa assume un valore costante ρ_0 e dunque per $x_3 = 0$ si ha

$$p_0 = C_0 \rho_0 \quad \implies \quad C_0 = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Inserendo nella (4.4.9) l'espressione ottenuta per c , otteniamo

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3,$$

da cui deduciamo

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3 \right\}, \quad (4.4.10)$$

nota come **legge barometrica**.

Tale legge stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un gas perfetto in condizioni isoterme, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore

terrestre.

In particolare la legge barometrica si applica alla pressione atmosferica quando siamo in condizioni isoterme.

Esempio 4.2.

Consideriamo ora un gas perfetto in condizioni isentropiche per il quale uno dei due calori specifici sia costante. In tali ipotesi la pressione ha la seguente forma:

$$p = C \rho^\gamma \quad (4.4.11)$$

con $C =$ costante positiva, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} =$ costante > 1 , C_p e C_v calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante rispettivamente.

Dunque il gas perfetto in condizioni isentropiche si comporta come un fluido perfetto barotropico con $f(\rho) = C \rho^\gamma$.

Grazie alla (4.4.11), si ottiene che la densità di massa è data da

$$\rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

A questo punto procuriamoci l'entalpia:

$$\mathcal{P}(p) = C^{\frac{1}{\gamma}} \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \text{costante}. \quad (4.4.12)$$

Supponiamo ora che il gas perfetto in condizioni isentropiche sia pesante ed in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ci proponiamo di stabilire come varia la pressione al variare della quota, avendo fissato come riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine O appartenente alla regione occupata dal gas e l'asse Ox_3 verticale ascendente. Se teniamo conto delle (4.4.7), (4.4.12), abbiamo:

$$C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -gx_3 + c_2. \quad (4.4.13)$$

Ponendo nella (4.4.13) $x_3 = 0$ e denotando con p_0 il valore della pressione nei punti a quota zero, otteniamo:

$$c_2 = C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Sostituiamo il valore trovato per c_2 nella (4.4.13) e dividiamo entrambi i membri della relazione ottenuta per $C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Deduciamo allora:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (4.4.14)$$

D'altra parte, se indichiamo con ρ_0 la densità di massa (costante) per $x_3 = 0$, abbiamo

$$p_0 = C \rho_0^\gamma \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

La sostituzione di C nella (4.4.14) porta alla relazione

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

che si può scrivere nella forma:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right],$$

da cui infine

$$p = p_0 \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (4.4.15)$$

La (4.4.15) esprime la legge con cui varia la pressione al variare della quota per un gas perfetto in condizioni isentropiche, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

In particolare tale legge si applica alla pressione atmosferica quando siamo in condizioni isentropiche.

4.5 Altre proprietà dei fluidi perfetti.

Introduciamo dapprima la seguente definizione di carattere generale

Definizione 4.11. *Diciamo che un corpo continuo, il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, si muove di moto stazionario dal punto di vista meccanico se il suo moto è stazionario dal punto di vista cinematico ed ogni campo coinvolto nella descrizione del moto è stazionario.*

Stabiliamo il **I teorema di Bernoulli**

Teorema 4.4. *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico, in moto stazionario dal punto di vista meccanico. Se la densità delle forze esterne di massa \vec{F} proviene da un potenziale scalare U_1 , allora lungo ogni linea di flusso si ha*

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è barotropico.

Dimostrazione

Osserviamo in primo luogo che, essendo il moto stazionario, $\vec{v}' = \vec{0}$ in S per cui:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (4.5.1)$$

D'altra parte, si può dimostrare che

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{C}^1(S) : \quad \text{grad } \vec{u} \cdot \vec{u} = \text{rot } \vec{u} \times \vec{u} + \text{grad } \frac{\vec{u}^2}{2}. \quad (4.5.2)$$

Grazie alla (4.5.2), la (4.5.1) si scrive come:

$$\dot{\vec{v}} = \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti (4.2.1) assume la forma

$$\rho (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}) = \rho \vec{F} - \text{grad } p. \quad (4.5.3)$$

Supponiamo dapprima che il fluido perfetto sia incomprimibile ed omogeneo per cui ρ è costante. Dividendo entrambi i membri della (4.5.3) per ρ e tenendo presente che $\vec{F} = \text{grad } U_1$, otteniamo:

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \vec{0}. \quad (4.5.4)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (4.5.4) per \vec{v} deduciamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, per il teorema 2.3, sfruttando l'implicazione 3) \implies 2), si ottiene la prima parte della tesi.

Assumiamo ora che il fluido perfetto sia barotropico. Dividendo entrambi i membri della (4.5.3) per ρ e tenendo presente che $\text{grad } \frac{p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}$, si ha:

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \vec{0}. \quad (4.5.5)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (4.5.5) per \vec{v} deduciamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, ancora per il teorema 2.3, si ottiene anche la seconda parte della tesi.

Vediamo ora di stabilire un risultato conseguenza del I teorema di Bernoulli, ossia il **Teorema delle tre altezze**.

Teorema 4.5. *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico rispetto ad un osservatore terrestre e soggetto soltanto alle forze peso. Allora, se l'asse verticale Ox_3 è orientato come la verticale ascendente, lungo ogni linea di flusso si ha:*

$$\frac{\vec{v}^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{costante}, \quad (4.5.6)$$

dove $\frac{\vec{v}^2}{2g}$ è detta altezza cinematica, $\frac{p}{\rho g}$ è detta altezza barometrica, x_3 è detta altezza geometrica.

Dimostrazione

Per ipotesi abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. Possiamo allora applicare il I teorema di Bernoulli, tenendo presente che, se ha l'asse Ox_3 è diretto come la verticale ascendente, $\vec{F} = -g \vec{e}_3$ e dunque \vec{F} proviene dal potenziale scalare $U_1 = -g x_3 + c$. Per il I teorema di Bernoulli abbiamo che lungo ogni linea di flusso:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g x_3 = \text{costante},$$

da cui, dividendo per g , otteniamo la (4.5.6).

Spieghiamo perchè i tre termini che compaiono nella (4.5.6) sono chiamati altezza cinematica, altezza barometrica, altezza geometrica rispettivamente.

$\frac{\vec{v}^2}{2g}$ rappresenta la quota da cui dovremmo lasciar cadere nel vuoto un punto materiale pesante per fargli acquistare una velocità di modulo v .

$\frac{p}{\rho g}$ rappresenta l'altezza che dovrebbe avere una colonna del fluido considerato, in quiete rispetto all'osservatore terrestre, con la superficie libera a pressione nulla, per esercitare sulla base della colonna una pressione pari a p (legge di Stevino).

x_3 rappresenta la quota della particella di fluido che stiamo considerando.

Stabiliamo ora il **II Teorema di Bernoulli**

Teorema 4.6. *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico. Se \vec{F} proviene da un potenziale U_1 ed anche il campo della velocità proviene da un potenziale cinetico $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$, allora in \mathcal{S} si ha:*

$$\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = C(t)$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = C(t)$$

se il fluido è barotropico, con $C(t)$ funzione del tempo.

Inoltre se il moto è stazionario dal punto di vista meccanico si ha:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è barotropico.

Dimostrazione

Considerata l'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi perfetti, dividiamone entrambi i membri per ρ :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (4.5.7)$$

Ma per la (4.5.2)

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v}' + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

D'altra parte

$$\vec{v} = \text{grad } \psi \quad \implies \quad \text{rot } \vec{v} = \vec{0}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{v}} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \frac{\partial \text{grad} \psi}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} \\
 &= \text{grad} \left(\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (4.5.7) e tenendo presente che $\vec{F} = \text{grad} U_1$, otteniamo

$$\text{grad} \left(\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \text{grad} U_1 - \frac{\text{grad} p}{\rho}. \quad (4.5.8)$$

D'altra parte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right),$$

per cui la (4.5.8) fornisce:

$$\text{grad} \left(\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \text{grad} \mathcal{P},$$

per cui dalla (4.5.8) si deduce:

$$\text{grad} \left(\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dall'annullarsi dei due gradienti otteniamo allora la tesi della prima parte del teorema.

Se poi supponiamo che il moto del fluido sia stazionario dal punto di vista meccanico, ne discende che $\vec{v} = \vec{v}(P)$ per cui $\psi' = 0$ in \mathcal{S} . Inoltre anche tutti gli altri campi non dipendono dal tempo e quindi $C(t)$ si riduce ad una costante.

Osservazione 4.10. Osserviamo che la II parte del II teorema di Bernoulli continua a sussistere se al campo \vec{v} imponiamo soltanto la condizione di irrotazionalità, cioè la condizione $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$ in \mathcal{S} .

Stabiliamo ora il seguente

Teorema 4.7. *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo o un fluido perfetto barotropico, in moto regolare. Allora durante il moto la circolazione si conserva, purché la densità delle forze esterne di massa \vec{F} provenga da un potenziale scalare.*

Dimostrazione

Se dividiamo per ρ entrambi i membri dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti e teniamo presente che $\vec{F} = \text{grad } U_1$, abbiamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad } U_1 - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (4.5.9)$$

D'altra parte, come abbiamo già ripetuto varie volte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right),$$

mentre se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}.$$

Se andiamo a sostituire nella (4.5.9), otteniamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left(U_1 - \frac{p}{\rho} \right)$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} (U_1 - \mathcal{P})$$

se il fluido è barotropico.

Perciò in entrambi i casi l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare e basta applicare il teorema di Kelvin stabilito nel Capitolo 2 per ottenere la tesi.

Capitolo 5

Fluidi viscosi classici

5.1 Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici.

Abbiamo visto che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale ed ha carattere di pressione. Diversi liquidi e gas reali sono schematizzabili con i fluidi perfetti (ad esempio l'acqua e l'aria).

D'altra parte, l'esperienza mostra che ci sono molti altri liquidi e gas per i quali, quando non sono in quiete o in moto rigido, lo sforzo non è puramente normale, ma possiede anche una componente di taglio. Gli sforzi di taglio tra l'altro rallentano il moto delle particelle le une rispetto alle altre.

In un certo senso una misura del moto relativo delle particelle è fornito dal gradiente della velocità, $\text{grad } \vec{v}$, o anche dalla sua parte simmetrica ossia dal tensore di velocità di deformazione

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}).$$

Per schematizzare il comportamento di molti liquidi e gas reali la relazione sforzo-deformazione dei fluidi perfetti è stata generalizzata, ed è stata introdotta la classe più ampia dei fluidi propriamente detti, che abbiamo definito nel capitolo precedente.

Ricordiamo che un *fluido propriamente detto* è un corpo continuo caratterizzato, dal punto di vista puramente meccanico, in ambito spaziale, dalla seguente relazione sforzo-deformazione:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}}, \quad (5.1.1)$$

con $\tilde{\hat{T}}$ funzione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ($\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$), $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta)$, con ϑ temperatura assoluta, e tale che $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta) = \tilde{0}$.

La presenza di questa funzione aggiuntiva è quella che dà luogo a sforzi di taglio, che però non sono presenti se il fluido si muove di moto rigido o è in quiete.

Come abbiamo già detto in precedenza, \widetilde{T} , fornita dall'esperienza, è definita parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy, mentre un fluido propriamente detto per il quale \widetilde{T} è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, viene chiamato non viscoso. I fluidi perfetti sono appunto fluidi non viscosi.

La più semplice sottoclasse dei fluidi viscosi propriamente detti è costituita dai *fluidi viscosi classici*, detti anche *fluidi viscosi lineari*.

Definizione 5.1. *Un fluido viscoso classico è un fluido viscoso propriamente detto per il quale \widetilde{T} è lineare rispetto a \widetilde{D} , cioè è della forma:*

$$\widetilde{T} = \widetilde{c} \cdot \widetilde{D}, \quad (5.1.2)$$

dove \widetilde{c} è un tensore del IV ordine, detto *tensore di viscosità*, dipendente dalla temperatura assoluta ϑ , cioè $\widetilde{c} = \widetilde{c}(\vartheta)$, che gode delle due proprietà seguenti:

- è simmetrico rispetto alla prima ed alla seconda coppia di indici,
- è isotropo.

La simmetria rispetto alla prima coppia di indici è conseguenza della simmetria di \widetilde{T} ; la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici è conseguenza della simmetria di \widetilde{D} .

Dunque in componenti:

$$\widehat{T}_{ij} = c_{ijrs} D_{rs}$$

con

$$c_{ijrs} = c_{jirs}, \quad c_{ijrs} = c_{ijsr}.$$

La proprietà di isotropia traduce matematicamente l'osservazione sperimentale che nei liquidi e gas reali che schematizziamo col modello di fluido viscoso classico le proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione.

Ora vogliamo vedere le conseguenze sulla forma di \widetilde{c} delle due proprietà di cui gode.

La prima proprietà comporta una riduzione del numero delle componenti indipendenti del tensore di viscosità. Infatti le componenti indipendenti di un generico tensore del IV ordine sono $3^4 = 81$, ma le proprietà di simmetria di \widetilde{c} riducono da 81 a 36 le sue componenti indipendenti.

Infatti diamo a i e j due valori fissati, e vediamo quante componenti indipendenti di \widetilde{c} abbiamo al variare di r e s . Per la simmetria rispetto alla seconda

coppia di indici, queste sono 6. D'altra parte, fissati r ed s , facendo variare i e j , le componenti indipendenti che otteniamo sono ancora 6, e dunque in totale le componenti indipendenti di \tilde{c} sono $6 \cdot 6 = 36$.

Vediamo ora le conseguenze dell'isotropia di \tilde{c} . A tale proposito si potrebbe dimostrare la seguente:

Proposizione 5.1. *L'insieme dei tensori isotropi del IV ordine è un sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori del IV ordine di dimensione 3, avente come base la terna*

$$(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)})$$

con $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$ tensori del IV ordine di componenti

$$\begin{aligned} A_{ijrs}^{(1)} &= a_{ij} a_{rs} & (\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} &= \tilde{a} \otimes \tilde{a}) \\ A_{ijrs}^{(2)} &= a_{ir} a_{js} \\ A_{ijrs}^{(3)} &= a_{is} a_{jr}. \end{aligned}$$

Con a_{ij} denotiamo, come è usuale, la componente di \tilde{a} di indici i e j . Poichè supponiamo sempre di utilizzare un riferimento cartesiano ortonormale allora

$$a_{ij} = a_{ji} = \delta_{ij}.$$

In base alla proposizione 5.1, \tilde{c} è una combinazione lineare di $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$, ossia è esprimibile in questa forma:

$$\tilde{c} = \alpha \tilde{A}^{(1)} + \beta \tilde{A}^{(2)} + \gamma \tilde{A}^{(3)} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (5.1.3)$$

Dunque le 36 componenti indipendenti di \tilde{c} si esprimono tutte tramite 3 scalari. Infatti:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{ir} a_{js} + \gamma a_{is} a_{jr} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ma d'altra parte, come abbiamo osservato prima, \tilde{c} gode di particolari proprietà di simmetria.

La proprietà di simmetria rispetto alla prima coppia di indici ci permette di asserire che le componenti di \tilde{c} sono in realtà esprimibili tramite due soli scalari. Infatti, scambiando gli indici i e j nell'espressione di cui sopra, deduciamo:

$$c_{jirs} = \alpha a_{ji} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir}.$$

Ma $c_{jirs} = c_{ijrs}$ e $a_{ji} = a_{ij}$; dunque:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir},$$

da cui sommando membro a membro:

$$2c_{ijrs} = 2\alpha a_{ij}a_{rs} + (\beta + \gamma)(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr})$$

da cui

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij}a_{rs} + \frac{\beta + \gamma}{2}(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}).$$

A questo punto poniamo

$$\alpha =: \lambda, \quad (\beta + \gamma)/2 =: \mu$$

ed otteniamo:

$$c_{ijrs} = \lambda a_{ij}a_{rs} + \mu (a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}). \quad (5.1.4)$$

Concludiamo che, per la proprietà di isotropia e per la simmetria rispetto alla prima coppia di indici, il tensore di viscosità è individuato tramite due soli scalari λ e μ .

Se sfruttiamo la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici perveniamo alla medesima conclusione.

E' chiaro che in generale, dipendendo \tilde{c} da ϑ , si ha anche

$$\lambda = \lambda(\vartheta), \quad \mu = \mu(\vartheta).$$

Questi sono detti *coefficienti di viscosità* e sono forniti dall'esperienza; dunque nelle equazioni in cui compaiono si riguardano come noti.

Se in particolare i coefficienti di viscosità λ e μ sono costanti, il fluido viscoso classico è detto *newtoniano*.

Vediamo allora quale forma viene ad assumere la relazione sforzo - deformazione per un fluido viscoso classico.

Ricordiamo che:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{T} \quad \text{con} \quad \tilde{T} = \tilde{c} \cdot \tilde{D}.$$

Ragionando per componenti:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= c_{ijrs} D_{rs} \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} D_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) D_{rs} \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + \mu (D_{ij} + D_{ji}) \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}. \end{aligned}$$

Nel passare dalla seconda alla terza uguaglianza abbiamo tenuto conto che:

$$\delta_{rs} D_{rs} = D_{rr} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \operatorname{tr}(\tilde{D}).$$

D'altronde $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$, da cui

$$\text{tr}(\tilde{D}) = D_{rr} = \frac{1}{2}(v_{r,r} + v_{r,r}) = v_{r,r} = \text{div } \vec{v}.$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la simmetria di \tilde{D} .

Dunque \tilde{T} assume la forma seguente:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v})\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (5.1.5)$$

In definitiva la relazione sforzo-deformazione che caratterizza un fluido viscoso classico è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (5.1.6)$$

Tale relazione soddisfa a tutti e tre gli assiomi cui devono soddisfare le equazioni costitutive per un corpo continuo. E' evidente che sono soddisfatti l'assioma dell'azione locale e l'assioma di determinismo, mentre per quanto riguarda l'assioma di obiettività, si potrebbe dimostrare che è rispettato dalla relazione sforzo-deformazione dei fluidi viscosi classici perchè \tilde{D} si annulla in corrispondenza di un moto rigido e il tensore \tilde{c} è isotropo.

Osserviamo che se un fluido viscoso classico è incomprimibile, abbiamo:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \text{tr}(\tilde{D}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque per un fluido viscoso incomprimibile la relazione sforzo-deformazione si riduce a

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (5.1.7)$$

I fluidi viscosi classici incomprimibili sono perciò caratterizzati da un solo coefficiente di viscosità.

Per quanto concerne le equazioni costitutive che caratterizzano un fluido viscoso classico dal punto di vista termodinamico, queste sono le stesse che sussistono per un fluido perfetto distinguendo tra fluidi viscosi classici comprimibili e fluidi viscosi classici incomprimibili. Per tali equazioni rimandiamo al capitolo precedente.

5.2 Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico siano compatibili con il II assioma della termodinamica.

In primo luogo richiamiamo la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica nella forma di disequazione di Clausius-Duhem per un generico corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale:

$$\rho \left(\dot{\psi} + h\dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0. \quad (5.2.1)$$

Tale disequazione deve essere soddisfatta in \mathcal{S} , qualunque sia l'evoluzione del continuo.

Occupiamoci per il momento del termine $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$ e vediamo quale espressione viene ad assumere per un fluido viscoso classico comprimibile sfruttando la relazione sforzo-deformazione.

Poiché

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div} \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu\tilde{D} \Rightarrow T_{ij} = (\lambda \text{tr} \tilde{D} - p)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= T_{ij} D_{ij} \\ &= (\lambda \text{tr} \tilde{D} - p)\delta_{ij} D_{ij} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \\ &= -p \text{div} \vec{v} + \lambda (\text{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

ricaviamo

$$\text{div} \vec{v} = -\dot{\rho}/\rho.$$

Introduciamo poi la forma quadratica così definita per ogni tensore doppio simmetrico \tilde{D}

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}].$$

Allora dalla (5.2.2) deduciamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \dot{\rho}/\rho + 2\omega(\tilde{D}). \quad (5.2.3)$$

Nel caso di un fluido viscoso classico incomprimibile, tenendo conto che

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D}, \quad \text{tr} \tilde{D} = 0,$$

ricaviamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (5.2.4)$$

Per ottenere ora la condizione necessaria e sufficiente che cerchiamo, ci serve un risultato sulla forma quadratica $\omega(\tilde{D})$.

Premettiamo una definizione ed una proposizione.

Definizione 5.2. *La forma quadratica $\omega(\tilde{D})$ è semidefinita positiva se $\omega(\tilde{D}) \geq 0$ per ogni tensore doppio simmetrico \tilde{D} .*

Proposizione 5.2. *Ogni tensore doppio \tilde{T} si può decomporre nella forma seguente:*

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q}$$

dove α è uno scalare e \tilde{q} è un tensore doppio tale che $\text{tr} \tilde{q} = 0$.

Dimostrazione

Osserviamo che è sempre possibile decomporre un qualsiasi tensore doppio \tilde{T} nella forma seguente

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q},$$

ma il nostro scopo è di mostrare che è possibile prendere lo scalare α in modo tale che $\text{tr} \tilde{q} = 0$.

Teniamo conto che

$$\text{tr} \tilde{T} = \alpha \text{tr} \tilde{a} + \text{tr} \tilde{q} = 3\alpha + \text{tr} \tilde{q},$$

poiché

$$\text{tr} \tilde{a} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Otteniamo allora:

$$\text{tr} \tilde{q} = \text{tr} \tilde{T} - 3\alpha.$$

Per avere $\text{tr} \tilde{q} = 0$, occorre e basta prendere

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{tr} \tilde{T}.$$

La proposizione è così dimostrata.

Si noti che se \tilde{T} è isotropo, allora necessariamente deve essere $\tilde{q} = \tilde{0}$.

Stabiliamo ora un lemma che ci fornisce il risultato desiderato sulla forma quadratica $\omega(\tilde{D})$.

Lemma 5.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\omega(\tilde{D})$ sia semidefinita positiva è che i coefficienti λ e μ soddisfino alle seguenti disuguaglianze:*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Dimostrazione

Se utilizziamo la proposizione 5.2, possiamo scrivere:

$$\tilde{D} = \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} + \tilde{q}, \quad \text{con } \operatorname{tr} \tilde{q} = 0.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{D}) &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \left[\frac{1}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \cdot \left[\frac{1}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \left[\frac{1}{9} (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 \tilde{a} \cdot \tilde{a} + \tilde{q} \cdot \tilde{q} + \frac{2}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} \cdot \tilde{q} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{a} = \delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$$

e che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{q} = \delta_{ij} q_{ij} = q_{ii} = \operatorname{tr} \tilde{q} = 0.$$

Distinguiamo ora tra condizione sufficiente e condizione necessaria del lemma.

- Condizione sufficiente.

Per ipotesi:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0;$$

dobbiamo dimostrare che

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico.}$$

Con le ipotesi di segno su λ e μ e l'espressione trovata per $\omega(\tilde{D})$ la tesi è banalmente verificata.

- Condizione necessaria.

Per ipotesi

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico;}$$

dobbiamo dimostrare che

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0.$$

Sfruttiamo l'arbitrarietà del tensore \tilde{D} .

Supponiamo dapprima che \tilde{D} sia un tensore isotropo. Allora $\tilde{q} = \tilde{0}$, da cui segue:

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2} \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 \right] \geq 0 \quad \implies \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0.$$

Supponiamo ora che \tilde{D} sia un tensore doppio simmetrico a traccia nulla. Si ha:

$$\omega(\tilde{D}) = \mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \geq 0 \quad \implies \quad \mu \geq 0.$$

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema 5.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido viscoso classico comprimibile siano compatibili con il II Assioma della termodinamica è che*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

L'analogha condizione necessaria e sufficiente per un fluido viscoso classico incomprimibile è

$$\mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Dimostrazione.

Innanzitutto riscriviamo la disuguaglianza di Clausius-Duhem per un corpo continuo qualsiasi:

$$\rho (\dot{\psi} + h\dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Distinguiamo i due casi di fluido comprimibile e fluido incomprimibile.

1) **Fluido comprimibile.**

Condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia la compatibilità richiesta, è che, se si sostituiscono nella disequazione di cui sopra alle varie grandezze costitutive le loro espressioni conseguenza delle equazioni costitutive, questa sia soddisfatta in ogni punto ed in ogni istante qualunque sia l'evoluzione del fluido.

Ora:

$$\psi = \hat{\psi}(\vartheta, \nu) \quad \implies \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} \dot{\nu} = -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}.$$

D'altra parte:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) = \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}).$$

Inoltre sappiamo che $\vec{q} = -\beta \text{grad}\vartheta$.

Andando a sostituire queste relazioni nel primo membro della disequazione di Clausius-Duhem otteniamo:

$$\rho \left(-\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - 2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2 = -2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \vartheta)^2.$$

Le equazioni costitutive saranno compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se, qualunque sia l'evoluzione del fluido, si avrà in \mathcal{S} :

$$-2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \leq 0 \iff 2\omega(\tilde{D}) + \frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \geq 0.$$

Distinguiamo tra condizione sufficiente e condizione necessaria.

- Condizione sufficiente.

Per ipotesi $3\lambda + 2\mu \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\beta \geq 0$, e dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza di cui sopra è soddisfatta qualunque sia l'evoluzione del fluido.

E' manifestamente vero, poichè le prime due condizioni di segno ci dicono che $\omega(\tilde{D})$ è sempre ≥ 0 e d'altra parte, essendo ϑ strettamente positiva, anche il termine $\frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2$ è ≥ 0 in \mathcal{S} qualunque sia l'evoluzione del fluido.

- Condizione necessaria.

La disuguaglianza sia soddisfatta quale che sia l'evoluzione del fluido, e dimostriamo che $3\lambda + 2\mu \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Se il fluido evolve isotermicamente, ossia $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost} > 0$ in \mathcal{S} , allora essendo $\text{grad } \vartheta = \vec{0}$ in \mathcal{S} , abbiamo:

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D},$$

da cui le prime due condizioni di segno.

Se poi il fluido evolve muovendosi di moto rigido, $\tilde{D} = \tilde{0}$ durante il moto, dunque $\omega(\tilde{D}) = 0$ durante il moto, e quindi:

$$\frac{\beta}{\vartheta}(\text{grad } \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \text{ per ogni } \vartheta.$$

Da tale disequazione discende:

$$\beta \geq 0.$$

2) Fluido incompressibile.

Procediamo esattamente come nel caso precedente.

Consideriamo il primo membro della disequazione di Clausius-Duhem e vediamo che forma assume per un fluido viscoso classico incompressibile.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi = \hat{\psi}(\vartheta) &\implies \dot{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = -\hat{h} \dot{\vartheta}, \\ \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}, \\ \vec{q} &= -\beta \text{grad } \vartheta, \end{aligned}$$

In definitiva il primo membro della disuguaglianza di Clausius-Duhem diventa:

$$\rho \left(-\widehat{h} \dot{\vartheta} + \widehat{h} \dot{\vartheta} \right) - 2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 = -2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2.$$

Allora le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico incomprimibile sono compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se:

$$2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} + \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

quale che sia l'evoluzione del fluido.

- Condizione sufficiente.

Questa condizione è evidente, tenendo conto che per ipotesi $\mu \geq 0$, $\beta \geq 0$.

- Condizione necessaria.

Per ipotesi sussiste la disuguaglianza di cui sopra, e dobbiamo dimostrare che $\mu \geq 0$, $\beta \geq 0$. Sfruttiamo il fatto che tale disuguaglianza sussiste in \mathcal{S} quale che sia l'evoluzione del fluido. Se in particolare il fluido evolve isotermicamente, ossia $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$ in \mathcal{S} , allora $\text{grad} \vartheta = \vec{0}$ in \mathcal{S} per cui la disuguaglianza si riduce a

$$2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} \geq 0 \text{ in } \mathcal{S}$$

e questo per ogni \widetilde{D} simmetrico. Poichè $\widetilde{D} \cdot \widetilde{D} \geq 0 \quad \forall \widetilde{D}$, ne consegue $\mu \geq 0$.

Se invece il fluido evolve muovendosi di moto rigido, allora $\widetilde{D} = 0$ in \mathcal{S} , per cui dalla disuguaglianza discende:

$$\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad} \vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \implies \quad \beta \geq 0.$$

5.3 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile.

A questo punto ci proponiamo di impostare il problema del moto per i fluidi viscosi classici comprimibili.

In primo luogo vediamo quale forma assume la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \text{div} \widetilde{T}. \quad (5.3.1)$$

Teniamo conto che per un fluido viscoso classico comprimibile la relazione sforzo-deformazione è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D},$$

con $\lambda = \lambda(\vartheta)$, $\mu = \mu(\vartheta)$.

In particolare vogliamo vedere che forma assume $\operatorname{div} \tilde{T}$.

D'ora in poi supporremo $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$ o semplicemente $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$, (ossia che \vec{v} in \mathcal{S} rispetto a P ammetta gradiente primo e secondo continui mentre rispetto a t ammetta derivata prima continua) e che $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1$ rispetto a ϑ .

Determiniamo la componente iesima di $\operatorname{div} \tilde{T}$ tenendo conto che

$$T_{ij} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

e

$$\left(\operatorname{div} \tilde{T} \right)_i = T_{ij,j}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p)_{,j} \delta_{ij} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= [\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v})]_i - [\operatorname{grad} p]_i + 2 \left[\operatorname{div}(\mu \tilde{D}) \right]_i. \end{aligned}$$

Allora la prima equazione indefinita viene ad assumere la seguente forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p. \quad (5.3.2)$$

Se a questo punto poi supponiamo che il fluido che stiamo considerando sia newtoniano, ossia $\lambda, \mu = \text{cost}$, l'espressione di $\operatorname{div} \tilde{T}$ si modifica nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \tilde{T} \right)_i &= T_{ij,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,jj} + v_{j,ij}). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

D'altra parte:

$$v_{i,jj} + v_{j,ij} = \Delta v_i + v_{j,ji} = \Delta v_i + (v_{j,j})_{,i} = \Delta v_i + (\operatorname{div} \vec{v})_{,i}.$$

Sostituendo tale risultato nella (5.3.3), otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \tilde{T} \right)_i &= (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} + \mu \Delta v_i - p_{,i} = \\ &= (\lambda + \mu) [\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v})]_i + \mu (\Delta \vec{v})_i - (\operatorname{grad} p)_i. \end{aligned}$$

Allora, per un fluido viscoso classico comprimibile newtoniano, la prima equazione indefinita diventa:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p. \quad (5.3.4)$$

Tale equazione è nota come **equazione di Navier - Stokes**.

A questo punto, vediamo se per un fluido viscoso classico comprimibile è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.

In tale ambito alla prima equazione indefinita possiamo associare soltanto l'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

Facendo il bilancio fra numero di equazioni a disposizione e numero di incognite, abbiamo in totale 5 incognite scalari: v_i , ρ , p (più eventualmente ϑ se il fluido non è newtoniano), ma solo quattro equazioni scalari; di conseguenza non è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile rimanendo in ambito puramente meccanico, ma dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Dunque in primo luogo dobbiamo associare alle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \text{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{v}) + 2 \text{div}(\mu \tilde{D}) - \text{grad} p, \end{aligned}$$

l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica. Vediamo quale forma assume tale equazione per i fluidi viscosi classici comprimibili.

Scriviamo dapprima l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un generico corpo continuo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \text{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Ma, come abbiamo visto nel paragrafo precedente,

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D})$$

per cui l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un fluido viscoso classico comprimibile, se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione, è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \text{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}),$$

che viene chiamata **equazione dell'energia**.

Alle equazioni meccaniche e all'equazione dell'energia associamo inoltre le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta.$$

Le incognite del problema sono ora $v_i, p, \rho, k, (\text{o } \psi \text{ o } G), \vartheta, h, q_i$, e quindi sono in totale 11. Ma anche le equazioni scalari sono 11. Di conseguenza il problema termomeccanico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

A questo punto, per determinare effettivamente l'evoluzione del corpo reale schematizzato dal nostro modello, ossia per avere l'unicità della soluzione del problema, alle equazioni dovremo associare le condizioni ai limiti. Esse si distinguono in **condizioni iniziali** (ossia relative all'istante iniziale del moto), e **condizioni al contorno** (ossia relative alla frontiera della regione occupata dal fluido).

Ci limiteremo ora ad enunciare soltanto una condizione al contorno relativa al campo della velocità \vec{v} , che viene utilizzata spesso.

Supponiamo che $\partial S(t)$, ossia la frontiera della regione $S(t)$ occupata dal fluido all'istante $t, \forall t \in [t_0, t_1]$ sia costituita da pareti materiali rigide (ad esempio il caso di un fluido contenuto in un recipiente). Sia $\vec{V} = \vec{V}(P, t), P \in \partial S(t), t \in [t_0, t_1]$ l'atto di moto di tali pareti materiali rigide, che supponiamo noto.

L'esperienza ci mostra che, se abbiamo a che fare con un liquido o con un gas viscoso, non solo le sue particelle non possono penetrare attraverso le pareti, cosa che accade anche per un fluido perfetto, ma queste aderiscono alle pareti stesse. Di conseguenza, mentre per i fluidi perfetti si impone al campo \vec{v} la condizione (scalare) di impenetrabilità:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} \text{ versore normale a } \partial S(t) \text{ rivolto verso l'esterno di } S(t),$$

per i fluidi viscosi si richiede una condizione più restrittiva, detta di aderenza o anche *no-slip condition*, di carattere vettoriale:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V}. \quad (5.3.5)$$

Il fatto che questa condizione, suggerita dall'esperienza, sia più restrittiva di quella relativa ai fluidi perfetti corrisponde anche ad una precisa esigenza matematica. Infatti mentre nel caso dei fluidi perfetti, nelle equazioni che ne governano il moto, operano su \vec{v} solo operatori differenziali spaziali del I ordine, in questo caso operano su \vec{v} anche operatori differenziali spaziali del II ordine, come grad div o Δ .

5.4 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili.

Consideriamo ora un fluido viscoso classico incompressibile e vediamo come si può impostare il problema del suo moto.

In questo caso la prima equazione indefinita, se sfruttiamo la relazione sforzo deformazione che caratterizza questi fluidi:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D},$$

risulta molto più semplice.

Infatti, utilizzando i risultati ottenuti per i fluidi comprimibili, abbiamo:

$$\operatorname{div}\tilde{T} = -\operatorname{grad}p + 2\operatorname{div}(\mu\tilde{D}),$$

da cui dunque la prima equazione indefinita risulta:

$$\rho\dot{\vec{v}} = \rho\vec{F} + 2\operatorname{div}(\mu\tilde{D}) - \operatorname{grad}p. \quad (5.4.1)$$

Se poi il fluido in esame è incompressibile e newtoniano, ossia $\mu = \text{cost}$, rifacendo di nuovo i passaggi svolti precedentemente con $\mu, \lambda = \text{cost}$ e tenendo presente la condizione di incompressibilità, otteniamo:

$$\operatorname{div}\tilde{T} = -\operatorname{grad}p + \mu\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} + \mu\Delta\vec{v} = -\operatorname{grad}p + \mu\Delta\vec{v},$$

da cui dunque l'equazione (5.4.1) si riduce a:

$$\rho\dot{\vec{v}} = \rho\vec{F} + \mu\Delta\vec{v} - \operatorname{grad}p \quad (5.4.2)$$

che è nota come **equazione di Navier-Stokes per i fluidi newtoniani incompressibili**.

Ci proponiamo ora di dimostrare la seguente:

Proposizione 5.3. *Se μ è costante oppure il fluido evolve in condizioni isoterme, cioè $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$ in \mathcal{S} , è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione.

Oltre all'equazione di Navier-Stokes, in questo caso abbiamo a disposizione le equazioni:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div}\vec{v} = 0 & \text{condizione di incompressibilità} \\ \dot{\rho} = 0 & \text{equazione di continuità della massa.} \end{array}$$

In totale abbiamo 5 incognite scalari, cioè v_i , ρ , p , a fronte di 5 equazioni scalari, e dunque il problema del moto è impostato in modo completo.

E' importante rilevare che per i fluidi incomprimibili la pressione p è un'incognita puramente meccanica e quindi non è definita mediante un'equazione di stato. Naturalmente dobbiamo ora associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Le condizioni iniziali all'istante t_0 riguardano ρ e \vec{v} e sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho(P, t_0) &= \rho_0(P) \\ \vec{v}(P, t_0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(t_0),\end{aligned}$$

con $\rho_0(P)$ e $\vec{v}_0(P)$ campi noti.

Inoltre, abbiamo anche la condizione al contorno sul campo \vec{v} .

Se supponiamo che $\partial S(t)$ sia formato da pareti materiali rigide di cui conosciamo l'atto di moto $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$, con $P \in \partial S(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, poiché il fluido è viscoso, usualmente si associa la condizione di aderenza come nel caso precedente:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Se invece $\mu = \mu(\vartheta)$ e non siamo in condizioni isotermitiche, il problema del moto non può essere impostato in maniera completa rimanendo in ambito puramente meccanico, perchè nelle 5 equazioni scalari di cui sopra interviene ora anche l'incognita scalare ϑ .

Alle 5 equazioni scritte prima, dunque, è necessario aggiungere l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica per i fluidi viscosi classici incomprimibili:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (5.4.3)$$

Inoltre dobbiamo aggiungere anche le due equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

Nel complesso abbiamo ottenuto un problema descritto da 11 equazioni scalari in 11 incognite scalari: v_i , ρ , p , k (o ψ), ϑ , h , q_i .

A queste equazioni vanno poi associate le condizioni ai limiti (condizioni iniziali e condizioni al contorno).

Un caso particolare di fluido incomprimibile è quello di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, ossia tale che la densità di massa ρ dipende solo da t e non da P , ossia $\rho = \rho(t)$, anzichè $\rho = \rho(P, t)$, da cui segue che $\operatorname{grad} \rho = \vec{0}$ in \mathcal{S} . Ora però, essendo il fluido incomprimibile, è automaticamente soddisfatta la condizione:

$$\dot{\rho} = 0.$$

Ma:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \vec{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Di conseguenza se il fluido in esame è omogeneo, ρ non dipende neanche dal tempo, e dunque in definitiva $\rho = \text{cost} > 0$ in \mathcal{S} e quindi non è più un'incognita del problema.

Le equazioni che governano il moto di questo fluido sono puramente meccaniche, e sono date da:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{v}' + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}) &= \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p, \\ \text{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Le incognite scalari del problema sono 4: v_1, v_2, v_3, p .

In tal caso nelle condizioni iniziali interviene solo la velocità:

$$\vec{v}(P, t_0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(t_0),$$

ed abbiamo la condizione al contorno di aderenza se supponiamo $\partial S(t)$ costituito da pareti materiali rigide.

Poichè $\rho = \text{cost} > 0$, nella (5.4.4) possiamo dividere ambo i membri per ρ , ottenendo così l'equazione:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (5.4.5)$$

dove si pone $\nu := \mu/\rho$, che viene detto *coefficiente di viscosità cinematica*. L'equazione in questa forma è detta **equazione di Navier-Stokes per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo**.

Alla (5.4.5) va poi associata l'equazione:

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

Risolvere il problema del moto per questo fluido significa trovare una coppia (\vec{v}, p) con $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$ e $p \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ (o anche $\in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$) soddisfacente all'equazione (5.4.5), alla condizione di incomprimibilità in \mathcal{S} e alle corrispondenti condizioni ai limiti.

Si noti comunque, che una volta trovata una soluzione di questo problema, la pressione p non è individuata mai in maniera univoca, poichè nell'equazione (5.4.5) non compare esplicitamente ma soltanto tramite $\text{grad} p$. Dunque p è determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo $\alpha(t)$.

Infatti, se

$$p^* = p + \alpha(t), \quad \text{allora} \quad \text{grad} p^* = \text{grad} p$$

e dunque se (\vec{v}, p) è soluzione del problema, lo è anche (\vec{v}, p^*) . L'indeterminazione della pressione si verifica anche per i fluidi perfetti incomprimibili, come abbiamo visto nel capitolo precedente ed anche per fluidi propriamente detti più generali incomprimibili.

In ogni caso determinare la soluzione del problema in esame è difficile per la presenza nell'equazione di Navier-Stokes del termine non lineare $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}$. D'altra parte è possibile che il fluido che stiamo esaminando si muova così lentamente che le componenti di \vec{v} e $\text{grad } \vec{v}$ siano talmente piccole da poter trascurare nell'equazione (5.4.5) il termine $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}$. In questo caso l'equazione (5.4.5) si riduce alla seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (5.4.6)$$

Ogni moto che sia soluzione della equazione (5.4.6) (che risulta lineare) prende il nome di **moto di Stokes**.

Ci proponiamo ora di evidenziare alcune differenze di comportamento tra un fluido perfetto incomprimibile ed un fluido viscoso classico incomprimibile.

- Consideriamo la potenza delle forze interne ad un generico istante t per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = - \int_{S(t)} p \frac{\dot{\rho}}{\rho} dS = 0,$$

poiché, a causa dell'incomprimibilità, $\dot{\rho} = 0$.

Dunque per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Se invece prendiamo in considerazione un fluido viscoso classico incomprimibile: $\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}$ con $\mu \geq 0$ come conseguenza del II assioma della termodinamica. Dunque

$$\Pi_i(t) = -2 \int_{S(t)} \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per un fluido viscoso classico incomprimibile le forze interne costituiscono una sollecitazione dissipativa. A tal proposito richiamiamo la seguente definizione:

Definizione 5.3. *Si definisce sollecitazione dissipativa una sollecitazione la cui potenza sia ad ogni istante ≤ 0 .*

- Mettiamo in evidenza un'ulteriore differenza tra i due tipi di fluidi incompressibili.

Dapprima consideriamo un fluido perfetto incompressibile che ad ogni istante $t \in [t_0, t_1]$ durante il moto occupi la medesima regione S , la cui frontiera sia costituita da pareti materiali rigide e fisse. Assumiamo che non siano presenti forze esterne di massa per cui $\vec{F} = \vec{0}$.

Ci proponiamo di provare che nelle ipotesi in cui ci siamo posti l'energia cinetica T si conserva.

Infatti per il teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (5.4.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi_e(t) &= \int_S \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma \\ &= \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ma

$$\vec{f} \Big|_{\partial S} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\partial S} = -p \vec{n} \Big|_{\partial S}$$

da cui

$$\vec{f} \cdot \vec{v} \Big|_{\partial S} = -p \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$$

poiché le pareti che costituiscono il bordo di S sono fisse e il fluido è perfetto ($\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$).

Dalla (5.4.7), grazie ai risultati ottenuti, deduciamo:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

Se invece consideriamo un fluido viscoso classico incompressibile nelle stesse condizioni del fluido perfetto preso in considerazione prima, possiamo provare

facilmente che l'energia cinetica risulta una funzione non crescente del tempo.

Sussiste sempre l'equazione (5.4.7) e

$$\begin{aligned}\Pi_e(t) &= \int_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= -2 \int_S \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \, dS.\end{aligned}$$

Ma per la condizione di aderenza $\vec{v}|_{\partial S} = \vec{0}$ e per quanto stabilito in precedenza $\Pi_i \leq 0$.

Dunque

$$\frac{dT}{dt} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

- Per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, grazie al teorema di Kelvin, la circolazione si conserva purché \vec{F} provenga da un potenziale scalare. Infatti, come abbiamo visto nel capitolo precedente, in tal caso:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left(U_1 - \frac{p}{\rho} \right).$$

Consideriamo ora un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo per il quale \vec{F} provenga da un potenziale scalare U_1 . Se dividiamo entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per ρ , e teniamo presenti le ipotesi, deduciamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left(U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v}.$$

Non è perciò possibile applicare il teorema di Kelvin, a causa della presenza nella relazione scritta sopra del termine $\nu \Delta \vec{v}$ e dunque la circolazione non si conserva per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo soggetto a forze di massa la cui densità provenga da un potenziale scalare.

Capitolo 6

Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo

6.1 Impostazione del problema.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo. Supponiamo che, pur non essendo in moto stazionario, il fluido occupi una regione dello spazio che sia fissa rispetto all'osservatore. Tale ipotesi è fisicamente ragionevole se teniamo presente che un fluido incomprimibile schematizza un liquido reale. Se assumiamo che l'intervallo di moto sia $[0, +\infty)$, avremo dunque:

$$S(t) = S \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

con S chiusura di un dominio regolare dello spazio geometrico.

Inoltre, per l'ipotesi di incomprimibilità ed omogeneità, la densità di massa ρ è una costante positiva.

Come sappiamo, la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, esplicitando la relazione sforzo-deformazione per tale fluido e dividendo entrambi i membri per la costante ρ , assume la forma:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (6.1.1)$$

Se teniamo presente che

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v},$$

e per semplicità indichiamo ancora con p la pressione divisa per la densità di massa, cioè $\frac{p}{\rho}$, la (6.1.1) si scrive nel modo seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \tag{6.1.2}$$

cui associamo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S && \text{condizione iniziale} \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V} && \text{condizione al contorno,} \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

dove \vec{v}_0 e \vec{V} sono campi vettoriali assegnati.

Il problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incompressibile consiste nel determinare in $S \times [0, +\infty)$ una coppia (\vec{v}, p) con $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$ e $p \in \mathcal{C}^{1,0}(S \times [0, +\infty))$ che soddisfi le equazioni (6.1.2) in $S \times [0, +\infty)$ e le condizioni ai limiti (6.1.3).

Ovviamente affinché il problema ammetta soluzione è necessario che il dato iniziale e il dato al contorno soddisfino ad opportune condizioni di regolarità e compatibilità su cui non insistiamo.

In effetti, pur rimanendo sempre nell'ambito delle soluzioni classiche, potremmo anche alleggerire le ipotesi di regolarità su \vec{v} e p . Infatti è sufficiente assumere

$$\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^1(S \times [0, +\infty)), p \in \mathcal{C}^{1,0}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}(S \times [0, +\infty)).$$

Tuttavia nel seguito, per motivi di convenienza, supporremo verificate le condizioni di regolarità più forti. Premettiamo ora alcuni risultati preliminari.

6.2 Risultati preliminari.

Introduciamo la seguente

Definizione 6.1. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore per il tensore doppio \tilde{t} se esiste un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$ tale che

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Il vettore \vec{u} è detto autovettore del tensore \tilde{t} corrispondente all'autovalore λ .

Sia (\vec{e}_i) una base ortonormale per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$ e sia $[t_{ij}]$ la matrice 3×3 delle componenti del tensore \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_i) .

Ovviamente

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \iff t_{ij} u_j = \lambda u_i.$$

Ne discende la seguente

Proposizione 6.1. *Dato il tensore doppio \tilde{t} , λ è un autovalore per \tilde{t} se e solo se è un autovalore per la matrice $[t_{ij}]$ delle componenti del tensore rispetto ad una base ortonormale (\vec{e}_i) e \vec{u} è un autovettore del tensore \tilde{t} corrispondente all'autovalore λ se e solo se la terna (u_1, u_2, u_3) delle componenti di \vec{u} rispetto ad (\vec{e}_i) è un autovettore della matrice $[t_{ij}]$ corrispondente all'autovalore λ .*

Dunque la ricerca degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio è ricondotta alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice 3×3 delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale fissata.

Proviamo ora il seguente

Teorema 6.1. *Sia \tilde{S} un tensore simmetrico del II ordine. Allora esso ammette tre autovalori (reali): $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ed è sempre possibile trovare una base ortonormale di $\vec{\mathcal{E}}$ formata da autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.*

Dimostrazione

Fissata la base ortonormale (\vec{e}_i) , al tensore \tilde{S} è associata la matrice delle sue componenti $[S_{ij}]$, che è una matrice 3×3 reale e simmetrica. Per un noto teorema di algebra lineare tale matrice ha tre autovalori reali: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e dunque per la proposizione precedente anche il tensore \tilde{S} possiede gli stessi autovalori.

Inoltre, sempre per risultati noti sulle matrici, indicata con (E_1, E_2, E_3) la base canonica di \mathbb{R}^3 , è possibile trovare un'altra base ortonormale $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ di \mathbb{R}^3 formata da tre autovettori della matrice $[S_{ij}]$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Se $(\alpha_{1h}, \alpha_{2h}, \alpha_{3h})$ è la terna delle componenti canoniche di \vec{E}_h ($h = 1, 2, 3$), la terna (\vec{e}_h) di vettori di $\vec{\mathcal{E}}$ tali che

$$\vec{e}_h = \alpha_{ih} \vec{e}_i \quad h = 1, 2, 3$$

è una base ortonormale per $\vec{\mathcal{E}}$ e per la proposizione 6.1 i tre vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono autovettori di \tilde{S} corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Il teorema è così dimostrato.

Stabiliamo ora due lemmi che ci saranno utili nel paragrafo successivo.

Sia \tilde{S} un tensore doppio simmetrico. Come sappiamo, questo ammette tre autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Poniamo

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Dimostriamo il seguente

Lemma 6.1. *Dato il tensore doppio simmetrico \tilde{S} , si ha:*

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} \geq \lambda_{\min} |\vec{u}|^2 \quad \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Dimostrazione

Grazie al teorema 6.1, è possibile trovare una base ortonormale (\vec{e}_h) formata da autovettori di \tilde{S} corrispondenti ai tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, cioè tale che

$$\tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Preso un vettore $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, decomponiamolo rispetto alla base (\vec{e}_h) per cui:

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h (\tilde{S} \cdot \vec{e}_h) = \\ &= \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \lambda_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot (\lambda_1 \bar{u}_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1 (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) + \lambda_2 \bar{u}_2 (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) + \lambda_3 \bar{u}_3 (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1^2 + \lambda_2 \bar{u}_2^2 + \lambda_3 \bar{u}_3^2 \geq \lambda_{\min} (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2) = \lambda_{\min} |\vec{u}|^2. \end{aligned}$$

Il lemma è così dimostrato.

Proviamo un secondo lemma.

Lemma 6.2. *Sia S la chiusura di un dominio regolare di \mathcal{E} e siano \vec{w}, β un campo vettoriale e un campo scalare definiti in S . Se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

- $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(S)$;
- $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ in S ;

$$\bullet \quad \vec{w}|_{\partial S} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \beta|_{\partial S} = 0,$$

allora:

$$\int_S \text{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = 0.$$

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che per una nota proprietà dell'operatore divergenza si ha in S :

$$\text{div}(\beta \vec{w}) = \beta \text{div} \vec{w} + \text{grad} \beta \cdot \vec{w},$$

ma per ipotesi

$$\text{div} \vec{w} = 0 \quad \text{in } S$$

per cui la relazione precedente si riduce a:

$$\text{div}(\beta \vec{w}) = \text{grad} \beta \cdot \vec{w}.$$

Integrando su S e applicando il teorema della divergenza, otteniamo:

$$\int_S \text{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = \int_S \text{div}(\beta \vec{w}) \, dS = \int_{\partial S} \beta \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la terza ipotesi del lemma.

Il lemma è così dimostrato.

Osserviamo che il lemma continua a valere anche se $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}(S)$ e $\text{div} \vec{w} = 0$ in $\overset{\circ}{S}$.

6.3 Teorema di unicità.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire un teorema di unicità della soluzione del problema ai limiti (6.1.2), (6.1.3), considerato nel §6.1, che richiamiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div} \vec{v} &= 0 && \text{in } S \times [0, +\infty) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) && \forall P \in S \\ \vec{v}|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned}$$

Teorema 6.2. *Se (\vec{v}_1, p_1) e (\vec{v}_2, p_2) sono due soluzioni dello stesso problema ai limiti (6.1.2), (6.1.3), allora:*

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad p_1 = p_2 + \alpha(t) \quad \text{in } S \times [0, +\infty), \quad (6.3.1)$$

dove $\alpha(t)$ è una funzione arbitraria del tempo.

Dimostrazione

Poiché (\vec{v}_1, p_1) è soluzione del problema (6.1.2), (6.1.3), avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= \vec{F} - \text{grad } p_1 + \nu \Delta \vec{v}_1 \\ \text{div } \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_1(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S \\ \vec{v}_1 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Analogamente per (\vec{v}_2, p_2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= \vec{F} - \text{grad } p_2 + \nu \Delta \vec{v}_2 \\ \text{div } \vec{v}_2 &= 0 \\ \vec{v}_2(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S \\ \vec{v}_2 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Poniamo:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \alpha = p_1 - p_2. \tag{6.3.4}$$

Se sottraiamo membro a membro dalle equazioni (6.3.2) le corrispondenti (6.3.3) e usiamo le (6.3.4), otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{0} \quad \forall P \in S \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

D'altra parte, per la posizione fatta, abbiamo:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2. \tag{6.3.6}$$

Consideriamo ora nella prima equazione delle (6.3.5) il termine:

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

e sostituiamo a \vec{v}_1 in $\text{grad } \vec{v}_1$ l'espressione data dalla (6.3.6):

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1.$$

Allora la prima delle (6.3.5) assume la forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v}. \quad (6.3.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (6.3.7) per \vec{v} :

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (6.3.8)$$

Consideriamo separatamente i vari termini della (6.3.8).

Dapprima osserviamo che:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (6.3.9)$$

Esaminiamo ora il termine:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1.$$

Se denotiamo con $(v_i^{(1)})$ e $((\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i)$ le successioni delle componenti di \vec{v}_1 e $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$ rispettivamente rispetto alla base (\vec{e}_i) del riferimento associato all'osservatore, avremo:

$$(\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i = v_{i,j} v_j^{(1)}.$$

(Ovviamente abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Otteniamo allora

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = v_i v_{i,j} v_j^{(1)}. \quad (6.3.10)$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} v_i v_{i,j} &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial x_j} = \frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Poiché $\frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2$ è la j -esima componente di $\text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2}$, sostituendo il risultato trovato nella (6.3.10), arriviamo a

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1. \quad (6.3.12)$$

Prendiamo ora in esame:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = v_i v_{i,j}^{(2)} v_j. \quad (6.3.13)$$

(Ovviamente denotiamo con $(v_i^{(2)})$ la successione delle componenti di \vec{v}_2).

Se teniamo presente che

$$\text{grad } \vec{v}_2 = \tilde{D}_2 + \tilde{E}_2$$

con

$$\tilde{D}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}_2 + \text{grad}^T \vec{v}_2), \quad \tilde{E}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}_2 - \text{grad}^T \vec{v}_2),$$

la (6.3.13) diventa:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} &= (D_{ij}^{(2)} + E_{ij}^{(2)})v_i v_j \\ &= D_{ij}^{(2)} v_i v_j \\ &= \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

poichè la contraçione di due indici di emisimmetria con due di simmetria dà come risultato 0. Ovviamente abbiamo denotato con $(D_{ij}^{(2)})$ e $(E_{ij}^{(2)})$ le successioni delle componenti di \tilde{D}_2 e \tilde{E}_2 .

Consideriamo poi

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = v_{i,jj} v_i = (v_{i,j} v_i)_{,j} - v_{i,j} v_{i,j}. \quad (6.3.15)$$

D'altra parte:

$$(v_{i,j} v_i)_{,j} = (\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v})_{j,j} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v})$$

ed inoltre

$$v_{i,j} v_{i,j} = \text{grad } \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = |\text{grad } \vec{v}|^2.$$

Dunque la (6.3.15) assume la forma:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - |\text{grad } \vec{v}|^2. \quad (6.3.16)$$

A questo punto, se andiamo a sostituire nella (6.3.8) i risultati ottenuti in (6.3.9), (6.3.12), (6.3.14), (6.3.16) arriviamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} &= \\ = -\text{grad } \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - \nu |\text{grad } \vec{v}|^2. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Ora, fissato ad arbitrio $t \in [0, +\infty)$, integriamo entrambi i membri della (6.3.17), valutati all'istante t su S :

$$\begin{aligned} \int_S \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} \right] dS = \\ = \int_S \left[-\text{grad} \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \nu |\text{grad} \vec{v}|^2 \right] dS. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

La (6.3.18) si può poi scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS + \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS = \\ = - \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

equazione che sussiste $\forall t \in [0, +\infty)$.

D'altra parte, per il lemma 6.2

$$\int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS = 0, \quad \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

ed inoltre per il teorema della divergenza e la condizione al contorno cui soddisfa il campo \vec{v}

$$\int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS = \int_{\partial S} (\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Perciò la (6.3.19) si riduce a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = \\ = - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

Ma, tenendo presente che

$$\nu = \text{costante} > 0, \quad |\text{grad} \vec{v}|^2 \geq 0 \quad \text{in } S \times [0, +\infty),$$

abbiamo:

$$\nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Allora la (6.3.20) fornisce la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (6.3.21)$$

A questo punto rivolgiamo la nostra attenzione al campo tensoriale \tilde{D}_2 .

Osserviamo che $\forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$ il tensore doppio $\tilde{D}_2(P, t)$ è simmetrico e dunque ammette tre autovalori (reali): $\lambda_1(P, t)$, $\lambda_2(P, t)$, $\lambda_3(P, t)$. Fissati ad arbitrio $P \in S$ e $t \in [0, +\infty)$, poniamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) = \min\{\lambda_1(P, t), \lambda_2(P, t), \lambda_3(P, t)\}.$$

Per il lemma 6.1 abbiamo:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq \lambda_{\min}(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (6.3.22)$$

D'altra parte, per la condizione di incomprimibilità, si ha che $\text{tr } \tilde{D}_2 = \text{div } \vec{v}_2 = 0$ in $S \times [0, +\infty)$. Poiché è facile provare che, se una matrice reale e simmetrica ha traccia nulla, il suo autovalore più piccolo è minore o uguale a zero, deduciamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) \leq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty).$$

E' allora conveniente porre:

$$\lambda_{\min}(P, t) = -\gamma(P, t), \quad \gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e perciò la (6.3.22) assume la forma:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq -\gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (6.3.23)$$

Fissiamo poi ad arbitrio $\bar{t} \in [0, +\infty)$ e poniamo

$$h = 2 \sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t).$$

Osserviamo che $h \geq 0$ perché $\gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$. Inoltre possiamo mostrare che $h < +\infty$ perché, essendo $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$ per definizione di soluzione, $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^1(S \times [0, \bar{t}])$ e dunque $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$. Infatti, fissiamo $(P, t) \in S \times [0, \bar{t}]$ e sia $\vec{e}(P, t)$ autovettore con modulo unitario di $\tilde{D}_2(P, t)$ corrispondente a $\lambda_{\min}(P, t)$. Dunque

$$\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t) = \lambda_{\min}(P, t) \vec{e}(P, t),$$

da cui

$$|\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t)| = |\lambda_{\min}(P, t)| = \gamma(P, t).$$

D'altra parte si potrebbe provare che se \tilde{t} è un tensore doppio e \vec{u} un vettore si ha:

$$|\tilde{t} \cdot \vec{u}| \leq |\tilde{t}| |\vec{u}|.$$

Allora

$$\forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}] \quad \gamma(P, t) \leq |\tilde{D}_2(P, t)|.$$

Poiché $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$, le sue componenti e di conseguenza la sua norma sono limitate in $S \times [0, \bar{t}]$. Perciò

$$\sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t) < +\infty$$

e quindi $h < +\infty$.

Con la posizione fatta, dalla (6.3.23) discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \frac{h}{2} |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}]. \quad (6.3.24)$$

Allora dalla (6.3.21), tenendo presente la (6.3.24), deduciamo la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq \frac{h}{2} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq h \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (6.3.25)$$

Se poniamo:

$$\|\vec{v}\|^2(t) = \int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS,$$

la (6.3.25) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) \leq h \|\vec{v}\|^2(t) \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (6.3.26)$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della (6.3.26) per e^{-ht} , otteniamo:

$$e^{-ht} \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) - h e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (6.3.27)$$

Dalla (6.3.27) deduciamo che la funzione $e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)$ è una funzione del tempo non crescente in $[0, \bar{t}]$.

All'istante \bar{t} si ha perciò

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq \|\vec{v}\|^2(0). \quad (6.3.28)$$

Ma \vec{v} soddisfa alla condizione iniziale

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{0} \quad \forall P \in S,$$

da cui

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = 0.$$

Dunque la (6.3.28) si riduce a

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq 0 \quad \implies \quad \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) = 0.$$

Otteniamo perciò:

$$\int_S |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 dS = 0 \quad \implies \quad |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 = 0 \quad \forall P \in S,$$

da cui:

$$\vec{v}(P, \bar{t}) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

Poiché \bar{t} è arbitrario in $[0, +\infty)$, concludiamo che

$$\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e dunque:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \text{in } S \times [0, +\infty).$$

Per completare la dimostrazione del teorema di unicità ci resta da provare che $\alpha = \alpha(P, t)$ risulta una funzione arbitraria del tempo.

Dall'equazione (6.3.7), tenendo presente che $\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$, otteniamo:

$$\text{grad } \alpha = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui deduciamo che α non dipende da P ed è una funzione arbitraria del tempo.

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.

Nel prossimo paragrafo stabiliremo un teorema di stabilità per il problema ai limiti (6.1.2), (6.1.3), nell'ipotesi che le forze di massa provengano da un potenziale scalare e che il bordo di S sia fisso.

6.4 Teorema di stabilità.

Supponiamo ancora di avere un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo che durante il moto occupi la regione S che non varia al trascorrere del tempo.

Assumiamo inoltre che la densità delle forze esterne di massa \vec{F} provenga dal potenziale scalare U_1 .

Ovviamente abbiamo: $\rho = \text{costante}$ positiva.

Le equazioni che governano il moto del fluido sono dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \text{grad} \left(U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (6.4.1)$$

cui associamo le condizioni ai limiti (6.1.3) con $\vec{V} = \vec{0}$.

Se introduciamo la pressione modificata p^* così definita

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1$$

e la sostituiamo nella (6.4.1), il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (6.4.2)$$

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S, \quad \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} = \vec{0}. \quad (6.4.3)$$

Dimostriamo il seguente

Teorema 6.3. *Se (\vec{v}, p^*) è soluzione del problema (6.4.2), (6.4.3), allora*

$$\|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

dove $k = k(S, \nu)$ è una costante positiva.

Dimostrazione

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima delle (6.4.2) per \vec{v} ottenendo così:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p^* \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{in } S \times [0, +\infty). \quad (6.4.4)$$

Consideriamo singolarmente i termini della (6.4.4).

In primo luogo abbiamo

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (6.4.5)$$

Se poi si tiene presente il risultato ottenuto nel teorema di unicità per il termine: $\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$, otteniamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}. \quad (6.4.6)$$

Sempre per il risultato ottenuto nel teorema di unicità, abbiamo:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - |\text{grad } \vec{v}|^2. \quad (6.4.7)$$

Se sostituiamo nella (6.4.4) i risultati di (6.4.5), (6.4.6), (6.4.7) e integriamo su S l'equazione risultante, otteniamo $\forall t \in [0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v} dS \\ &= - \int_S \text{grad } p^* \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Ma il secondo integrale al I membro così come il primo integrale al II membro della (6.4.8) sono nulli per il lemma 6.2, mentre il secondo integrale al II membro è nullo per il teorema della divergenza e per il fatto che \vec{v} è nullo sul bordo di S ad ogni istante.

Dunque la (6.4.8) si riduce a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = -\nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (6.4.9)$$

Richiamiamo ora (senza dimostrarla) una disuguaglianza che svolge un ruolo importante in Fisica Matematica, **la disuguaglianza di Poincaré**.

Proposizione 6.2. *Sia S la chiusura di un dominio regolare e sia $\vec{u} = \vec{u}(P)$ una campo vettoriale di classe $C^1(S)$ tale che $\vec{u}|_{\partial S} = \vec{0}$. Allora*

$$\int_S |\vec{u}|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{u}|^2 dS,$$

dove γ è una costante positiva dipendente solo dalla geometria, cioè $\gamma = \gamma(S)$, detta **costante di Poincaré**.

Ritorniamo ora alla dimostrazione del teorema, applicando la disuguaglianza di Poincaré al campo $\vec{v}(\cdot, t)$ dove t è un istante arbitrario fissato in $[0, +\infty)$. E' immediato verificare che per ogni t fissato il campo $\vec{v}(\cdot, t)$ soddisfa alle ipotesi della proposizione appena enunciata per cui possiamo scrivere:

$$\int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{v}(P, t)|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

da cui

$$\int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \geq \frac{1}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \text{in } [0, +\infty). \quad (6.4.10)$$

Se allora sostituiamo la disuguaglianza (6.4.10) nella (6.4.9), otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq -\frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

ossia

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (6.4.11)$$

Se poniamo $k = \frac{\nu}{\gamma}$, la (6.4.11) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (6.4.12)$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri della (6.4.12) per e^{2kt} per cui deduciamo:

$$e^{2kt} \frac{d}{dt} \left(\int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k e^{2kt} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (6.4.13)$$

Dalla (6.4.13) discende che la funzione $e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)$ è una funzione del tempo non crescente.

Dunque

$$e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t) \leq \|\vec{v}\|^2(0) \implies \|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}\|^2(0) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

D'altra parte

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = \int_S |\vec{v}_0(P)|^2 dS = \|\vec{v}_0\|^2.$$

L'ultima disuguaglianza fornisce così

$$\|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}_0\|^2 \implies \|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Il teorema di stabilità è dunque provato.

Tale teorema è detto di *stabilità* perché la norma in $L^2(S)$ di $\vec{v}(\cdot, t)$ decresce esponenzialmente al trascorrere del tempo e tende a zero per $t \rightarrow +\infty$.

Capitolo 7

Moti di Poiseuille e di Couette per un fluido newtoniano incomprimibile

7.1 Premesse.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico per cui

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad S(t) = S, \quad \vec{v} = \vec{v}(P), \quad \vec{F} = \vec{F}(P), \quad p = p(P).$$

Poiché \vec{v} non dipende da t , si ha:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Allora il moto stazionario di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo è governato dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (7.1.1)$$

Nelle equazioni scritte sopra non compare il tempo e dunque al sistema non associamo condizioni iniziali, ma solo condizioni al contorno.

Se assumiamo che ∂S sia composto da pareti materiali rigide, possiamo imporre la condizione di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{V}, \quad (7.1.2)$$

con $\vec{V} = \vec{V}(P)$ atto di moto delle pareti che costituiscono ∂S .

Risolvere il problema al contorno (7.1.1), (7.1.2) significa determinare le coppie (\vec{v}, p) dove \vec{v} e p sono campi definiti su S , $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(S)$, (\vec{v}, p) è soluzione del sistema (7.1.1) e \vec{v} soddisfa alla condizione al contorno (7.1.2). In effetti, pur rimanendo nell'ambito delle soluzioni classiche, le condizioni di regolarità su \vec{v} e p possono essere indebolite, ma su ciò per il momento non insistiamo.

Se la geometria della regione S è particolarmente semplice è possibile determinare soluzioni esatte del problema (7.1.1), (7.1.2).

Nei paragrafi successivi ne vedremo alcuni esempi.

7.2 Moto di Poiseuille tra due piani paralleli.

Sia dato un fluido newtoniano, incompressibile ed omogeneo che occupa la regione compresa tra due piani Π_1, Π_2 paralleli, rigidi, fissi rispetto ad un osservatore (vedi Figura 5.1).

Supponiamo che sul fluido non agiscano forze esterne di massa e che nella regione S compresa tra i due piani, occupata dal fluido, il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico.

Le equazioni che governano tale moto sono dunque:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \quad (7.2.1)$$

con le condizioni al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = \vec{0}. \quad (7.2.2)$$

Sia $2h$ la distanza tra i due piani con h costante positiva, e il riferimento associato all'osservatore sia quello in Figura 5.1: l'origine O è un punto equidistante dai due piani, l'asse Ox_1 è parallelo ai due piani, Ox_2 normale ai due piani e Ox_3 orientato di conseguenza. Si ha perciò:

$$\Pi_\alpha = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h \right\} \quad \alpha = 1, 2.$$

Inoltre:

$$S = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h] \right\}.$$

Un **moto di Poiseuille** (stazionario) tra i due piani è una soluzione (\vec{v}, p) del problema (7.2.1), (7.2.2) tale che \vec{v} è parallelo ad \vec{e}_1 ed ha la rappresentazione

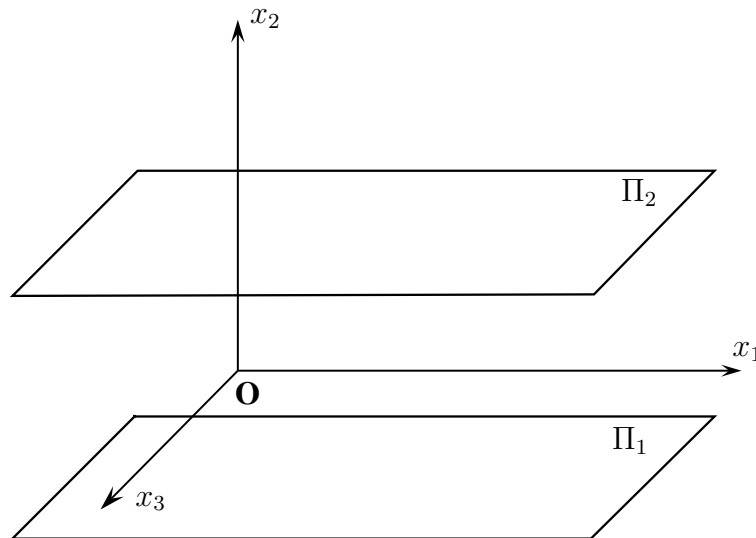


Figura 7.1: Geometria del problema

analitica indipendente da x_3 .

Dunque richiediamo che

$$\vec{v}(P) = v_1(P) \vec{e}_1, \quad \forall P \in S$$

e

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{v}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S). \quad (7.2.3)$$

Quindi cerchiamo una soluzione (\vec{v}, p) del problema (7.2.1), (7.2.2) tale che la rappresentazione analitica della velocità sia data da:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

A priori non facciamo alcuna ipotesi sulla pressione, per cui la sua rappresentazione analitica è

$$p = p(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

Scriviamo ora le equazioni del moto del fluido per componenti ed in termini di rappresentazioni analitiche, senza tenere conto, per il momento, delle condizioni imposte a \vec{v} . Abbiamo in $\xi(S)$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j &= \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Dalla quarta equazione delle (7.2.4), tenendo conto che:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

deduciamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{in } \xi(S).$$

Dunque deve essere

$$\vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1,$$

con $v_1(x_2)$ definita in $[-h, h]$.

Ora riconsideriamo le tre equazioni (7.2.4) che, per la forma della rappresentazione analitica di \vec{v} , si riducono a:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}; \\ i = 2 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}; \\ i = 3 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza equazione discende che p non dipende da x_2 e x_3 , e quindi $p = p(x_1)$, con $x_1 \in \mathbb{R}$.

Alla luce di questa osservazione consideriamo allora la prima equazione.

Otteniamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Poichè x_1 e x_2 sono variabili indipendenti e il primo membro dell'equazione scritta sopra è una funzione solo di x_2 , mentre il secondo membro è funzione solo di x_1 , affinché l'equazione sia soddisfatta $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in [-h, h]$ è necessario che i due membri siano uguali ad una stessa costante, che indichiamo con $-C$, con $C = \text{costante}$.

Avremo dunque:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

da cui otteniamo le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

A questo punto distinguiamo due casi:

1) $C = 0$

Abbiamo allora:

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 \quad \text{in } \mathbb{R},$$

dove p_0 è una costante arbitraria.

Inoltre deduciamo:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv_1}{dx_2} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Per determinare i valori di queste due costanti, imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(-h) = 0, \\ \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(h) = 0, \end{aligned}$$

per cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1 h + C_2 \\ 0 &= C_1 h + C_2. \end{aligned}$$

Sottraendo e sommando membro a membro queste due equazioni, deduciamo:

$$\begin{aligned} 2 C_1 h &= 0 & \Longrightarrow & \quad C_1 = 0 \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$p = p_0, \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

La pressione è costante e il fluido è in quiete.

2) $C \neq 0$

Innanzitutto integriamo l'equazione cui soddisfa p :

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \Longrightarrow \quad p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

dove p_0 è una costante arbitraria.

E' interessante vedere qual è il significato fisico della costante C .

Consideriamo i due piani di equazione $x_1 = a$ e $x_1 = a + 1$, con a costante arbitraria e siano Σ_1 e Σ_2 le intersezioni di S con tali piani.

Poichè $p = p(x_1)$, su Σ_1 la pressione p assume un valore costante, e così pure su Σ_2 . Se p_1 e p_2 individuano rispettivamente questi due valori costanti, si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= -C a + p_0 \\ p_2 &= -C (a + 1) + p_0, \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$p_1 - p_2 = C.$$

Dunque C viene a rappresentare la differenza di pressione fra i punti di due sezioni di S normali a Π_1 e Π_2 e a distanza unitaria l'una dall'altra. Per questo motivo C è chiamato *salto di pressione*.

Andando ora a integrare la seconda equazione otteniamo:

$$\frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{C}{\mu} x_2 + C_1 \implies v_1 = -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

Come prima, per determinare le costanti C_1 e C_2 , sfruttiamo le condizioni al contorno:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0,$$

e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 - C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = -h, \\ 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = h. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione la prima, deduciamo:

$$2 C_1 h = 0 \implies C_1 = 0.$$

Andando a sostituire nella prima equazione, abbiamo:

$$0 = -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_2.$$

In definitiva otteniamo:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h]. \quad (7.2.5)$$

La velocità dunque viene ad avere un andamento parabolico. Se $C > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, se $C < 0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. In ogni caso il vertice V della parabola ha ascissa $x_{V2} = 0$.

Osservazione 7.1. Si osservi che in corrispondenza di ogni valore fissato del salto di pressione C si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

Teorema 7.1. *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille tra due piani paralleli rigidi e fissi è possibile solo se è presente un salto per la pressione $C \neq 0$ nella direzione Ox_1 (parallela ai piani) e precisamente si ha:*

$$p(x_1) = -Cx_1 + p_0 \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h].$$

Se $C = 0$, la pressione è costante e il fluido resta in quiete.

Forniamo ora il grafico di $v_1(x_2)$ assegnando opportuni valori numerici, fisicamente significativi, ai parametri che compaiono nella (7.2.5).

Assumiamo che il liquido reale, che rappresentiamo con il modello di fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, sia il mercurio liquido a temperatura ambiente.

Il suo coefficiente di viscosità μ è dato da:

$$\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

Per C scegliamo i valori seguenti:

$$C = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}, \quad C = -6.4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}.$$

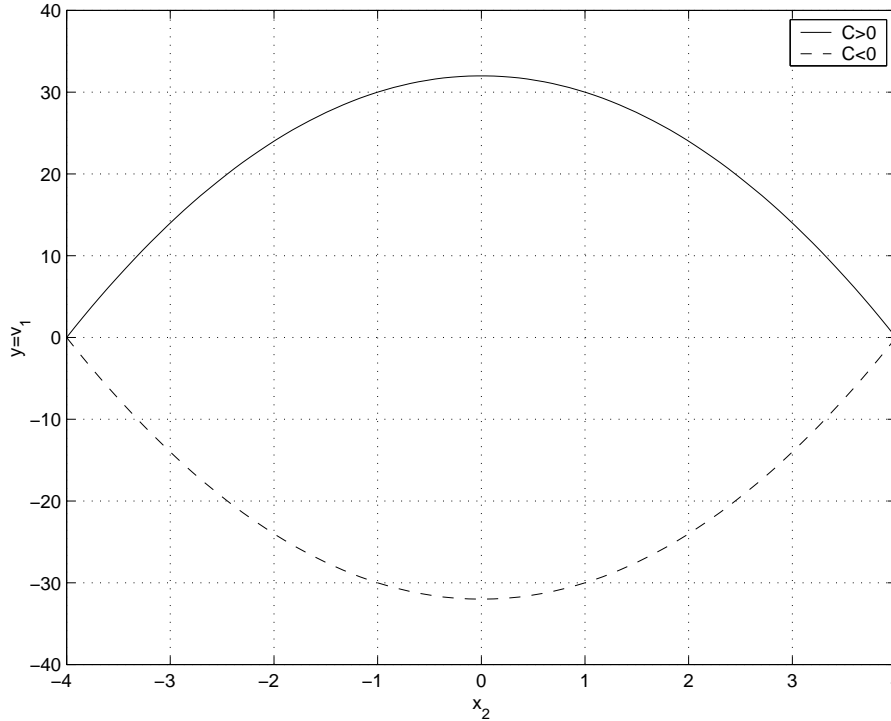
Inoltre assumiamo $h = 4\text{m}$. Nel primo caso si ha

$$v_1(x_2) = -2x_2^2 + 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4],$$

mentre nel secondo

$$v_1(x_2) = 2x_2^2 - 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4].$$

I grafici di v_1 , nei due casi, sono riportati nella Figura 7.2.

Figura 7.2: Andamento di $v_1(x_2)$

Può essere interessante vedere che espressione assumono le componenti del tensore degli sforzi di Cauchy, tenendo conto che il fluido è newtoniano ed incompressibile per cui:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D}.$$

Poiché \vec{v} ha le componenti tutte nulle tranne v_1 e $v_1 = v_1(x_2)$, allora le componenti di \tilde{D} sono tutte nulle tranne:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2.$$

Siamo ora in grado di scrivere le componenti di \tilde{T} , tenendo conto che in generale

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}.$$

In conclusione otteniamo:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = C x_1 - p_0, \\ T_{12} &= T_{21} = 2\mu D_{12} = -2\mu \frac{C}{2\mu} x_2 = -C x_2. \end{aligned}$$

Le altre componenti sono nulle.

Se andiamo a scrivere la matrice $[T_{ij}]$ associata a \tilde{T} , abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 & 0 \\ -Cx_2 & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo anche vedere quale forma assume, per il moto di Poiseuille, la trazione superficiale \vec{f} nei punti di Π_1 e Π_2 .

Cominciamo a considerare quanto avviene nei punti del secondo piano.

$$\vec{f} \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{e}_2) \Big|_{\Pi_2} = \tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_2}$$

poiché il versore \vec{n} normale a Π_2 rivolto verso l'esterno di S è \vec{e}_2 .

In generale $(\tilde{T} \cdot \vec{u})_i = T_{ij} u_j$; pertanto, con $\vec{u} = \vec{e}_2$ abbiamo:

$$f_i \Big|_{\Pi_2} = T_{i2} \Big|_{\Pi_2} \quad i = 1, 2, 3.$$

Otteniamo dunque:

$$f_1 \Big|_{\Pi_2} = T_{12} \Big|_{\Pi_2} = -Ch,$$

componente che rappresenta uno sforzo di taglio, essendo parallela a Π_2 ;

$$f_2 \Big|_{\Pi_2} = T_{22} \Big|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0,$$

componente che rappresenta uno sforzo normale;

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0,$$

componente nulla che rappresenta uno sforzo di taglio.

Analogamente possiamo determinare $\vec{f} \Big|_{\Pi_1} = -\tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_1}$.

Avremo:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -Ch = f_1 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0 = -f_2 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = 0 = f_3 \Big|_{\Pi_2}.$$

7.3 Moto di Couette tra due piani paralleli.

Supponiamo di avere ancora un fluido viscoso classico incompressibile ed omogeneo, in assenza di forze di massa, che si muove di moto stazionario. La regione occupata sia ancora quella compresa tra due piani rigidi e paralleli, dei quali Π_1 sia fisso rispetto all'osservatore, mentre Π_2 si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità \vec{V} parallela al piano stesso.

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore il riferimento $Ox_1x_2x_3$ avente l'origine O equidistante dai due piani, l'asse Ox_1 parallelo e concorde con \vec{V} , l'asse Ox_2 normale ai due piani per cui l'asse Ox_3 risulta parallelo ai piani (Vedi Figura 5.1).

Con tale scelta si ha:

$$\vec{V} = V \vec{e}_1 \quad \text{con } V = \text{costante} > 0.$$

Un **moto di Couette** tra i due piani è costituito da ogni coppia (\vec{v}, p) che sia soluzione del sistema (7.2.1), con $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(S)$ tale che \vec{v} soddisfi alla condizione al contorno di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1, \quad (7.3.1)$$

ed abbia la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1.$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo visto per il moto di Poiseuille tra due piani, otteniamo che, per la condizione di incompressibilità, v_1 dipende solo da x_2 , che p dipende solo da x_1 e che le due funzioni $p(x_1)$ e $v_1(x_2)$ soddisfano alle due equazioni differenziali ordinarie :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

A questo punto, come per il moto di Poiseuille, distinguiamo due casi.

1) $C = 0$

Deduciamo

$$p(x_1) = p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1(x_2) = C_1x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove p_0 , C_1 , C_2 sono costanti arbitrarie. Le due costanti C_1 e C_2 si determinano dalle condizioni di aderenza (7.3.1) che forniscono

$$v_1(-h) = 0 \quad v_1(h) = V. \quad (7.3.2)$$

Come si verifica facilmente si ottiene

$$C_1 = \frac{V}{2h}, \quad C_2 = \frac{V}{2}$$

per cui

$$v_1(x_2) = \frac{V}{2h}(x_2 + h) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Dunque, a differenza di quanto avviene nel caso di Poiseuille, quando la pressione è costante, il fluido non resta in quiete e $v_1(x_2)$ cresce linearmente da 0 a V .

2) $C \neq 0$

Precisamente, come nel moto di Poiseuille,

$$\begin{aligned} p(x_1) &= -Cx_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \\ v_1(x_2) &= -\frac{C}{2\mu}x_2^2 + C_1x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h], \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

dove C rappresenta il salto di pressione nella direzione Ox_1 , p_0 è una costante arbitraria inessenziale, mentre C_1 , C_2 sono costanti arbitrarie da determinarsi sfruttando le condizioni al contorno (7.3.2).

Imponendo tali condizioni otteniamo:

$$-\frac{C}{2\mu}h^2 - C_1h + C_2 = 0$$

dalla prima e

$$-\frac{C}{2\mu}h^2 + C_1h + C_2 = V$$

dalla seconda.

Sottraendo membro a membro dalla seconda relazione la prima si deduce:

$$2C_1h = V \quad \implies \quad C_1 = \frac{V}{2h}.$$

Se si sostituisce tale risultato in una delle due relazioni ottenute dalle condizioni al contorno abbiamo:

$$C_2 = \frac{C}{2\mu}h^2 + \frac{V}{2}.$$

In conclusione l'espressione di $v_1(x_2)$ è la seguente:

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + \frac{V}{2h} x_2 + \frac{C}{2\mu} h^2 + \frac{V}{2} \\ &= \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned}$$

Facciamo alcune osservazioni.

Osservazione 7.2. Il moto di Poiseuille si ottiene come caso particolare del moto di Couette ponendo $V = 0$.

Osservazione 7.3. Ad ogni salto di pressione C corrisponde uno ed un solo moto di Couette.

Osservazione 7.4. Se $C \neq 0$ l'andamento di $v_1(x_2)$ è sempre parabolico, ma si differenzia da quello che si ha nel moto di Poiseuille.

Se $C > 0$ la concavità della parabola è rivolta verso il basso e l'ascissa del vertice, che nel moto di Poiseuille è nulla, è data da

$$x_{V2} = \frac{\mu V}{2hC} > 0.$$

Vediamo se x_{V2} è interno all'intervallo $[-h, h]$. Tale condizione si verifica se

$$\frac{\mu V}{2hC} < h \implies \frac{\mu V}{2h^2} < C.$$

Otteniamo perciò che l'ascissa del vertice della parabola è interna all'intervallo $[-h, h]$ se $C > \frac{\mu V}{2h^2}$.

Dunque se $C > \frac{\mu V}{2h^2}$, $v_1(x_2)$ nell'intervallo $[-h, h]$ cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo e poi decresce sino al valore V , mentre se $0 < C \leq \frac{\mu V}{2h^2}$, $v_1(x_2)$ nell'intervallo $[-h, h]$ è sempre crescente da 0 a V .

Se $C < 0$ la concavità della parabola è rivolta verso l'alto e l'ascissa del vertice, data da $\frac{\mu V}{2hC}$, è negativa. In tal caso x_{V2} è interno all'intervallo $[-h, h]$ se

$$\frac{\mu V}{2hC} > -h \quad \text{ossia se} \quad \frac{\mu V}{2h^2} < -C \implies C < -\frac{\mu V}{2h^2}.$$

Dunque se $C < -\frac{\mu V}{2h^2}$, $v_1(x_2)$ nell'intervallo $[-h, h]$ decresce da 0 sino a raggiungere il valore minimo e poi cresce sino al valore V , mentre se $-\frac{\mu V}{2h^2} \leq C < 0$,

$v_1(x_2)$ è sempre crescente dal valore 0 al valore V .

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

Teorema 7.2. *Dato un fluido viscoso newtoniano incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Couette tra due piani paralleli, di cui uno fisso e l'altro in moto traslatorio rettilineo uniforme in una direzione parallela al piano stesso, è dato dalla coppia (\vec{v}, p) tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1$$

$$\text{con}$$

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove l'asse Ox_1 ha la direzione della velocità \vec{V} del piano in moto e la costante C rappresenta il salto della pressione nella direzione Ox_1 .

Rappresentiamo ora graficamente $v_1(x_2)$, per diversi valori numerici dei parametri che intervengono nella sua espressione.

Come nel paragrafo precedente, prendiamo in esame il caso del mercurio liquido, con $h = 4 \text{ m}$ e $V = 16 \text{ m s}^{-1}$.

Consideriamo i quattro possibili sottocasi che si possono verificare:

$$1) C > \frac{\mu V}{2h^2} = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

$$\text{Assumiamo } C = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -2x_2^2 + 2x_2 + 40.$$

$$2) 0 < C \leq 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{Prendiamo } C = 0.32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -0.1x_2^2 + 2x_2 + 9.6.$$

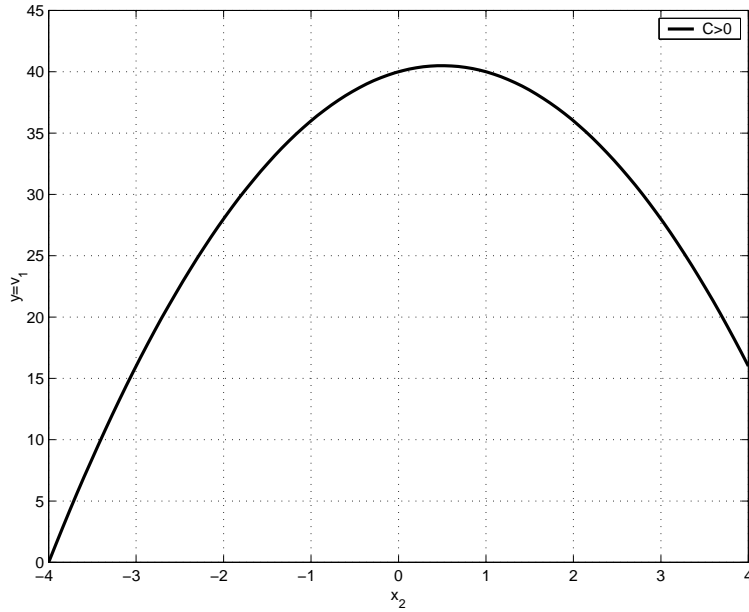
$$3) C < -\frac{\mu V}{2h^2} = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{Scegliamo } C = -3.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = x_2^2 + 2x_2 - 8.$$

$$4) -\frac{\mu V}{2h^2} = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \leq C < 0$$

$$\text{Prendiamo } C = -0.32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = 0.1x_2^2 + 2x_2 + 6.4.$$

I relativi grafici sono riportati nelle Figure 7.3, 7.4, 7.5, 7.6.

Figura 7.3: Andamento di $v_1(x_2)$ nel Caso 1)

Determiniamo ora il tensore degli sforzi di Cauchy come abbiamo fatto per il moto di Poiseuille.

Tenendo presente che le uniche componenti non nulle del tensore \tilde{D} sono:

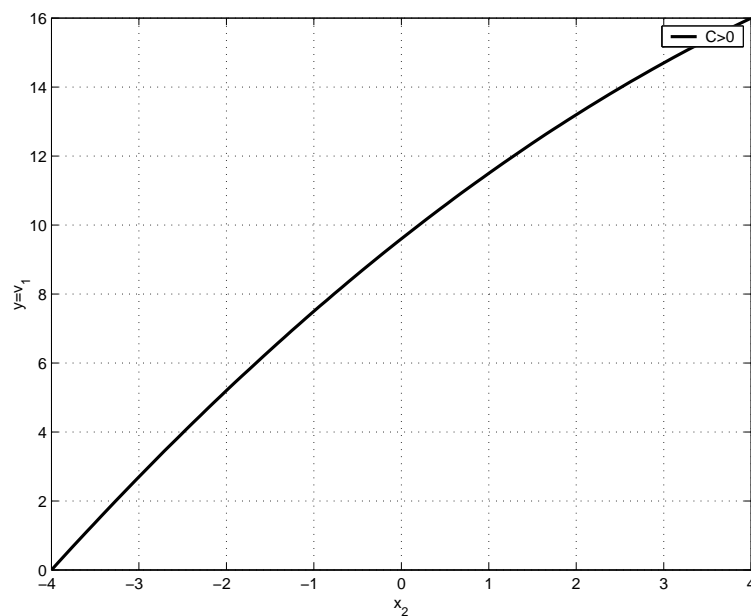
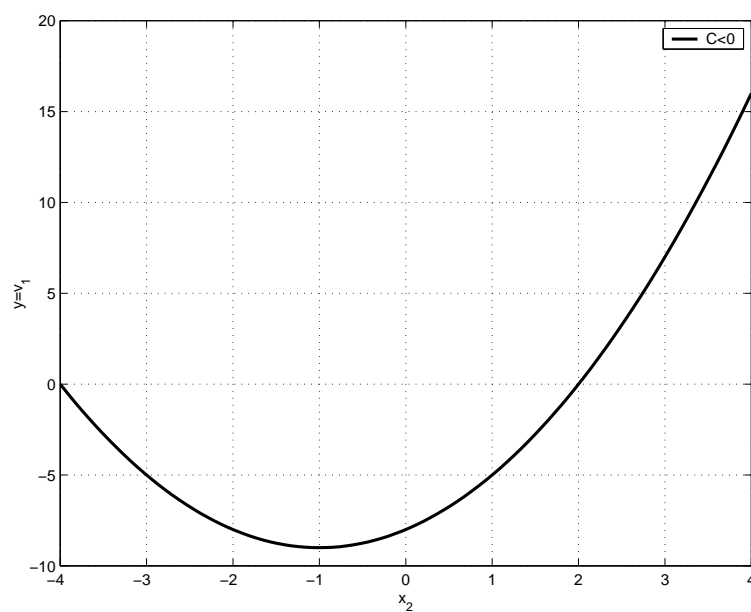
$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2 + \frac{V}{4h},$$

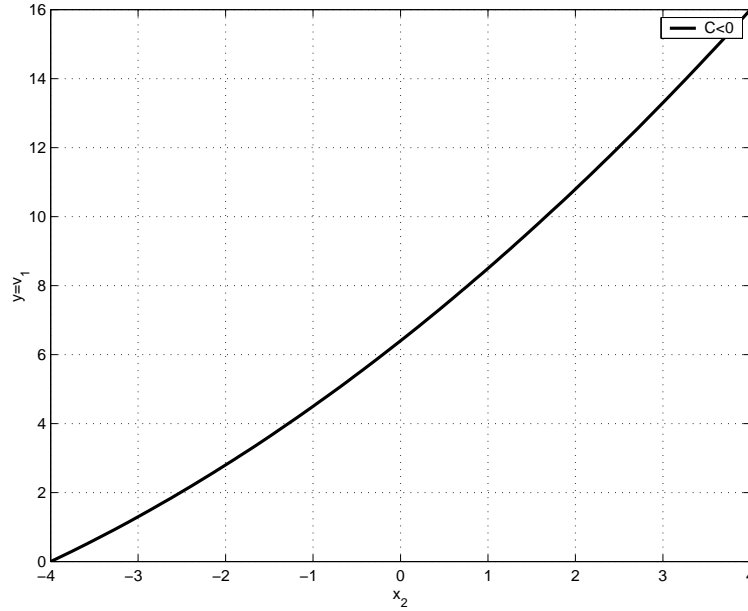
per la matrice $[T_{ij}]$ associata a \tilde{T} abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & 0 \\ -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Può essere interessante anche determinare $\vec{f}|_{\Pi_1}$, $\vec{f}|_{\Pi_2}$. Ricordando quanto visto per il moto di Poiseuille, deduciamo che le tre componenti di $\vec{f}|_{\Pi_2}$ sono date da:

$$f_1|_{\Pi_2} = T_{12}|_{\Pi_2} = -Ch + \frac{\mu V}{2h}$$

Figura 7.4: Andamento di $v_1(x_2)$ nel Caso 2)Figura 7.5: Andamento di $v_1(x_2)$ nel Caso 3)

Figura 7.6: Andamento di $v_1(x_2)$ nel Caso 4)

$$f_2 \Big|_{\Pi_2} = T_{22} \Big|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0.$$

Analogamente per $\vec{f} \Big|_{\Pi_1}$ si ottiene:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -T_{12} \Big|_{\Pi_1} = -Ch - \frac{\mu V}{2h}$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -T_{22} \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = -T_{32} \Big|_{\Pi_1} = 0.$$

7.4 Moto di Poiseuille in un cilindro illimitato.

Consideriamo il moto stazionario di un fluido viscoso classico incompressibile che occupi un cilindro illimitato la cui superficie laterale sia rigida e fissa rispetto all'osservatore.

Un fluido incompressibile occupante un cilindro illimitato può schematizzare un liquido in moto entro un condotto cilindrico con sezione trasversale di dimensioni

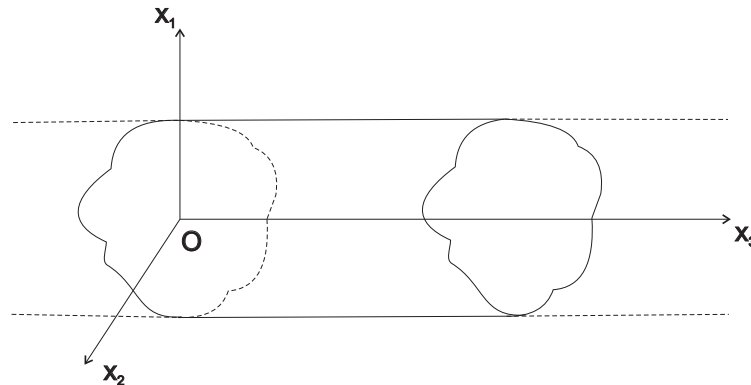


Figura 7.7: Geometria del problema

molto piccole rispetto alla lunghezza del condotto stesso.

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale con l'origine O appartenente ad una sezione trasversale del cilindro, gli assi Ox_1 e Ox_2 nel piano della sezione, l'asse Ox_3 diretto come le generatrici del cilindro. Dunque la regione S occupata dal fluido risulta data da:

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid (x_1, x_2) \in D, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove D assumiamo che sia la chiusura di un dominio regolare (e dunque limitato) di \mathbb{R}^2 .

Avremo perciò: $\xi(S) = D \times \mathbb{R}$.

Può essere utile introdurre la seguente notazione: denotiamo con $\Sigma(z)$ la sezione del cilindro giacente sul piano $x_3 = z$ con z costante. Notiamo comunque che, essendo S un cilindro, tutte le sue sezioni trasversali sono congruenti e che $\xi(\Sigma(z)) = D \times \{z\}$.

Prima di definire il moto di Poiseuille nel cilindro premettiamo il seguente risultato:

Proposizione 7.1. *Considerato un fluido viscoso classico incomprimibile in moto stazionario nel cilindro S definito sopra, il flusso del campo della velocità \vec{v} attraverso le sezioni trasversali del cilindro è costante, ossia:*

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \int_{\Sigma(z)} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 d\Sigma = \Phi,$$

dove Φ è costante.

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che, essendo il fluido incompressibile, si ha

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S \quad (7.4.1)$$

e che vale la condizione al contorno di aderenza

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{0}, \quad (7.4.2)$$

essendo la superficie laterale del cilindro rigida e fissa. Consideriamo ora le due sezioni trasversali del cilindro Σ_1 e Σ_2 giacenti sui piani $x_3 = z_1$ e $x_3 = z_2$ rispettivamente (con ad esempio $z_1 < z_2$) ed indichiamo con S^* la porzione (chiusa) di cilindro compresa tra Σ_1 e Σ_2 . Si può verificare facilmente che S^* è la chiusura di un dominio regolare.

Per la (7.4.1) e il teorema della divergenza si ha:

$$0 = \int_{S^*} \operatorname{div} \vec{v} \, dS = \int_{\partial S^*} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Sigma. \quad (7.4.3)$$

D'altra parte

$$\partial S^* = \partial_1 S^* \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

dove con $\partial_1 S^*$ denotiamo la superficie laterale della porzione S^* di cilindro.

La (7.4.3) assume perciò la forma:

$$0 = \int_{\partial_1 S^*} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot (-\vec{e}_3) \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma. \quad (7.4.4)$$

Ma per la condizione al contorno (7.4.2):

$$\vec{v} \Big|_{\partial_1 S^*} = \vec{0}$$

per cui la (7.4.4) fornisce:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma.$$

La proposizione è perciò provata.

Come è facile verificare la proposizione 3.1 sussiste anche nel caso di un fluido perfetto incompressibile.

Osserviamo inoltre che la proposizione 3.1 continua ancora a valere anche se il moto non è stazionario, ma in tal caso il flusso della velocità attraverso le sezioni del cilindro è una funzione del tempo: $\Phi = \Phi(t)$.

Rileviamo che, se utilizziamo la rappresentazione analitica del campo $\vec{v}(P)$, otteniamo:

$$\int_{\Sigma(z)} \vec{v}(P) \cdot \vec{e}_3 d\Sigma = \int_{\Sigma(z)} v_3(P) d\Sigma = \int \int_D v_3(x_1, x_2, z) dx_1 dx_2.$$

Passiamo ora a definire il moto di Poiseuille in un cilindro illimitato.

Supponiamo di avere un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario nel cilindro S , in assenza di forze di massa. Allora le equazioni che ne governano il moto in S sono:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

con la condizione al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{0}. \quad (7.4.6)$$

Un **moto di Poiseuille** in un cilindro illimitato S , la cui superficie laterale sia rigida e fissa, è costituito da una qualsiasi coppia (\vec{v}, p) dove $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}^1(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}(S)$, (\vec{v}, p) è soluzione delle (7.4.5) in $\overset{\circ}{S}$, \vec{v} soddisfa alla condizione al contorno (7.4.6) ed ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3.$$

Notiamo che sui campi \vec{v} e p abbiamo fatto delle ipotesi di regolarità meno forti di quelle utilizzate finora.

Cerchiamo di stabilire se sono possibili moti di Poiseuille nel cilindro e che forma hanno.

In primo luogo notiamo che la condizione di incomprimibilità (la seconda delle (7.4.5)) è automaticamente soddisfatta da un campo della velocità della forma richiesta nel moto di Poiseuille.

Dobbiamo imporre allora alla coppia (\vec{v}, p) di soddisfare alla prima equazione delle (7.4.5) che in generale, in termini di rappresentazioni analitiche, equivale alle tre equazioni scalari:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \times \mathbb{R}.$$

Nel nostro caso particolare deduciamo:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ i = 2 & \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

da cui discende:

$$p = p(x_3).$$

Infine per $i = 3$ abbiamo:

$$\rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) - \frac{dp}{dx_3}$$

che, essendo $v_1 = v_2 = 0$, si riduce a

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) (x_1, x_2) = \frac{dp}{dx_3} (x_3) \quad \forall (x_1, x_2) \in \overset{\circ}{D}, \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}.$$

Allora, tenendo presente che x_1, x_2, x_3 sono variabili indipendenti e che il primo membro dell'equazione è funzione solo di (x_1, x_2) e il secondo solo di x_3 necessariamente dovremo avere:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) = -C \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dx_3} = -C$$

con $C = \text{costante}$.

Per la pressione si ottiene così:

$$p = -Cx_3 + p_0 \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

dove p_0 è una costante arbitraria inessenziale e C rappresenta fisicamente la differenza di pressione tra i punti di due sezioni trasversali del cilindro poste a distanza unitaria. La costante C è detta **salto di pressione nella direzione Ox_3** .

Per quanto riguarda la velocità siamo ricondotti a risolvere il seguente problema differenziale alle derivate parziali:

$$\Delta v_3 = -\frac{C}{\mu} \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \tag{7.4.7}$$

$$v_3 \Big|_{\partial D} = 0. \tag{7.4.8}$$

La condizione al contorno è conseguenza della condizione di aderenza (7.4.6).

Si tratta di un problema di Dirichlet per un'equazione di Poisson in due variabili indipendenti, il cui termine non omogeneo è costante.

Si dimostra facilmente il seguente

Teorema 7.3. *Se il problema al contorno (7.4.7), (7.4.8) ammette una soluzione $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$ questa è unica nella classe di funzioni $\mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$.*

Dimostrazione

Supponiamo che il problema (7.4.7), (7.4.8) ammetta due soluzioni: $v_3^{(1)}, v_3^{(2)} \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$ e poniamo:

$$v_3 = v_3^{(1)} - v_3^{(2)}.$$

Ovviamente v_3 gode delle stesse proprietà di regolarità di $v_3^{(1)}, v_3^{(2)}$ ed è soluzione del problema al contorno:

$$\begin{aligned} \Delta v_3 &= 0 & \text{in } \overset{\circ}{D} \\ v_3 \Big|_{\partial D} &= 0. \end{aligned}$$

Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace con condizione al contorno omogenea. Come è noto dalla teoria relativa all'equazione di Laplace, tale problema ammette come unica soluzione la soluzione nulla. Dunque

$$v_3^{(1)} - v_3^{(2)} = 0 \quad \text{in } D.$$

Si potrebbe inoltre dimostrare che se ∂D è sufficientemente regolare, allora il problema (7.4.7), (7.4.8) ammette una soluzione $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}^1(D)$. Ovviamente tale soluzione è unica per il teorema di unicità dimostrato in precedenza.

Si osservi che se la pressione è costante, cioè $C = 0$, il fluido resta in quiete ($v_3 = 0$ in D .)

Abbiamo così provato il seguente

Teorema 7.4. *Dato un fluido viscoso classico incompressibile ed omogeneo, un moto di Poiseuille (stazionario) in un cilindro illimitato, la cui superficie laterale è rigida e fissa, è possibile solo se la pressione presenta un salto di pressione $C \neq 0$ nella direzione Ox_3 delle generatrici del cilindro. Inoltre se la sezione del cilindro è sufficientemente regolare, in corrispondenza di ogni salto di pressione C esiste uno ed un solo moto di Poiseuille (\vec{v}, p) con*

$$p = -C x_3 + p_0 \quad e \quad \vec{v} = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3$$

dove v_3 è soluzione del problema al contorno (7.4.7), (7.4.8). Se $C = 0$, la pressione è costante e il fluido resta in quiete.

Vediamo ora di stabilire alcuni interessanti risultati relativi ai moti di Poiseuille in cilindri illimitati.

In primo luogo determiniamo la forma di tale moto nel caso di un cilindro circolare retto di raggio R . In questo caso si parla di **moto di Hagen-Poiseuille**. Se prendiamo come asse Ox_3 del riferimento cartesiano l'asse del cilindro, D è il cerchio di raggio R avente la seguente equazione:

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}.$$

Fissiamo poi in \mathbb{R}^2 un sistema di coordinate polari avente l'asse x_1 come asse polare, denotiamo il raggio vettore con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e l'anomalia con φ . Grazie alla simmetria della regione D ed al fatto che il termine non omogeneo dell'equazione di Poisson e la condizione al contorno non dipendono da φ , siamo condotti a cercare la soluzione v_3 del problema (7.4.7), (7.4.8) nella forma di una funzione indipendente da φ :

$$v_3 = v_3(r).$$

Vediamo di scrivere $\Delta v_3 = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$ in coordinate polari piane, tenendo presente che v_3 dipende solo da r e non da φ . Procuriamoci dapprima l'espressione delle due derivate prime per $r \in (0, R]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} &= \frac{dv_3}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} \\ &= \frac{dv_3}{dr} \frac{x_\alpha}{r} \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Per le due derivate seconde pure, poiché cerchiamo v_3 in $\mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}^1(D)$, ci limitiamo a calcolarle per $r \in (0, R)$ ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\alpha^2} &= \frac{d^2 v_3}{dr^2} \frac{x_\alpha^2}{r^2} + \frac{dv_3}{dr} \left[\frac{1}{r} + x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{d^2 v_3}{dr^2} \frac{x_\alpha^2}{r^2} + \frac{dv_3}{dr} \left[\frac{1}{r} + x_\alpha \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{x_\alpha}{r} \right] \\ &= \frac{d^2 v_3}{dr^2} \frac{x_\alpha^2}{r^2} + \frac{dv_3}{dr} \left[\frac{1}{r} - \frac{x_\alpha^2}{r^3} \right] \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

In conclusione per $r \in (0, R)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\Delta v_3 &= \frac{d^2 v_3}{dr^2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} + \frac{dv_3}{dr} \left[\frac{2}{r} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3} \right] \\ &= \frac{d^2 v_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_3}{dr} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_3}{dr} \right).\end{aligned}$$

Grazie a tale risultato, dalla (7.4.7) per $r \in (0, R)$ deduciamo:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_3}{dr} \right) = -\frac{C}{\mu} r,$$

da cui integrando discende:

$$r \frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r^2 + C_1, \quad C_1 = \text{costante arbitraria.}$$

Dividendo per r si arriva a

$$\frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r + \frac{C_1}{r}. \quad (7.4.9)$$

D'altra parte la funzione $v_3(r)$ che cerchiamo deve essere definita anche per $r = 0$ ed avere derivata prima continua per $r = 0$. Poniamo allora $C_1 = 0$ nella (7.4.9) per cui questa si riduce a:

$$\frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r$$

che, integrata nuovamente fornisce:

$$v_3 = -\frac{C}{4\mu} r^2 + C_2, \quad C_2 = \text{costante arbitraria.}$$

Per determinare C_2 teniamo presente che la condizione al contorno (7.4.8) in questo caso si scrive come:

$$v_3(R) = 0,$$

per cui imponendo tale condizione otteniamo:

$$-\frac{C}{4\mu} R^2 + C_2 = 0 \quad \implies \quad C_2 = \frac{C}{4\mu} R^2.$$

Sostituendo a C_2 il valore trovato deduciamo:

$$v_3 = \frac{C}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad \forall r \in [0, R],$$

ossia

$$v_3 = \frac{C}{4\mu} [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)] \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

In conclusione il moto di Hagen-Poiseuille in un cilindro circolare retto di raggio R corrispondente al salto di pressione C è dato dalla coppia (v_3, p) tale che:

$$\begin{aligned} p &= -Cx_3 + p_0 & \forall x_3 \in \mathbb{R} \\ v_3 &= \frac{C}{4\mu} [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)] & \forall (x_1, x_2) \in D. \end{aligned}$$

Notiamo che nel moto di Hagen-Poiseuille $p, \vec{v} \in \mathcal{C}^\infty(S)$.

Deduciamo ora un altro risultato sul moto di Poiseuille in un cilindro illimitato interessante anche dal punto di vista fisico.

Fisicamente non è semplice misurare il salto di pressione C , mentre è facilmente misurabile il flusso Φ della velocità al quale, come vedremo, è strettamente collegato C .

Dimostriamo infatti il seguente

Teorema 7.5. *In un moto di Poiseuille (stazionario) in un cilindro illimitato di sezione sufficientemente regolare il salto di pressione è correlato al flusso della velocità mediante la relazione:*

$$C = c_P \Phi \quad \text{con } c_P = \text{costante} > 0, \quad c_P = c_P(D, \mu). \quad (7.4.10)$$

La costante c_P , che dunque dipende solo dalla geometria del problema e dal fluido preso in esame, è detta **costante di Poiseuille**.

Dimostrazione

Svolgeremo la dimostrazione in più fasi. Proviamo dapprima i due risultati seguenti:

- $C = 0 \iff \Phi = 0$
- $C \neq 0$ o $\Phi \neq 0 \implies C, \Phi$ hanno lo stesso segno.

Sia dunque (\vec{v}, p) il moto di Poiseuille corrispondente al salto di pressione C . Come sappiamo, $\vec{v} = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3$, $p = -Cx_3 + p_0$ con v_3 soluzione del problema al contorno:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{C}{\mu} \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \quad (7.4.11)$$

$$v_3 \Big|_{\partial D} = 0. \quad (7.4.12)$$

Ovviamente nella (7.4.11) abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

Assumiamo che ∂D sia sufficientemente regolare in modo tale che il problema (7.4.11), (7.4.12) ammetta una soluzione $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}^1(D)$. Sia Φ il flusso della velocità per cui:

$$\Phi = \int \int_D v_3(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Stabiliamo i due risultati preliminari.

Moltiplichiamo entrambi i membri della (7.4.11) per v_3 e integriamo su $\overset{\circ}{D}$ ottenendo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) v_3 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \int \int_{\overset{\circ}{D}} v_3 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \int \int_D v_3 dx_1 dx_2. \quad (7.4.13)$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) v_3 &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} &= (\text{grad } v_3)^2. \end{aligned}$$

Sostituendo i risultati ottenuti sopra nella (7.4.13) e tenendo conto della definizione di Φ , deduciamo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) dx_1 dx_2 - \int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \Phi. \quad (7.4.14)$$

Ma per le formule integrali di Gauss

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial D} v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} n_\alpha ds$$

dove n_1, n_2 sono le due componenti del versore normale a ∂D rivolto verso l'esterno di D .

Tuttavia l'integrale curvilineo esteso a ∂D risulta nullo per la condizione al contorno (7.4.12) e perciò la (7.4.14) si riduce a:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = \frac{C}{\mu} \Phi. \quad (7.4.15)$$

Se $C = 0$, dalla (7.4.15) deduciamo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = 0 \implies \text{grad } v_3 = \vec{0} \text{ in } \overset{\circ}{D} \implies v_3 = \text{costante in } D.$$

Ma, essendo $v_3|_{\partial D} = 0$, segue $v_3 = 0$ in D e dunque $\Phi = 0$.

Si noti che in effetti questo risultato l'avevamo già ottenuto nella dimostrazione del teorema di unicità.

Viceversa se $\Phi = 0$, sempre dalla (7.4.15) otteniamo:

$$\int \int_D (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = 0 \implies v_3 = 0 \text{ in } D,$$

da cui, per la (7.4.11), discende $C = 0$.

Abbiamo così provato il primo risultato preliminare.

Il secondo discende immediatamente sempre dalla (7.4.15), poiché se $C \neq 0$ o $\Phi \neq 0$ abbiamo che il prodotto di C per Φ non può essere nullo e quindi risulta strettamente positivo:

$$0 < \int \int_D (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = \frac{C}{\mu} \Phi \implies C \Phi > 0$$

per cui C e Φ hanno lo stesso segno.

Proviamo ora la (7.4.10).

In base a quanto ottenuto, possiamo asserire che, preso un qualsiasi moto di Poiseuille, esiste un numero positivo c , a priori dipendente da (v_3, D, μ) , tale che:

$$C = c(v_3, D, \mu) \Phi,$$

dove C, Φ sono il salto di pressione e il flusso della velocità rispettivamente.

Noi ci proponiamo di provare che c è indipendente dal moto considerato, cioè è indipendente da v_3 .

Consideriamo due qualsiasi moti di Poiseuille relativi allo stesso cilindro illimitato: $(\vec{v}^{(1)} = v_3^{(1)} \vec{e}_3, p_1)$, $(\vec{v}^{(2)} = v_3^{(2)} \vec{e}_3, p_2)$.

Siano

$$\begin{aligned} p_1 &= -C_1 x_3 + p_{01} & \Phi_1 &= \int \int_D v_3^{(1)} dx_1 dx_2 & c_1 &= c(v_3^{(1)}, D, \mu) \\ p_2 &= -C_2 x_3 + p_{02} & \Phi_2 &= \int \int_D v_3^{(2)} dx_1 dx_2 & c_2 &= c(v_3^{(2)}, D, \mu). \end{aligned}$$

Osserviamo poi che anche $(\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}, p = p_1 + p_2)$ è un moto di Poiseuille per la linearità del problema ed a quest'ultimo moto sono associati il salto di pressione: $C = C_1 + C_2$ e il flusso $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Dunque:

$$C = c \Phi \quad \text{con} \quad c = c(v_3, D, \mu)$$

ossia

$$C_1 + C_2 = c(\Phi_1 + \Phi_2)$$

da cui:

$$c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 = c(\Phi_1 + \Phi_2) \implies (c_1 - c)\Phi_1 + (c_2 - c)\Phi_2 = 0 \quad \forall \Phi_1, \Phi_2.$$

Grazie all'arbitrarietà di Φ_1, Φ_2 , nella relazione scritta sopra poniamo dapprima $\Phi_1 = 0$ e $\Phi_2 \neq 0$. Ne consegue:

$$c_1 = c.$$

Poniamo ora $\Phi_1 \neq 0$ e $\Phi_2 = 0$. Ne consegue:

$$c_2 = c$$

e perciò:

$$c_1 = c_2.$$

Dunque la costante c non dipende dal moto, cioè $c = c(D, \mu)$. Aggiungiamo, come è usuale, a c il pedice P per cui $c_P = c_P(D, \mu)$, come volevamo dimostrare.

Esercizio. Determinare la costante di Poiseuille nel caso in cui il cilindro occupato dal fluido sia circolare retto con raggio R .

Risposta: $c_P = \frac{8\mu}{\pi R^4}$.

(Suggerimento: utilizzando i risultati ottenuti in precedenza, calcolare prima il flusso e poi c_P .)

Osservazione 7.5 I risultati che abbiamo ottenuto per i moti di Poiseuille e Couette tra due piani paralleli e per il moto di Poiseuille in un cilindro illimitato continuano a sussistere se assumiamo che $\rho \vec{F}$ provenga da un potenziale U . Infatti basta introdurre una pressione modificata p^* così definita:

$$p^* = p - U$$

e sostituire alla pressione effettiva la pressione modificata.

Capitolo 8

Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incomprimibile

8.1 Premesse

Supponiamo di avere ancora un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. La regione S occupata dal fluido sia un semispazio la cui frontiera sia costituita dal piano materiale rigido Π che ruota uniformemente attorno ad un asse fisso normale al piano stesso. Sia Ox_3 l'asse di rotazione con O punto del piano ed orientato verso la regione occupata dal fluido, mentre gli assi Ox_1, Ox_2 giacciono su Π . Si ha dunque:

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid x_3 \geq 0\}.$$

La velocità angolare del piano rotante sia: $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$ con $\Omega > 0$.

Dunque le equazioni che governano il moto del fluido, dopo aver diviso entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per ρ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (8.1.1)$$

D'altra parte

$$\rho = \text{costante} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

Inoltre assumiamo che la densità delle forze esterne di massa provenga da un potenziale scalare, cioè

$$\vec{F} = \text{grad } U_1.$$

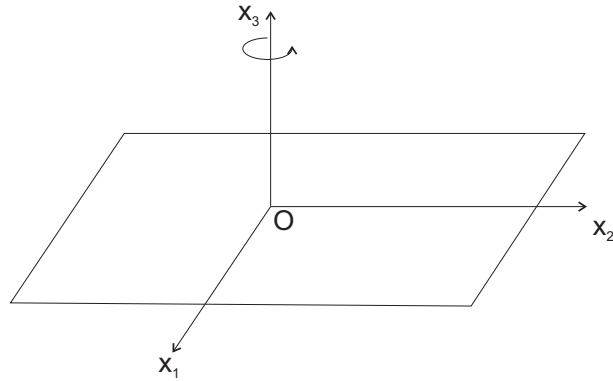


Figura 8.1: Geometria del problema

Perciò si ha

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} - U_1 \right).$$

E' allora conveniente introdurre il campo della pressione modificata dato da

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1.$$

Di conseguenza, il sistema (8.1.1) assume la forma:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (8.1.2)$$

A tale sistema associamo la condizione di aderenza

$$\vec{v} \Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O) \Big|_{\Pi}. \quad (8.1.3)$$

Risolvere il problema al contorno (8.1.2), (8.1.3) significa trovare le coppie (\vec{v}, p^*) con $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$, $p^* \in \mathcal{C}^1(S)$ soddisfacenti le equazioni (8.1.2) e la condizione al contorno (8.1.3).

Tale problema occupa una posizione centrale in fluidodinamica a partire dal lavoro pionieristico di T. von Karman (1921).

I motivi principali di questo interesse stanno nel fatto che il problema ha immediate applicazioni tecniche, ad esempio alle macchine rotanti, e che la geometria del moto è una delle più semplici possibili cosicché ci si aspetta di trovare delle soluzioni esatte.

Una prima soluzione del problema è quella banale data da $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$ con

$$\vec{v}^{(R)} = \vec{\Omega} \times (P - O), \quad p^{*(R)} = \frac{\Omega^2}{2} |P - P^*|^2 + p_0^{(R)} \quad \forall P \in S$$

dove P^* è la proiezione ortogonale di P sull'asse Ox_3 e $p_0^{(R)}$ è una costante arbitraria. In corrispondenza di tale moto il fluido si muove di moto rotatorio uniforme attorno all'asse Ox_3 insieme al piano Π che dunque trascina con sé tutto il fluido.

Verifichiamo che effettivamente il moto rigido $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$ è una soluzione del problema.

La condizione al contorno è soddisfatta banalmente.

Vediamo se sono soddisfatte le equazioni (8.1.2).

A tal fine ricorriamo alle rappresentazioni analitiche di $p^{*(R)}$ e $\vec{v}^{(R)}$:

$$p^{*(R)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + p_0^{(R)},$$

$$\vec{v}^{(R)}(x_1, x_2, x_3) = \Omega \vec{e}_3 \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3)$$

da cui

$$v_1^{(R)} = -\Omega x_2, \quad v_2^{(R)} = \Omega x_1, \quad v_3^{(R)} = 0.$$

Si vede immediatamente che $\text{div} \vec{v}^{(R)} = 0$ in S poiché:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_3} = 0.$$

Per quanto riguarda la prima delle (8.1.2), questa è equivalente alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i^{(R)} \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.1.4)$$

Per $i = 1$ abbiamo:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_2} v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_1, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_1$$

e dunque la prima delle (8.1.4) è soddisfatta.

Per $i = 2$:

$$\frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_1} v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_2, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_2$$

e dunque anche la seconda delle (8.1.4) è soddisfatta.

Infine per $i = 3$

$$\frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_3} + \nu \Delta v_3^{(R)} = 0.$$

Dunque è verificata anche l'ultima delle (8.1.4).

E' interessante considerare le linee di flusso del campo della velocità $\vec{v}^{(R)}$, che

risultano essere circonferenze che giacciono su piani di equazione $x_3 = \text{costante}$ ed hanno il centro sull'asse Ox_3 . Per provare tale risultato possiamo seguire due metodi.

Il primo metodo è il più veloce. Essendo il moto stazionario, linee di flusso e traiettorie delle particelle coincidono e, poiché il moto del fluido è un moto rigido di rotazione uniforme attorno all'asse Ox_3 , le particelle descrivono delle circonferenze che giacciono su piani di equazione $x_3 = \text{costante}$ ed hanno il centro sull'asse Ox_3 .

Il secondo metodo, basato sulla definizione di linee di flusso, è meno immediato, ma ci sarà utile nel seguito. Come sappiamo, le linee di flusso sono il sostegno delle curve $P = P(\lambda)$ che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}^{(R)}(P),$$

equivalente al sistema di tre equazioni scalari del I ordine:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

nelle tre funzioni incognite $x_i = x_i(\lambda) \quad i = 1, 2, 3$.

Esplicitando le funzioni $v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3)$, otteniamo il seguente sistema:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega x_2 \tag{8.1.5}$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega x_1 \tag{8.1.6}$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \tag{8.1.7}$$

Dalla (8.1.7) discende che le linee di flusso sono cammini piani poiché $x_3 = c$ con $c = \text{costante} \in [0, +\infty)$.

Inoltre moltiplicando entrambi i membri della (8.1.5) per x_1 e della (8.1.6) per x_2 e sommando, si ottiene:

$$x_1 \frac{dx_1}{d\lambda} + x_2 \frac{dx_2}{d\lambda} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

da cui:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \quad \text{con } R = \text{costante} > 0.$$

Le linee di flusso sono dunque caratterizzate dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= R^2 \\ x_3 &= c \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che le linee di flusso del campo $\vec{v}^{(R)}$ sono circonferenze che giacciono su piani di equazione $x_3 = c$ ed hanno il centro sull'asse Ox_3 . Osserviamo che il cammino luogo dei centri di tali circonferenze è il semiasse positivo Ox_3 .

Il problema al contorno considerato ammette altre soluzioni che possono essere raggruppate in due classi:

- soluzioni che sono **simmetriche**
- soluzioni che sono **non simmetriche**

rispetto all'asse di rotazione Ox_3 .

Appartiene alla prima classe il moto di von Karman, che è basato, oltre che sull'ipotesi di simmetria, sulle ulteriori ipotesi che la componente della velocità del fluido lungo l'asse di rotazione dipenda solo da x_3 e che all'infinito la velocità del fluido sia normale al piano rotante. Con tali ipotesi lo studio del moto è ricondotto ad un problema differenziale per un sistema di due equazioni differenziali ordinarie non lineari che non possiede una soluzione esprimibile in termini di funzioni analitiche note, ma che si può solo integrare numericamente.

Noi non ci occuperemo del moto di von Karman, ma studieremo un tipo di moto che non è simmetrico rispetto all'asse di rotazione e faremo vedere che per tale moto si trova una soluzione esatta espressa in termini di funzioni esponenziali e trigonometriche.

8.2 Soluzioni non simmetriche

Occupiamoci delle soluzioni del problema al contorno (8.1.2),(8.1.3) che non sono simmetriche.

A tal fine fissiamo sul piano Π ad arbitrio un punto P_0 e sia $(f_0, g_0, 0)$ la terna delle sue coordinate cartesiane. Ovviamente f_0 e g_0 sono numeri reali arbitrari. Consideriamo poi l'asse parallelo ad Ox_3 e con lo stesso verso, avente come origine il punto P_0 ; tale asse lo denotiamo con $P_0x'_3$. Poniamo

$$p^*(P) = \frac{\Omega^2}{2}|P - P'|^2 + p_0 \quad \forall P \in S \quad (8.2.1)$$

dove P' è la proiezione ortogonale del punto P sull'asse $P_0x'_3$ e p_0 è una costante arbitraria.

Ci proponiamo di determinare un campo vettoriale $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ soddisfacente alle tre condizioni seguenti:

- 1) la coppia (\vec{v}, p^*) con p^* data dalla (8.2.1) è soluzione del problema (8.1.2), (8.1.3);
- 2) le linee di flusso del campo \vec{v} sono circonferenze che giacciono su piani di equazione $x_3 = \text{costante}$;
- 3) le componenti della rappresentazione analitica di \vec{v} sono limitate rispetto a x_3 con $x_3 \in [0, +\infty)$.

Introduciamo le rappresentazioni analitiche di p^* e \vec{v} :

$$p^* = \frac{\Omega^2}{2}[(x_1 - f_0)^2 + (x_2 - g_0)^2] + p_0, \quad \vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3).$$

E' conveniente cercare le componenti della rappresentazione analitica di \vec{v} nella forma:

$$v_1 = -\Omega[x_2 - g(x_3)] \quad (8.2.2)$$

$$v_2 = \Omega[x_1 - f(x_3)] \quad (8.2.3)$$

$$v_3 = 0. \quad (8.2.4)$$

dove f, g sono funzioni incognite $\in \mathcal{C}^2([0, +\infty))$. Infatti, se le componenti della velocità hanno la forma scritta sopra è sicuramente soddisfatta la condizione 2). Verifichiamo tale asserzione.

Siano $x_i = x_i(\lambda)$ $i = 1, 2, 3$ le equazioni cartesiane parametriche di una generica linea di flusso. Le funzioni $x_i(\lambda)$ devono soddisfare al sistema differenziale del I ordine:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(x_3)] \quad (8.2.5)$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(x_3)] \quad (8.2.6)$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \quad (8.2.7)$$

Dalla (8.2.7) si ottiene

$$x_3 = c \quad \text{con } c \in [0, +\infty).$$

Sostituendo tale risultato nelle (8.2.5), (8.2.6), deduciamo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_1 - f(c)] = -\Omega[x_2 - g(c)] \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_2 - g(c)] = \Omega[x_1 - f(c)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che le due equazioni scritte sopra si presentano nella stessa forma delle (8.1.5) e (8.1.6) con la sostituzione di $[x_1 - f(c)]$ e $[x_2 - g(c)]$ a x_1 e x_2 rispettivamente. Se si procede in maniera analoga a quanto abbiamo fatto per le (8.1.5) e (8.1.6), deduciamo che le equazioni cartesiane delle linee di flusso relative a \vec{v} sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [x_1 - f(c)]^2 + [x_2 - g(c)]^2 &= R^2 \\ x_3 &= c \end{aligned}$$

con R costante positiva e $c \in [0, +\infty)$.

Dunque tali linee di flusso sono circonferenze che giacciono su piani di equazione $x_3 = c$ i cui centri sono i punti di coordinate $(f(c), g(c), 0)$ con $c \in [0, +\infty)$.

Il luogo dei centri di queste circonferenze è il cammino

$$\Lambda = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} \mid x_1 = f(c), x_2 = g(c), x_3 = c, c \in [0, +\infty)\}.$$

Cerchiamo ora di determinare f, g in modo che (\vec{v}, p^*) sia soluzione del sistema di equazioni che governa il moto del fluido. In primo luogo è facile verificare che è soddisfatta l'equazione:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Infatti

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Consideriamo ora l'equazione vettoriale (8.1.2) che equivale alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.2.8)$$

Si vede immediatamente che per $i = 3$ la (8.2.8) è soddisfatta banalmente.

Per $i = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1 \implies \\ -\Omega^2 [x_1 - f(x_3)] &= -\Omega^2 [x_1 - f_0] + \nu \Omega g''(x_3) \implies \\ \nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) &= -\Omega f_0. \end{aligned}$$

Analogamente per $i = 2$ deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2 \implies \\ -\Omega^2 [x_2 - g(x_3)] &= -\Omega^2 [x_2 - g_0] - \nu \Omega f''(x_3) \implies \\ \nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) &= \Omega g_0. \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo che la coppia (f, g) soddisfa al seguente sistema di equazioni:

$$\nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) = -\Omega f_0 \quad (8.2.9)$$

$$\nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) = \Omega g_0. \quad (8.2.10)$$

che, dividendo entrambi i membri delle due equazioni per ν , si può scrivere nella forma:

$$g''(x_3) - \frac{\Omega}{\nu} f(x_3) = -\frac{\Omega}{\nu} f_0 \quad (8.2.11)$$

$$f''(x_3) + \frac{\Omega}{\nu} g(x_3) = \frac{\Omega}{\nu} g_0. \quad (8.2.12)$$

Il sistema (8.2.11), (8.2.12) è un sistema differenziale di due equazioni in due incognite, del II ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogeneo.

Cominciamo col determinarne la soluzione generale, che ovviamente dipenderà da quattro costanti arbitrarie. Potremmo seguire diversi metodi.

Un metodo potrebbe essere quello di ricondurre il sistema dato ad un sistema differenziale di quattro equazioni differenziali del I ordine in quattro incognite assumendo come incognite, oltre alle funzioni f e g anche le loro derivate prime f' e g' , ed utilizzando poi le tecniche relative ai sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti non omogenei. Tuttavia questo metodo è molto lungo e complesso.

Un secondo metodo che potremmo seguire è quello di ricondurci ad un'unica equazione differenziale in una sola incognita, derivando più volte le due equazioni del sistema, ma nel nostro caso arriveremmo ad un'equazione differenziale lineare del IV ordine e per determinarne la soluzione generale dovremmo calcolare le radici dell'equazione caratteristica, equazione algebrica del IV ordine.

Noi seguiremo un terzo metodo molto più semplice grazie alla forma particolare delle equazioni (8.2.11), (8.2.12).

Introduciamo la funzione a valori complessi $F(x_3)$ così definita:

$$F(x_3) = f(x_3) + i g(x_3) \quad \forall x_3 \in [0, +\infty) \quad (8.2.13)$$

e il numero complesso:

$$F_0 = f_0 + i g_0, \quad (8.2.14)$$

dove i è l'unità immaginaria.

Ora moltiplichiamo per i entrambi i membri della (8.2.11) e all'equazione così ottenuta sommiamo membro a membro la (8.2.12):

$$f''(x_3) + i g''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} [f(x_3) + i g(x_3)] = -i \frac{\Omega}{\nu} [f_0 + i g_0]. \quad (8.2.15)$$

Utilizzando le posizioni (8.2.13), (8.2.14), la (8.2.15) diventa:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0, \quad (8.2.16)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del II ordine a coefficienti costanti (complessi) non omogenea nella funzione incognita a valori complessi $F(x_3)$. Per determinarne la soluzione generale possiamo procedere come per le equazioni lineari non omogenee a coefficienti reali con funzione incognita reale.

La soluzione generale della (8.2.16) la cerchiamo della forma:

$$F = \hat{F} + F^*$$

con \hat{F} soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (8.2.16) e F^* soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea associata alla (8.2.16) è la seguente:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = 0.$$

La sua equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - i \frac{\Omega}{\nu} = 0 \quad \implies \quad \lambda^2 = i \frac{\Omega}{\nu}.$$

Tenendo presente che l'argomento principale dell'unità immaginaria è $\frac{\pi}{2}$, otteniamo che le due determinazioni della radice quadrata (in campo complesso) del numero $i \frac{\Omega}{\nu}$ sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = -\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i).$$

Se poniamo:

$$m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}},$$

allora la soluzione generale dell'omogenea associata alla (8.2.16) è:

$$\hat{F}(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} \quad (8.2.17)$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie a valori complessi.
Per quanto riguarda F^* , la cerchiamo della forma:

$$F^* = A \quad \text{con } A = \text{costante.}$$

Sostituendo nella (8.2.16), otteniamo

$$-i \frac{\Omega}{\nu} A = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0 \quad \implies \quad A = F_0.$$

In conclusione la soluzione generale della (8.2.16) è :

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} + F_0. \quad (8.2.18)$$

Per determinare le due costanti arbitrarie C_1 e C_2 sfruttiamo le altre condizioni cui deve soddisfare \vec{v} che ancora non abbiamo sfruttato.

In particolare la condizione 3) richiede che le componenti di \vec{v} siano limitate rispetto a $x_3 \in [0, +\infty)$ e che quindi siano limitate le due funzioni f e g . Se allora teniamo presente che e^{mx_3} tende a $+\infty$ per $x_3 \rightarrow +\infty$, per avere la limitatezza dobbiamo porre

$$C_2 = 0.$$

Dunque la (8.2.18) si riduce a:

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + F_0. \quad (8.2.19)$$

Sfruttiamo ora la condizione al contorno per determinare C_1 :

$$\vec{v} \Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O) \Big|_{\Pi}$$

fornisce:

$$v_1(x_1, x_2, 0) = -\Omega x_2, \quad v_2(x_1, x_2, 0) = \Omega x_1, \quad v_3(x_1, x_2, 0) = 0.$$

La condizione su v_3 è soddisfatta, mentre le condizioni su v_1 e v_2 , per la forma che abbiamo richiesto al campo della velocità, comportano:

$$\begin{aligned} -\Omega [x_2 - g(0)] = -\Omega x_2 &\implies g(0) = 0 \\ \Omega [x_1 - f(0)] = \Omega x_1 &\implies f(0) = 0. \end{aligned}$$

Dunque dalla condizione al contorno di aderenza ne discende:

$$F(0) = 0,$$

che fornisce:

$$C_1 = -F_0.$$

Dalla (8.2.19) otteniamo perciò:

$$F(x_3) = F_0[1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)] \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \quad (8.2.20)$$

Separiamo la parte reale e la parte immaginaria:

$$f(x) + i g(x_3) = (f_0 + i g_0) [1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)],$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f_0(1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) - g_0 e^{-mx_3} \sin mx_3 \\ g(x_3) &= g_0(1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) + f_0 e^{-mx_3} \sin mx_3 \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

I risultati ottenuti ci portano ad enunciare il seguente

Teorema 8.1. *Sia dato un fluido newtoniano, incomprimibile, omogeneo, che occupi il semispazio $S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : x_3 \geq 0\}$ limitato dal piano rigido $x_3 = 0$ rotante attorno all'asse Ox_3 fissato, con velocità angolare costante $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$, $\Omega > 0$. Allora, se il campo della pressione modificata è dato dalla (8.2.1), la velocità \vec{v} di tale fluido in moto stazionario, soddisfacente le ipotesi 1), 2), 3) ha le componenti date da (8.2.2), (8.2.3), (8.2.4) con f e g definite in (8.2.21).*

Possiamo fare alcune osservazioni.

Osservazione 8.1. Se facciamo il limite per $x_3 \rightarrow +\infty$ in entrambi i membri delle (8.2.21) otteniamo:

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f(x_3) = f_0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} g(x_3) = g_0.$$

Questo risultato stabilisce che per $x_3 \rightarrow +\infty$, \vec{v} differisce dalla velocità nel moto rotatorio uniforme attorno all'asse Ox_3 con velocità angolare $\vec{\Omega}$ per il vettore costante $\vec{v}_0 = \Omega(g_0 \vec{e}_1 - f_0 \vec{e}_2)$. Infatti all'infinito abbiamo:

$$v_1 = -\Omega(x_2 - g_0), \quad v_2 = \Omega(x_1 - f_0), \quad v_3 = 0.$$

Notiamo che all'infinito si ha ancora un moto rotatorio uniforme con velocità angolare $\vec{\Omega}$ non attorno all'asse Ox_3 , ma attorno all'asse $P_0x'_3$.

Osservazione 8.2. Il gradiente del campo di pressione p^* dato dalla (8.2.1) differisce dal gradiente di $p^{*(R)}$ per il vettore costante $\vec{c}_0 = -\Omega^2(f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2)$ che è ortogonale al vettore \vec{v}_0 . Infatti:

$$\begin{aligned} \text{grad } p^{*(R)} &= \Omega^2(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \\ \text{grad } p^* &= \Omega^2[(x_1 - f_0) \vec{e}_1 + (x_2 - g_0) \vec{e}_2] = \text{grad } p^{*(R)} + \vec{c}_0. \end{aligned}$$

Notiamo che \vec{c}_0 è parallelo al vettore $P_0 - 0 = f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2$ che determina la traslazione dell'asse di rotazione del moto rotatorio all'infinito.

Osservazione 8.3. Per ogni $(f_0, g_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste uno ed un sol moto del tipo detto sopra. Inoltre, se $f_0 = g_0 = 0$, ritroviamo la soluzione banale $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$, come doveva essere.

Osservazione 8.4. Consideriamo il cammino Λ , luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo \vec{v} . Come abbiamo visto, le sue equazioni parametriche cartesiane sono:

$$x_1 = f(c), \quad x_2 = g(c), \quad x_3 = c, \quad c \in [0, +\infty).$$

Se $c = 0$ otteniamo il punto di Λ di coordinate $(f(0) = 0, g(0) = 0, 0)$; dunque il cammino Λ parte dall'origine O . Per $c \rightarrow +\infty$, abbiamo:

$$x_1 \rightarrow f_0, \quad x_2 \rightarrow g_0, \quad x_3 \rightarrow +\infty.$$

Perciò per $x_3 \rightarrow +\infty$ il cammino Λ tende a sovrapporsi all'asse $P_0x'_3$ e quindi a disporsi parallelamente all'asse Ox_3 .

Osservazione 8.5. Osserviamo che se $\nu = 0$, ossia se il fluido è perfetto, nell'ipotesi che p^* abbia la forma (6.3.1), e che le componenti della rappresentazione analitica della velocità siano date dalle (8.2.2), (8.2.3), (8.2.4), il sistema (8.2.9), (8.2.10) ha come unica soluzione

$$f(x_3) = f_0, \quad g(x_3) = g_0 \quad \forall x_3 \geq 0.$$

Dunque nel caso di fluido perfetto, il moto in tutto il semispazio risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità angolare Ω attorno all'asse $P_0x'_3$.

Mostriamo ora alcuni esempi numerici.

I grafici delle funzioni f e g sono dati per $f_0 = 10 \text{ m}$, $g_0 = 2 \text{ m}$, $\nu = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Le Figure 8.2 e 8.4 mostrano i grafici di f e g quando $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ e $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ rispettivamente, mentre le Figure 8.3 e 8.5 mostrano i grafici del luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo \vec{v} con le rispettive proiezioni.

Esaminando le Figure 8.2 e 8.4 vediamo che a contatto col piano $x_3 = 0$ c'è una regione in cui il moto del fluido non è un moto rigido di rotazione, mentre al di là di questa il moto risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità

angolare Ω attorno all'asse $P_0x'_3$, come avremmo in tutto il semispazio se il fluido fosse perfetto. Allora la natura viscosa del fluido newtoniano si manifesta solo in una regione a contatto col piano rotante, regione che viene detta strato limite o boundary layer ed al di là di tale strato il fluido si comporta come un fluido perfetto.

Lo spessore del boundary layer, come si deduce tenendo presente l'espressione di $m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$, diminuisce all'aumentare di Ω ed al diminuire di ν .

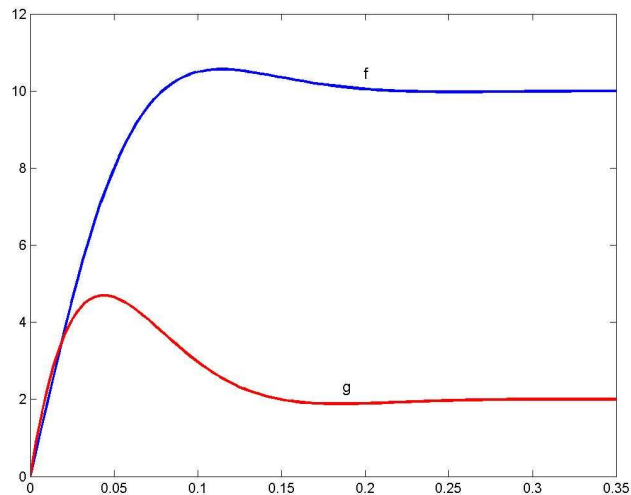


Figura 8.2: Grafici di f e g quando $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

Del problema esaminato sopra si possono anche studiare alcune varianti. Possiamo ad esempio supporre che il fluido sia compreso tra due piani paralleli Π_1 e Π_2 che ruotano uniformemente con la stessa velocità angolare $\vec{\Omega}$ attorno ad uno stesso asse ad essi normale.

Il problema può essere ulteriormente complicato assumendo che i due piani ruotino attorno a due assi diversi ad essi normali. Quest'ultima variante è molto interessante dal punto di vista fisico perché trova applicazione nel **reometro**, strumento che viene utilizzato per misurare il coefficiente di viscosità dei liquidi.

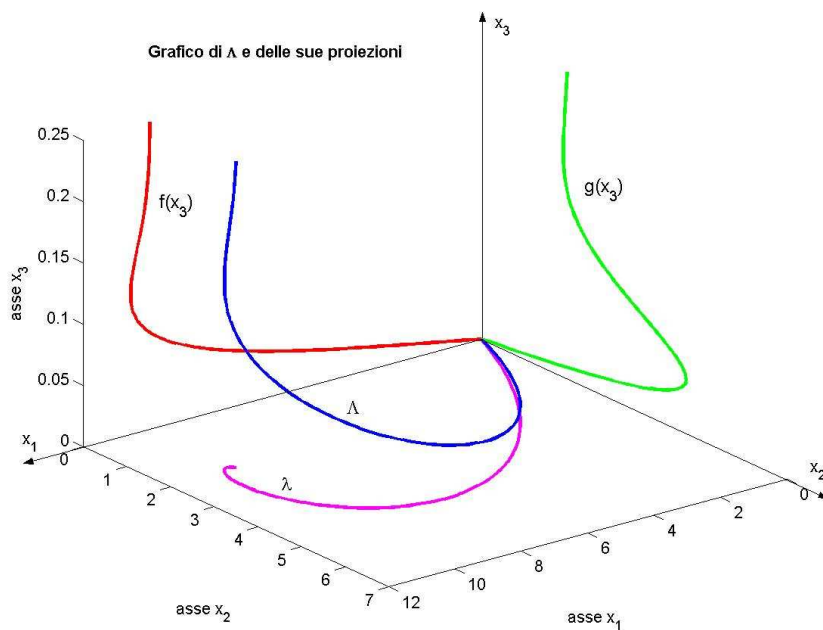


Figura 8.3: Grafico di Λ e delle sue proiezioni quando $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$.

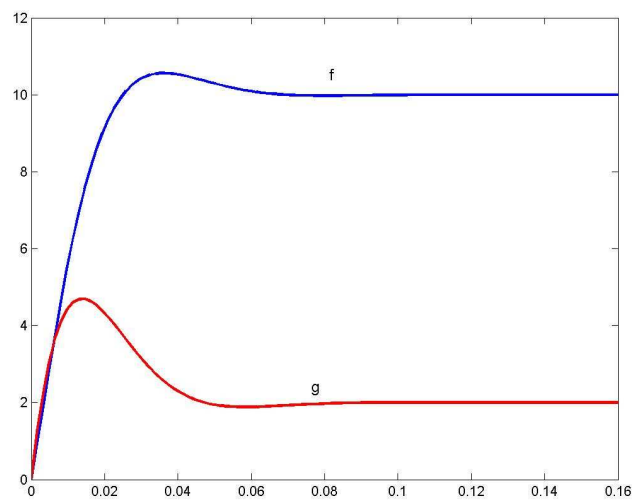


Figura 8.4: Grafici di f e g quando $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$.

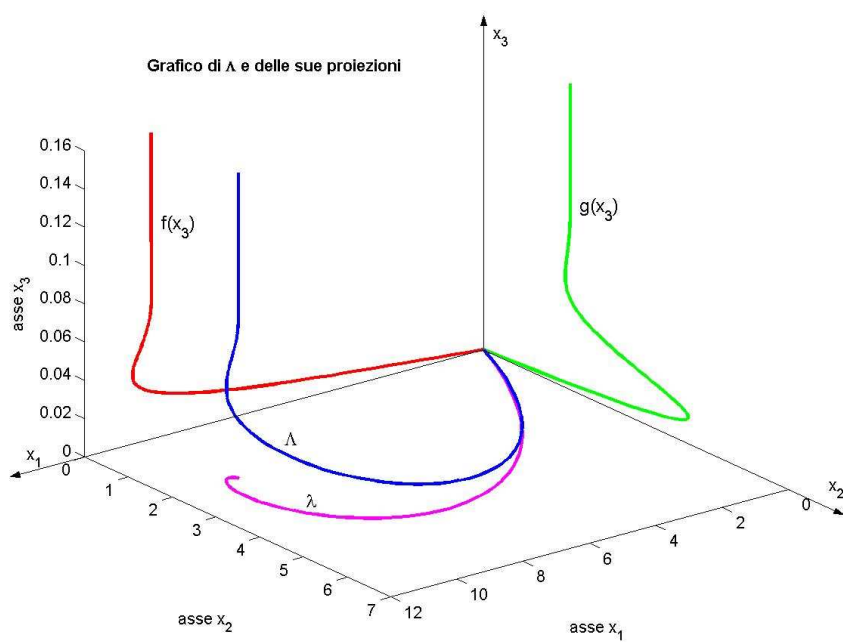


Figura 8.5: Grafico di Λ e delle sue proiezioni quando $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$.

2208. MOTI INDOTTI DA UN PIANO ROTANTE PER UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESSIBILE

Capitolo 9

Termomeccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale

9.1 Analisi della deformazione per un corpo continuo.

Richiamiamo in primo luogo la definizione di configurazione di un corpo continuo tridimensionale.

Definizione 9.1. *Considerato il corpo continuo tridimensionale \mathcal{C} , una sua configurazione è un omeomorfismo $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow S$ dove S è la chiusura di un aperto dello spazio geometrico \mathcal{E} .*

Ad ogni corpo continuo, per definizione, è associata una famiglia Φ di configurazioni, detta *famiglia delle sue configurazioni possibili*.

Introduciamo ora la definizione di **deformazione** di un corpo continuo.

Sia dato il corpo continuo \mathcal{C} e siano φ_0 e φ due sue possibili configurazioni:

$$\varphi_0 : \mathcal{C} \rightarrow S_0$$

$$X \mapsto P_0 = \varphi_0(X)$$

$$\varphi : \mathcal{C} \rightarrow S$$

$$X \mapsto P = \varphi(X).$$

Poiché l'applicazione φ_0 è un omeomorfismo, è invertibile per cui esiste la sua inversa φ_0^{-1} e

$$P_0 = \varphi_0(X) \iff X = \varphi_0^{-1}(P_0).$$

Definizione 9.2. *Definiamo deformazione del corpo continuo \mathcal{C} dalla configurazione iniziale φ_0 alla configurazione finale φ l'applicazione:*

$$x = \varphi \circ \varphi_0^{-1} : S_0 \longrightarrow S$$

$$P_0 \longmapsto P = \varphi(\varphi_0^{-1}(P_0)).$$

Considerata una generica particella X del corpo continuo, essa occuperà la posizione $P_0 = \varphi_0(X)$ nella configurazione iniziale e la posizione $P = \varphi(X)$ nella configurazione finale. Avremo perciò:

$$P = \varphi(X) = \varphi(\varphi_0^{-1}(P_0)) = x(P_0).$$

Dunque, data la particella X , se P_0, P sono le posizioni occupate da questa nella posizione iniziale, finale rispettivamente, si ha: $P = x(P_0)$ dove x è la deformazione di \mathcal{C} da φ_0 a φ .

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$.

Se P è la posizione occupata nella configurazione finale dalla particella che in quella iniziale occupa la posizione P_0 , avremo che il vettore posizione di P rispetto all'origine del riferimento è dato da:

$$P - O = x(P_0) - O.$$

Se facciamo variare P_0 in S_0 , otteniamo il campo vettoriale definito in S_0 nel modo seguente:

$$\vec{x}(P_0) = x(P_0) - O \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Tale campo vettoriale è detto *campo della deformazione* e il valore che assume in P_0 ci fornisce il vettore posizione della posizione occupata nella configurazione finale φ dalla particella che nella configurazione iniziale φ_0 occupa la posizione P_0 .

Del campo $\vec{x} = \vec{x}(P_0)$ possiamo considerare la rappresentazione analitica:

$$\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0)$$

dove (x_{01}, x_{02}, x_{03}) è la terna delle coordinate cartesiane nel riferimento $Ox_1x_2x_3$ del generico punto P_0 di S_0 .

Le componenti cartesiane della funzione vettoriale $\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ sono le tre funzioni scalari:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0)$$

che ci forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata dopo la deformazione dalla particella che prima della deformazione occupa la posizione $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$.

Definizione 9.3. Diciamo che una deformazione di un corpo continuo è regolare se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

- 1) $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ o equivalentemente $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(S_0))$ $i=1,2,3$;
- 2) $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \end{bmatrix} > 0$ in $\xi(S_0)$.

Possiamo scrivere la condizione 2) in una forma equivalente se introduciamo il campo scalare $J = J(P_0)$ così definito:

$$J(P_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \end{bmatrix} (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S_0.$$

E' allora equivalente alla condizione 2) la seguente:

$$J(P_0) > 0 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Nel seguito supporremo sempre di considerare deformazioni regolari, anche se non lo scriveremo esplicitamente.

Definizione 9.4. Dato un corpo continuo che subisce una deformazione regolare, chiamiamo gradiente di deformazione il campo tensoriale del II ordine $\tilde{F} = \tilde{F}(P_0)$ così definito:

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Le componenti della rappresentazione analitica di \tilde{F} sono:

$$F_{ij}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}).$$

Vediamo dunque che

$$\det \tilde{F}(P_0) = \det[F_{ij}(P_0)] = J(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Osserviamo che, essendo la deformazione regolare,

$$\det \tilde{F}(P_0) > 0 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Definizione 9.5. Una deformazione regolare si dice omogenea se il gradiente di deformazione è costante in S_0 .

Definizione 9.6. Diciamo che un corpo continuo subisce una deformazione rigida dalla configurazione iniziale φ_0 alla configurazione finale φ se, comunque prese due particelle $X, X' \in \mathcal{C}$, la distanza tra le posizioni che queste occupano prima e dopo la deformazione rimane invariata, cioè

$$|P_0 - P'_0| = |P - P'|,$$

essendo $P = x(P_0)$, $P' = x(P'_0)$.

E' evidente che se \mathcal{C} è un corpo rigido, gli sono consentite soltanto deformazioni rigide.

Ci proponiamo di caratterizzare il campo della deformazione per una deformazione rigida.

Facciamo dapprima alcune premesse.

Definizione 9.7. Diciamo che un tensore doppio \tilde{Q} è ortogonale se è invertibile e $\tilde{Q}^{-1} = \tilde{Q}^T$.

Osserviamo che se \tilde{Q} è un tensore doppio ortogonale, presa una base ortonormale (\vec{e}_i) e considerate la matrice $[Q_{ij}]$ delle componenti di \tilde{Q} , la matrice $[Q_{ij}^T]$ delle componenti di \tilde{Q}^T e la matrice $[Q_{ij}^{-1}]$ di \tilde{Q}^{-1} , si ha

$$[Q_{ij}^T] = [Q_{ij}]^T, \quad [Q_{ij}^{-1}] = [Q_{ij}]^{-1}, \quad [Q_{ij}^T] = [Q_{ij}^{-1}].$$

La prima relazione vale per ogni tensore doppio, la seconda per ogni tensore doppio invertibile, mentre l'ultima vale per ogni tensore doppio ortogonale.

Dalle tre relazioni scritte sopra discende

$$[Q_{ij}]^T = [Q_{ij}]^{-1},$$

ossia se \tilde{Q} è un tensore doppio ortogonale, la matrice delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale è ortogonale.

E' immediato verificare che vale anche il viceversa.

Sussiste dunque la seguente proposizione:

Proposizione 9.1. Un tensore doppio è ortogonale se e solo se è ortogonale la matrice delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale.

Notiamo poi che dalla proposizione precedente segue che per ogni tensore ortogonale \tilde{Q}

$$\det \tilde{Q} = +1 \text{ o } -1,$$

da cui discende la definizione:

Definizione 9.8. Diciamo che il tensore doppio ortogonale \tilde{Q} è un tensore ortogonale proprio se $\det \tilde{Q} = +1$.

I tensori ortogonali godono di questa ulteriore proprietà:

Proposizione 9.2. Se \tilde{Q} è un tensore doppio ortogonale, allora

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \quad (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dimostrazione

Fissata una base ortonormale ed indicate con (u_i) , (v_i) , (Q_{ij}) le successioni delle componenti di \vec{u} , \vec{v} , \tilde{Q} rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{v}) &= Q_{ij} u_j Q_{ir} v_r \\ &= Q_{ji}^T Q_{ir} u_j v_r = Q_{ji}^{-1} Q_{ir} u_j v_r \\ &= \delta_{jr} u_j v_r = u_j v_j = \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

Dalla proposizione 9.2 discende:

$$\forall \vec{u} \quad |\tilde{Q} \cdot \vec{u}|^2 = (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

Stabiliamo il seguente

Teorema 9.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo subisca una deformazione rigida è che il corrispondente campo della deformazione abbia la forma seguente:*

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0, \quad (9.1.1)$$

dove O è un punto fissato dello spazio geometrico, \tilde{Q} è un tensore doppio ortogonale indipendente da P_0 , \vec{c} è un vettore pure indipendente da P_0 e S_0 è la regione occupata dal continuo nella configurazione iniziale.

Dimostrazione

Dimostriamo dapprima la condizione sufficiente.

Il corpo continuo subisca una deformazione cui corrisponda un campo della deformazione della forma (9.1.1).

E' immediato provare che la deformazione è rigida. Infatti, prese due particelle arbitrarie X , X' ed indicate con P_0 , P'_0 le posizioni occupate prima della deformazione e con P , P' le posizioni occupate dopo la deformazione, avremo:

$$\begin{aligned} |P - P'| &= |(P - O) - (P' - O)| = |\vec{x}(P_0) - \vec{x}(P'_0)| \\ &= |[\tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c}] - [\tilde{Q} \cdot (P'_0 - O) + \vec{c}]| \\ &= |\tilde{Q} \cdot (P_0 - P'_0)| = |P_0 - P'_0| \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la conseguenza della proposizione 9.2 relativa ai tensori ortogonali.

Dunque la deformazione subita dal corpo continuo è rigida.

Dimostriamo ora la condizione necessaria.

Per ipotesi la deformazione subita dal corpo continuo è rigida e vogliamo provare che il corrispondente campo della deformazione ha la forma (9.1.1).

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$, ci riferiremo alle rappresentazioni analitiche dei campi che interverranno nel corso della dimostrazione.

Osserviamo in primo luogo che, essendo la deformazione rigida, la regione S occupata dal corpo continuo nella configurazione finale è congruente alla regione S_0 , occupata prima della deformazione.

Consideriamo tre particelle X_1, X_2, X_3 e siano $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$ le posizioni che le tre particelle occupano nella configurazione iniziale e $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$ le posizioni che occupano nella configurazione finale. Supponiamo che $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$ non siano allineati ed osserviamo che, essendo la deformazione rigida, anche i punti $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$ non sono allineati.

In corrispondenza della regione S_0 introduciamo il riferimento cartesiano ortonormale $O'x'_1x'_2x'_3$ con

$$O' = P_0^{(1)}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \text{vers}(P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) \\ \vec{e}'_3 &= \text{vers}[(P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) \times (P_0^{(3)} - P_0^{(1)})] \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}'_3 \times \vec{e}'_1\end{aligned}$$

per cui la terna $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ è una terna destra.

In corrispondenza della regione S , occupata nella configurazione finale, consideriamo il riferimento $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ ottenuto in maniera analoga a come abbiamo fissato $O'x'_1x'_2x'_3$ sfruttando le posizioni $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$, occupate dalle particelle X_1, X_2, X_3 nella configurazione φ .

Il riferimento $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ può essere riguardato come la posizione occupata da $O'x'_1x'_2x'_3$ dopo la deformazione, se pensiamo quest'ultimo riferimento rigidamente solidale a \mathcal{C} durante la deformazione rigida.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad una generica particella X del corpo continuo. Siano P_0 e P le posizioni che X occupa prima e dopo la deformazione. Indichiamo con $(x'_{01}, x'_{02}, x'_{03})$ la terna delle coordinate di P_0 rispetto al riferimento $O'x'_1x'_2x'_3$ e con $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ la terna delle coordinate di P rispetto al riferimento $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

Poiché le mutue distanze tra le posizioni occupate dalle particelle prima e dopo la deformazione restano invariate, le distanze delle posizioni occupate dalle particelle prima e dopo la deformazione dai piani coordinati dei due riferimenti risultano uguali.

Allora avremo che per la particella X le coordinate rispetto a $O'x'_1x'_2x'_3$ della posizione P_0 occupata nella configurazione iniziale sono uguali alle corrispondenti

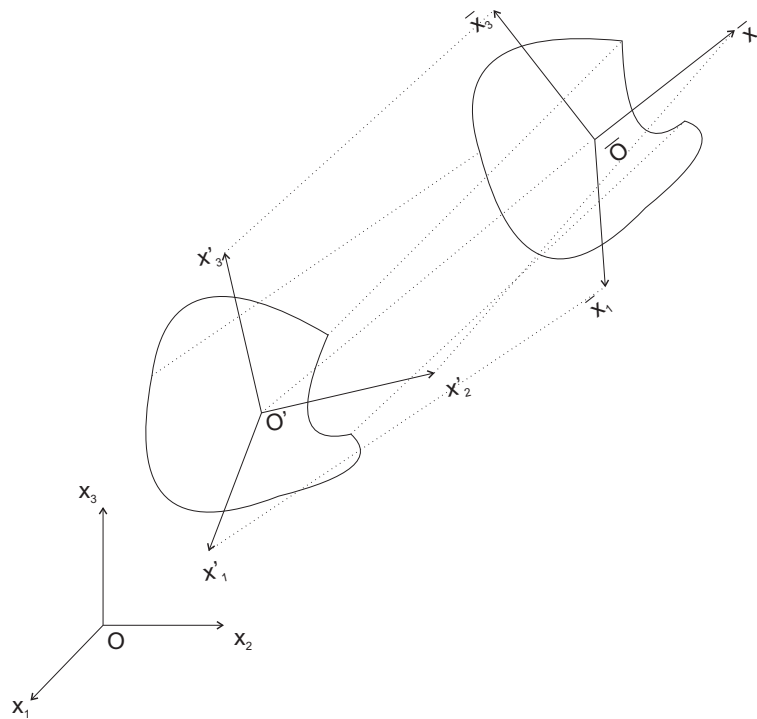


Figura 9.1: Deformazione rigida.

coordinate rispetto a $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ della posizione P occupata nella configurazione finale. Dunque

$$x'_{0h} = \overline{x}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Indichiamo ora con (x_{01}, x_{02}, x_{03}) la terna delle coordinate di P_0 rispetto a $Ox_1x_2x_3$ e con (x_1, x_2, x_3) le coordinate di P rispetto a $Ox_1x_2x_3$.

Vediamo di trovare il legame tra le coordinate (x_i) e le coordinate (x_{0i}) .

Sfrutteremo più volte le relazioni tra le coordinate di uno stesso punto rispetto a due diversi riferimenti.

Consideriamo dapprima i riferimenti $Ox_1x_2x_3$ e $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ riguardando il primo come “vecchio” riferimento e il secondo come “nuovo” riferimento.

Allora le “vecchie” coordinate (x_i) di P sono legate alle “nuove” coordinate (\overline{x}_h) nel modo seguente:

$$x_i = \alpha_{ih} \overline{x}_h + x_i(\overline{O}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.1.2)$$

dove

α_{ih} = componente di \overrightarrow{e}_h rispetto a \overrightarrow{e}_i

$(x_i(\overline{O}))$ = terna delle coordinate rispetto ad $Ox_1x_2x_3$ del punto \overline{O} .

Poiché, come abbiamo osservato sopra,

$$x'_{0h} = \bar{x}_h \quad h = 1, 2, 3,$$

nelle (14.8.1) possiamo sostituire \bar{x}_h con x'_{0h} , ottenendo:

$$x_i = \alpha_{ih} x'_{0h} + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1.3)$$

Ora assumiamo come “vecchio” riferimento $O'x'_1x'_2x'_3$ e come “nuovo” riferimento $Ox_1x_2x_3$.

Esprimiamo le “vecchie” coordinate (x'_{0h}) di P_0 tramite le sue “nuove” coordinate (x_{0i}):

$$x'_{0h} = \beta_{hj} x_{0j} + x'_h(O) \quad h = 1, 2, 3 \quad (9.1.4)$$

dove

β_{hj} = componente di \vec{e}'_j rispetto ad \vec{e}'_h

($x'_h(O)$) = terna delle coordinate rispetto ad $O'x'_1x'_2x'_3$ del punto O .

Sostituendo le (9.1.4) nelle (9.1.3), otteniamo:

$$x_i = \alpha_{ih} \beta_{hj} x_{0j} + \alpha_{ih} x'_h(O) + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1.5)$$

D'altra parte

$\alpha_{ih} \beta_{hj}$ = elemento che sta nella i -esima riga e j -esima colonna della matrice $\mathbb{A}\mathbb{B}$, con $\mathbb{A} = [\alpha_{ih}]$ e $\mathbb{B} = [\beta_{hj}]$.

Poiché le matrici \mathbb{A} e \mathbb{B} sono entrambe ortogonali, anche il loro prodotto lo è. Se allora poniamo:

$$Q_{ij} = \alpha_{ih} \beta_{hj},$$

la matrice $[Q_{ij}]$ risulta ortogonale.

Osserviamo tra l'altro che, avendo considerato solo basi che sono terne destre, $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B} = 1$ per cui $\det [Q_{ij}] = 1$.

Facendo l'ulteriore posizione:

$$c_i = \alpha_{ih} x'_h(O) + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3,$$

le (9.1.5) si scrivono nella forma:

$$x_i = Q_{ij} x_{0j} + c_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1.6)$$

Se ora introduciamo il tensore doppio \tilde{Q} che ha come matrice delle sue componenti rispetto alla base \vec{e}_i la matrice $[Q_{ij}]$, questo sarà un tensore ortogonale perché è ortogonale la matrice delle sue componenti; inoltre \tilde{Q} è indipendente da P_0 così come è indipendente da P_0 il vettore \vec{c} avente come terna delle sue componenti

rispetto alla base \vec{e}_i la terna (c_1, c_2, c_3) . Allora le tre equazioni (9.1.6), tenendo presente che (x_1, x_2, x_3) sono le coordinate del punto $P = x(P_0)$ dove P_0 di coordinate (x_{01}, x_{02}, x_{03}) è la posizione occupata prima della deformazione dalla generica particella del corpo continuo, sono equivalenti all'equazione vettoriale:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0$$

con \tilde{Q} e \vec{c} tensore doppio ortogonale e vettore entrambi indipendenti da P_0 . Il teorema risulta così dimostrato.

Osservazione 9.1. Il tensore \tilde{Q} risulta un tensore ortogonale proprio, poiché, come abbiamo visto dalla dimostrazione, $\det \tilde{Q} = 1$.

Definizione 9.9. Se si ha una deformazione rigida tale che $\tilde{Q} = \tilde{a}$ per cui il corrispondente campo della deformazione si presenta nella forma:

$$\vec{x}(P_0) = (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0,$$

con \vec{c} vettore indipendente da P_0 , questa è detta una traslazione.

Se si ha una deformazione rigida tale che $\vec{c} = \vec{0}$ per cui il corrispondente campo della deformazione si presenta nella forma:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) \quad \forall P_0 \in S_0$$

con \tilde{Q} tensore doppio ortogonale proprio indipendente da P_0 , questa è detta una rotazione.

Osservazione 9.2. Una generica deformazione rigida si ottiene componendo una traslazione con una rotazione o viceversa una traslazione con una rotazione.

Come è immediato verificare, il teorema 9.1.7 ammette il seguente

Corollario 9.1. Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo subisca una deformazione rigida è che il corrispondente campo della deformazione goda della proprietà seguente:

$$\vec{x}(P_0) = \vec{x}(\bar{P}_0) + \tilde{Q} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0, \quad (9.1.7)$$

dove \tilde{Q} è un tensore doppio ortogonale indipendente da P_0 e S_0 è la regione occupata dal continuo nella configurazione iniziale.

Ci proponiamo ora di vedere quale forma assume in una deformazione rigida il gradiente di deformazione $\tilde{F} = \tilde{F}(P_0)$.

Tenendo presente che

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}},$$

dalle (9.1.6) deduciamo

$$F_{ij} = Q_{ij}$$

per cui

$$\tilde{F}(P_0) = \tilde{Q} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dunque in una deformazione rigida il gradiente di deformazione è un tensore ortogonale proprio indipendente da P_0 .

Perciò una deformazione rigida è una deformazione omogenea. Inoltre, poiché per una deformazione rigida $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ e $J = \det \tilde{F} = \det \tilde{Q} = 1 > 0$ in S_0 , deduciamo che ogni deformazione rigida è regolare.

Introduciamo una nuova definizione.

Sia dato un corpo continuo che subisce una deformazione.

Definizione 9.10. *Consideriamo una generica particella X del corpo continuo che prima della deformazione occupi la posizione P_0 e dopo la deformazione occupi la posizione P . Allora definiamo spostamento della particella X il vettore*

$$\vec{u} = P - P_0.$$

D'altra parte:

$$\vec{u} = P - P_0 = (P - O) - (P_0 - O) = \vec{x}(P_0) - (P_0 - O).$$

Se facciamo variare P_0 in S_0 resta definito su S_0 il campo \vec{u} dello spostamento:

$$\vec{u}(P_0) = \vec{x}(P_0) - (P_0 - O) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (9.1.8)$$

Dalla (9.1.8) vediamo che in una deformazione regolare $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$.

Possiamo rappresentare il gradiente di deformazione in termini di spostamento. Infatti

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0)$$

e dalla (9.1.8) deduciamo:

$$\vec{x}(P_0) = \vec{u}(P_0) + (P_0 - O),$$

per cui

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{u}(P_0) + \text{grad}_0 (P_0 - O) = \text{grad}_0 \vec{u}(P_0) + \tilde{a}.$$

Perciò

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a} \quad \text{in } S_0. \quad (9.1.9)$$

In componenti si ha

$$F_{ij} = u_{i,j} + a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} + \delta_{ij}.$$

Introduciamo un nuovo campo tensoriale che viene usato nell'analisi delle deformazioni per un corpo continuo.

Definizione 9.11. *Prende il nome di tensore destro di Cauchy-Green il campo tensoriale del secondo ordine $\tilde{C} = \tilde{C}(P_0)$ così definito :*

$$\tilde{C}(P_0) = \tilde{F}^T(P_0) \tilde{F}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Il tensore destro di Cauchy-Green è simmetrico in S_0 .

Infatti

$$\tilde{C}^T = (\tilde{F}^T \tilde{F})^T = \tilde{F}^T (\tilde{F}^T)^T = \tilde{F}^T \tilde{F} = \tilde{C}.$$

Ovviamente le componenti del tensore destro di Cauchy-Green sono date da:

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$$

con la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

E' possibile scrivere \tilde{C} in termini di spostamento, tenendo presente come si scrive in termini di spostamento \tilde{F} :

$$\tilde{C} = (\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a})^T (\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}.$$

Definizione 9.12. *Definiamo tensore di deformazione finita il campo tensoriale del secondo ordine $\tilde{d} = \tilde{d}(P_0)$ dato da:*

$$\tilde{d}(P_0) = \frac{1}{2} [\tilde{C}(P_0) - \tilde{a}] \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Come si può facilmente verificare:

$$\tilde{d} = \tilde{d}^T \quad \text{in } S_0.$$

Il tensore di deformazione finita si può esprimere in termini di \tilde{F} e di \vec{u} :

$$\tilde{d} = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{a}) = \frac{1}{2} (\text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u}).$$

In componenti abbiamo:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (u_{k,i} u_{k,j} + u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Si potrebbe provare che il tensore di deformazione finita descrive in maniera completa tutte le caratteristiche geometriche di una deformazione.

Dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione 9.3. *Se un corpo continuo subisce una deformazione rigida, allora*

$$\tilde{d}(P_0) = \tilde{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Come sappiamo, se la deformazione di un corpo continuo è rigida, si ha:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0 \implies \tilde{F}(P_0) = \tilde{Q} \quad \forall P_0 \in S_0$$

con \tilde{Q} = tensore ortogonale indipendente da P_0 .

Dunque in S_0 si ha

$$\tilde{d} = \frac{1}{2}(\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{Q}^T \tilde{Q} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{Q}^{-1} \tilde{Q} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{a} - \tilde{a}) = \tilde{0}.$$

Dalla proposizione 9.3 concludiamo che il tensore di deformazione finita è in un certo senso una misura della deformabilità, ossia della capacità di deformarsi, di un corpo continuo che subisca una deformazione.

Più avanti, accanto al tensore di deformazione finita, introdurremo il tensore di deformazione infinitesima che nell'ambito della teoria delle "piccole" deformazioni svolge lo stesso ruolo che svolge \tilde{d} nello studio di una generica deformazione.

9.2 Condizione di incomprimibilità ed equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Supponiamo di avere un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ rispetto ad un dato osservatore.

Sia S_0 la regione che occupa nella configurazione di riferimento φ_0 e sia $S(t)$ la regione che occupa all'istante t durante il moto, cioè in corrispondenza della configurazione φ_t .

Dal punto di vista materiale il moto è descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (9.2.1)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (9.2.2)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione P_0 ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (9.2.3)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante t dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane (x_{01}, x_{02}, x_{03}) .

Poiché il moto è regolare, sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

- 1) $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ o equivalentemente $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$ $i=1,2,3$;
- 2) $J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] > 0$ in \mathcal{S}_0 .

Fissiamo un istante $t \in [t_0, t_1]$ e consideriamo l'applicazione

$$x(\cdot, t) : S_0 \rightarrow S(t)$$

$$P_0 \mapsto P = x(P_0, t).$$

Poiché $x(\cdot, t) = \varphi_t \circ \varphi_0^{-1}$, si ha che l'applicazione $x(\cdot, t)$ rappresenta la deformazione che il corpo continuo subisce dalla configurazione ϕ_0 alla configurazione φ_t .

Osserviamo poi che se il moto è regolare, $\forall t \in [t_0, t_1]$ la deformazione che il continuo subisce dalla configurazione φ_0 alla configurazione φ_t è regolare.

Stabiliamo ora un teorema che ci sarà molto utile nel seguito.

Teorema 9.2. *Sia dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Se $f = f(P, t)$ è un campo scalare spaziale continuo in \mathcal{S} , preso un qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* occupante la regione $S^*(t)$ all'istante $t \in [t_0, t_1]$, si ha:*

$$\int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{S_0^*} f_m(P_0, t) J(P_0, t) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (9.2.4)$$

dove S_0^* è la regione occupata da \mathcal{C}^* nella configurazione di riferimento e f_m è la rappresentazione materiale del campo spaziale f .

Dimostrazione

Per definizione di integrale esteso a regioni di \mathcal{E} , abbiamo:

$$\int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{\xi(S^*(t))} f^0(x_1, x_2, x_3, t) dx \quad (9.2.5)$$

dove $\xi(S^*(t))$ è la regione di \mathbb{R}^3 descritta dalla terna (x_1, x_2, x_3) delle coordinate cartesiane del punto P al variare di tale punto in $S^*(t)$, f^0 è la rappresentazione analitica del campo f e $dx = dx_1 dx_2 dx_3$.

D'altra parte, per il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione in \mathbb{R}^3 , è possibile trasformare l'integrale scritto sopra esteso a $\xi(S^*(t))$ in un integrale esteso a $\xi(S_0^*)$. Infatti tale teorema è applicabile perché il corpo continuo si muove di moto regolare per cui $\forall t \in [t_0, t_1]$ l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi(S_0) &\longrightarrow \xi(S(t)) \\ (x_{01} \ x_{02} \ x_{03}) &\longmapsto (x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)) \end{aligned}$$

è sicuramente un diffeomorfismo, cioè un'applicazione invertibile di classe \mathcal{C}^1 . (In realtà è ancora più regolare, essendo di classe \mathcal{C}^2). Dunque la (9.2.5) assume la forma:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} f(P, t) dS &= \\ \int_{\xi(S_0^*)} f^0(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] dx_0 &= \\ \int_{S_0^*} f(x(P_0, t), t) J(P_0, t) dS_0 &= \int_{S_0^*} f_m(P_0, t) J(P_0, t) dS_0. \end{aligned}$$

Il teorema risulta così dimostrato.

Il risultato continua a sussistere per campi vettoriali e tensoriali.

Vediamo ora come si esprime dal punto di vista materiale la condizione di incomprimibilità.

Richiamiamo la definizione di moto incomprimibile.

Definizione 9.13. *Un corpo continuo \mathcal{C} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ si muove di moto incomprimibile se, preso un suo qualsiasi sottocorpo \mathcal{C}^* , il volume $V^*(t)$ della regione che esso occupa durante il moto istante per istante non varia al trascorrere del tempo.*

Com'è noto, sussiste la seguente proposizione

Proposizione 9.4. *Dal punto di vista spaziale un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se e solo se*

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ci proponiamo di dedurre l'analogia condizione dal punto di vista materiale.

Teorema 9.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ si muova di moto incompressibile è che*

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Dimostrazione

Condizione necessaria

Supponiamo che in $[t_0, t_1]$ un generico corpo continuo si muova di moto incompressibile. Dunque per definizione, preso un sottocorpo \mathcal{C}^* arbitrario, il volume $V^*(t)$ della regione $S^*(t)$ da esso occupata istante per istante non varia al trascorrere del tempo, ossia:

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{e} \quad \forall \mathcal{C}^*.$$

D'altra parte:

$$V^*(t) = \int_{S^*(t)} dS,$$

ma per il teorema 9.2 sul cambiamento delle variabili d'integrazione deduciamo:

$$V^*(t) = \int_{S_0^*} J(P_0, t) dS_0.$$

Se ora deriviamo rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = \int_{S_0^*} \dot{J}(P_0, t) dS_0 = 0 \quad \forall S_0^* \text{ chiusura di un aperto } \in S_0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per l'arbitrarietà di S_0^* , per la continuità della funzione integranda e per l'arbitrarietà di t si ha

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \text{in } S_0 \times [t_0, t_1] = \mathcal{S}_0. \quad (9.2.6)$$

Condizione sufficiente

Assumiamo che durante il moto di un corpo continuo valga la (9.2.6). Si prova facilmente che il moto è incompressibile procedendo in senso inverso rispetto a quanto fatto prima.

Osserviamo che

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \implies J(P_0, t) = J(P_0) \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Supponiamo di assumere come configurazione di riferimento ϕ_0 la configurazione iniziale del moto, cioè ϕ_{t_0} .

Dalle equazioni scalari del moto dal punto di vista materiale :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3,$$

ponendo $t = t_0$, deduciamo:

$$x_{0i} = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0) \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque

$$J(P_0, t_0) = 1 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Se poi il moto è incomprimibile, essendo J indipendente dal tempo, otteniamo:

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Perciò possiamo enunciare il seguente corollario del teorema 9.3

Corollario 9.2. *Se si assume come configurazione di riferimento quella iniziale, un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ se e solo se*

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Ci proponiamo ora di dedurre l'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Ricordiamo che l'equazione di continuità della massa dal punto di vista spaziale è la seguente:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

In primo luogo denotiamo con $\rho_m = \rho_m(P_0, t)$ la densità di massa dal punto di vista materiale, legata alla densità di massa dal punto di vista spaziale $\rho = \rho(P, t)$ mediante la nota relazione:

$$\rho_m(P_0, t) = \rho(x(P_0, t), t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Sia poi $\rho_0 = \rho_0(P_0)$ con $P_0 \in S_0$ la densità di massa nella configurazione di riferimento che supponiamo sia di classe \mathcal{C}^1 in S_0 .

Consideriamo un sottocorpo arbitrario \mathcal{C}^* del corpo continuo. Per definizione di densità di massa, si ha:

$$m(\mathcal{C}^*) = \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0,$$

$$m(\mathcal{C}^*) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui:

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS = \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.2.7)$$

Se applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione all'integrale al primo membro della (9.2.7), tale equazione assume la forma:

$$\int_{S_0^*} \rho(x(P_0, t), t) J(P_0, t) dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

da cui:

$$\int_{S_0^*} [\rho_m(P_0, t) J(P_0, t) - \rho_0(P_0)] dS_0 = 0 \quad \forall S_0^* \text{ chiusura di un aperto } \in S_0, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per le usuali assunzioni sui campi che intervengono nello studio del moto di un corpo continuo e per la regolarità del moto stesso, la funzione integranda è continua in S_0 . Allora grazie all'arbitrarietà di S_0^* e di t deduciamo:

$$\rho_m(P_0, t) J(P_0, t) = \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in S_0. \quad (9.2.8)$$

La (9.2.8) rappresenta l'**equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale**.

Supponiamo ora che il moto sia anche incompressibile.

Come sappiamo, dal punto di vista spaziale, sostituendo la condizione di incompressibilità $\text{div } \vec{v} = 0$ in \mathcal{S} nell'equazione di continuità della massa, si ottiene

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Vediamo cosa avviene dal punto di vista materiale.

L'equazione di continuità della massa e la condizione di incompressibilità sono

$$\rho_m(P_0, t) J(P_0, t) = \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in S_0$$

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in S_0.$$

Deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione di continuità e sfruttiamo la condizione di incompressibilità:

$$\dot{\rho}_m(P_0, t) J(P_0, t) + \rho_m(P_0, t) \dot{J}(P_0, t) = \dot{\rho}_m(P_0, t) J(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in S_0.$$

Poiché il moto è regolare, $J(P_0, t) \neq 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ per cui dalla relazione precedente deduciamo:

$$\dot{\rho}_m(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Quindi dal punto di vista materiale la condizione di incomprimibilità e l'equazione di continuità della massa forniscono:

$$\dot{J} = 0, \quad \dot{\rho}_m = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Se poi supponiamo che la configurazione di riferimento sia quella iniziale, cioè $\phi_0 = \phi_{t_0}$, la condizione di incomprimibilità si riduce a :

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

e quindi direttamente dall'equazione di continuità otteniamo:

$$\rho_m(P_0, t) = \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

9.3 Prima e seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale.

Vediamo come si scrivono dal punto di vista materiale la prima e la seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Stabiliamo dapprima alcuni risultati preliminari.

Supponiamo di avere un corpo continuo in moto regolare rispetto a un dato osservatore nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

Dal punto di vista materiale il moto è descritto in uno dei seguenti modi:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

o

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

o

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

Come abbiamo osservato in precedenza, per ogni t fissato in $[t_0, t_1]$, l'applicazione $x(\cdot, t)$ rappresenta la deformazione del corpo continuo dalla configurazione di riferimento a quella relativa all'istante t e $\vec{x}(\cdot, t)$ il corrispondente campo della deformazione. Potremo allora introdurre il campo del gradiente di deformazione

relativo ad ogni istante t fissato, che al variare di t risulterà un campo tensoriale del secondo ordine dipendente dalla variabile reale t :

$$\tilde{F} = \tilde{F}(P_0, t) \quad \text{con } (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Per definizione

$$\tilde{F}(P_0, t) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0, t)$$

ed essendo il moto regolare

$$\det \tilde{F}(P_0, t) = J(P_0, t) > 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Allora $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \exists \tilde{F}^{-1}(P_0, t)$.

Se indichiamo con F_{ij}^{-1} le componenti di \tilde{F}^{-1} , si ha

$$[F_{ij}^{-1}] = [F_{ij}]^{-1}.$$

D'altra parte

$$[F_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right]$$

ed inoltre le relazioni

$$\bar{x}_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3$$

sono invertibili per cui è possibile ottenere x_{01}, x_{02}, x_{03} in funzione di (x_1, x_2, x_3, t) :

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3.$$

Allora per un noto risultato di Analisi, deduciamo:

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \right]_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)},$$

da cui

$$[F_{ij}^{-1}] = \left[\frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \right]_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)}.$$

A questo punto introduciamo un nuovo campo tensoriale, sempre in ambito materiale: $\tilde{G} = \tilde{G}(P_0, t)$ così definito in \mathcal{S}_0

$$\tilde{G} = (\tilde{F}^{-1})^T.$$

Tenendo presente che

$$F_{ij}^{-1} = \left. \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \right|_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)},$$

abbiamo che le componenti di \tilde{G} sono date da

$$G_{ij} = \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)}.$$

In tutto ciò che segue supponiamo di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano regioni che siano la chiusura di domini regolari.

Enunciamo senza dimostrarlo il seguente

Lemma 9.1. *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Se $f = f(P, t)$, $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$, $\tilde{t} = \tilde{t}(P, t)$ sono rispettivamente un campo scalare, un campo vettoriale e un campo tensoriale spaziali, continui in S , allora per ogni sottocorpo C^* si ha $\forall t \in [t_0, t_1]$:*

$$\int_{\partial S^*(t)} f \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J f_m (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (9.3.1)$$

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \vec{u}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (9.3.2)$$

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{t} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \tilde{t}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (9.3.3)$$

dove \vec{n} e \vec{n}_0 sono i versori della normale esterna nei punti di $\partial S^*(t)$, ∂S_0^* rispettivamente, mentre f_m , \vec{u}_m , \tilde{t}_m sono le rappresentazioni materiali dei campi spaziali f , \vec{u} , \tilde{t} .

Sfruttando tale lemma deduciamo la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale.

Dato il corpo continuo C in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, consideriamone un sottocorpo arbitrario C^* ed indichiamo con $S^*(t)$ la regione da questo occupata al generico istante t durante il moto.

Scriviamo per C^* la prima equazione cardinale:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.3.4)$$

Consideriamo l'integrale di volume a primo membro della (9.3.4); tale integrale, esteso alla regione $S^*(t)$ occupata da C^* , può essere trasformato in un integrale esteso a S_0^* , regione che il sottocorpo occupa nella configurazione di riferimento, utilizzando il teorema sul cambiamento delle variabili d'integrazione:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S_0^*} \rho_m \ddot{\vec{x}} J dS_0. \quad (9.3.5)$$

Ma, poiché per l'equazione di continuità della massa (9.2.8) si ha

$$\rho_m J = \rho_0,$$

dove ρ_0 è la densità di massa nella configurazione di riferimento, la (9.3.5) diventa:

$$\int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{x} dS_0. \quad (9.3.6)$$

In maniera analoga si trasforma il primo integrale al secondo membro della (9.3.4):

$$\int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m dS_0. \quad (9.3.7)$$

Per quanto riguarda l'integrale di superficie che compare nella (9.3.4), applichiamo all'integrale esteso a $\partial S^*(t)$ il lemma 9.1 per cui si ottiene:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0. \quad (9.3.8)$$

Rivolgiamo ora la nostra attenzione al vettore che compare sotto integrale al secondo membro della (9.3.8):

$$J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)$$

e consideriamone la i -esima componente data da:

$$[J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)]_i = J T_{ik}^{(m)} (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)_k = J T_{ik}^{(m)} G_{kj} n_{0j}, \quad (9.3.9)$$

dove abbiamo denotato con $(T_{ik}^{(m)})$ la successione delle componenti di \tilde{T}_m .

Introduciamo a questo punto una nuova definizione.

Definizione 9.14. *Dato un corpo continuo in moto regolare, prende il nome di I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff il campo tensoriale materiale del II ordine $\tilde{S} = \tilde{S}(P_0, t)$ così definito:*

$$\tilde{S}(P_0, t) = J(P_0, t) \tilde{T}_m(P_0, t) \tilde{G}_m(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Si potrebbe introdurre anche il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, ma tale definizione non è necessaria per i nostri scopi.

Le componenti di \tilde{S} sono date da:

$$S_{ij} = J T_{ik}^{(m)} G_{kj}.$$

Allora la (9.3.9) diventa:

$$[J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)]_i = S_{ij} n_{0j} = [\tilde{S} \cdot \vec{n}_0]_i. \quad (9.3.10)$$

Grazie alla (9.3.10), la (9.3.8) si scrive nella forma

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \, d\Sigma_0. \quad (9.3.11)$$

Sostituendo le (9.3.6), (9.3.7), (9.3.11), nella (9.3.5), otteniamo che la prima equazione cardinale diventa:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \ddot{\vec{x}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m \, dS_0 + \int_{\partial S_0^*} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \, d\Sigma_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.3.12)$$

Osserviamo che, essendo il moto regolare, $J, \tilde{G} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$, mentre $\tilde{T}_m \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0)$ per le usuali ipotesi di regolarità su \tilde{T} . Allora il tensore di Piola - Kirchhoff, come si vede facilmente dalla sua definizione, gode della seguente proprietà di regolarità:

$$\tilde{S} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0).$$

Grazie a tale proprietà di regolarità, possiamo applicare il teorema della divergenza all'integrale di superficie che compare nella (9.3.12) trasformandolo in un integrale di volume.

La (9.3.12) assume così la forma seguente:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \ddot{\vec{x}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m \, dS_0 + \int_{S_0^*} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \, dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.3.13)$$

Riunendo tutto sotto un unico segno di integrale al primo membro, otteniamo:

$$\int_{S_0^*} (\rho_0 \ddot{\vec{x}} - \rho_0 \vec{F}_m - \operatorname{div}_0 \tilde{S}) \, dS_0 = \vec{0} \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (9.3.14)$$

L'equazione (9.3.14) sussiste per ogni sottocorpo \mathcal{C}^* e quindi per ogni S_0^* che sia chiusura di un dominio regolare contenuto in S_0 . Allora, grazie alla continuità del campo vettoriale sotto integrale ed all'arbitrarietà di S_0^* e di t , concludiamo che tale campo vettoriale è necessariamente nullo in \mathcal{S}_0 , ossia si ha:

$$\rho_0 \ddot{\vec{x}} = \rho_0 \vec{F}_m + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.3.15)$$

La (9.3.15) è la **prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale**.

Se confrontiamo la (9.3.15) con la corrispondente equazione dal punto di vista spaziale:

$$\rho \vec{v} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}$$

si vede subito che c'è un'analogia formale tra le due equazioni.

Si noti comunque che nell'equazione dal punto di vista materiale non compare la densità di massa dal punto di vista materiale, ma la densità di massa nella configurazione di riferimento.

Appare poi evidente che il ruolo svolto in ambito spaziale dal tensore degli sforzi di Cauchy è svolto in ambito materiale dal I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

Per quanto riguarda la seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui ricordiamo che dal punto di vista spaziale non l'avevamo mai utilizzata direttamente, ma avevamo sempre fatto uso di una sua conseguenza, cioè la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per tale ragione, dal punto di vista materiale, non ricaveremo la seconda equazione indefinita a partire dalla seconda equazione cardinale, ma ci limiteremo a stabilire come si riflette sul tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per definizione del tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, abbiamo:

$$\tilde{S} = J \tilde{T}_m \tilde{G} = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^{-1})^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1}. \quad (9.3.16)$$

Se allora moltiplichiamo a destra il primo e l'ultimo membro della (9.3.16) per \tilde{F}^T , otteniamo

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m \tilde{a} = J \tilde{T}_m.$$

Dunque

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m. \quad (9.3.17)$$

D'altra parte, per la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy, si ha $\tilde{T}_m = \tilde{T}_m^T$, per cui dalla (9.3.17) deduciamo:

$$(\tilde{S} \tilde{F}^T)^T = (J \tilde{T}_m)^T \implies \tilde{F} \tilde{S}^T = J \tilde{T}_m^T = J \tilde{T}_m = \tilde{S} \tilde{F}^T.$$

In conclusione la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy comporta come conseguenza per il I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff la relazione seguente

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.3.18)$$

Nel seguito, in luogo della seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale, faremo uso dell'equazione (9.3.18).

E' evidente che, come dal punto di vista spaziale, anche dal punto di vista materiale, in genere non è possibile impostare il problema del moto di un corpo continuo rimanendo in ambito puramente meccanico.

Le equazioni generali che abbiamo a disposizione sono:

- l'equazione di continuità della massa:

$$\rho_m J = \rho_0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0$$

- la prima equazione indefinita:

$$\rho_0 \ddot{\vec{x}} = \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0$$

- la conseguenza della seconda equazione indefinita:

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Poiché siamo dal punto di vista materiale, l'incognita meccanica principale non è più il campo della velocità, bensì il campo $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$. Tuttavia questo usualmente viene sostituito come campo incognito dal campo dello spostamento $\vec{u} = \vec{u}(P_0, t)$, correlato al campo \vec{x} nel modo seguente:

$$\vec{u}(P_0, t) = \vec{x}(P_0, t) - (P_0 - O),$$

per cui

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{u}}, \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{u}}.$$

Allora, preso \vec{u} come campo incognito al posto di \vec{x} , le equazioni che abbiamo a disposizione per impostare il problema del moto di un corpo continuo in ambito meccanico dal punto di vista materiale sono:

$$\begin{aligned} \rho_m J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^T. \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \quad (9.3.19)$$

In tali equazioni ρ_0 e \vec{F}_m , sono campi assegnati, mentre il gradiente di deformazione \tilde{F} si esprime in funzione di \vec{u} nel modo seguente:

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$$

e $J = \det \tilde{F}$.

I campi scalari incogniti sono: u_i ($i = 1, 2, 3$), ρ_m , S_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

Dunque le incognite scalari sono in tutto 13.

D'altra parte il sistema di equazioni (9.3.19) equivale a 7 equazioni scalari indipendenti.

Perciò il problema non è determinato, essendo le incognite in numero superiore alle equazioni.

Per ottenere pareggio tra numero di equazioni e numero di incognite dovremo aggiungere altre 6 equazioni scalari indipendenti. Tali equazioni, come abbiamo visto in un precedente corso relativamente all'ambito spaziale, devono caratterizzare il comportamento meccanico del corpo reale che stiamo schematizzando con il modello di corpo continuo e sono più precisamente le **relazioni sforzo-deformazione** suggerite dall'esperienza. Tuttavia l'esperienza stessa mostra che in esse compaiono, in generale, delle nuove grandezze incognite legate alla termodinamica.

Dunque, in generale, per risolvere il problema del moto di un corpo continuo deformabile, non è sufficiente rimanere in ambito meccanico, ma occorre affrontare un problema più generale: il **problema termomeccanico**.

9.4 Equazione e disequazione indefinita conseguenze degli assiomi della termodinamica.

Ci proponiamo in primo luogo di determinare l'equazione indefinita conseguenza del primo assioma della termodinamica. A tal fine richiamiamo l'equazione globale che traduce tale assioma per un corpo continuo.

Assioma 9.1. *I assioma della termodinamica per un corpo continuo. Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Allora $\forall t \in [t_0, t_1]$ si ha:*

$$\int_{S(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S(t)} \rho r dS - \int_{\partial S(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS, \quad (9.4.1)$$

dove

k = energia interna specifica;

r = densità delle potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore;

\vec{q} = vettore flusso di calore;

\vec{n} = versore normale a $\partial S(t)$ rivolto verso l'esterno di $S(t)$.

(Non abbiamo specificato le altre grandezze che appaiono nella (9.4.1) perché sono già state usate più volte in precedenza).

Consideriamo ora un sottocorpo arbitrario \mathcal{C}^* del corpo continuo ed indichiamo con $S^*(t)$ la regione che questo occupa all'istante t durante il moto. Scriviamo

poi per \mathcal{C}^* la (9.4.1) ad un istante t arbitrario appartenente all'intervallo $[t_0, t_1]$:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S^*(t)} \rho r dS - \int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS. \quad (9.4.2)$$

Denotata con S_0^* la regione che \mathcal{C}^* occupa nella configurazione di riferimento, applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione all'integrale al primo membro della (9.4.2) ottenendo:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S_0^*} J \rho_m \dot{k}_m dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \dot{k}_m dS_0, \quad (9.4.3)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso dell'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Analogamente si deduce:

$$\int_{S^*(t)} \rho r dS = \int_{S_0^*} \rho_0 r_m dS_0. \quad (9.4.4)$$

Inoltre per il lemma 9.1 per l'integrale di superficie si ha:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (9.4.5)$$

con \vec{n}_0 versore normale a ∂S_0^* rivolto verso l'esterno di S_0^* .

Esprimiamo in componenti $J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)$:

$$J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) = J q_i^{(m)} G_{ij} n_{0j} = (J \vec{q}_m \cdot \tilde{G})_j n_{0j} = q_{0j} n_{0j} = \vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0,$$

avendo posto

$$\vec{q}_0 = J \vec{q}_m \cdot \tilde{G}.$$

Il campo vettoriale $\vec{q}_0 = \vec{q}_0(P_0, t)$ è detto *vettore flusso di calore materiale*.

Allora la (9.4.5) assume la forma

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} \vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0. \quad (9.4.6)$$

Osserviamo che, essendo il moto regolare, $J, \tilde{G} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$, mentre $\vec{q}_m \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0)$ per le usuali ipotesi di regolarità su \vec{q} (usualmente si suppone $\vec{q} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$). Allora il vettore flusso di calore, come si vede facilmente dalla sua definizione, gode della seguente proprietà di regolarità:

$$\vec{q}_0 \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0).$$

Infine se applichiamo il teorema della divergenza, otteniamo

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_{S_0^*} \operatorname{div}_0 \vec{q}_0 \, dS_0. \quad (9.4.7)$$

Prendiamo ora in esame l'ultimo integrale al secondo membro della (9.4.2) ed applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione:

$$\int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} \, dS = \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \, dS = \int_{S_0^*} J \tilde{T}_m \cdot (\operatorname{grad} \vec{v})_m \, dS_0. \quad (9.4.8)$$

Vediamo di trasformare in maniera opportuna la funzione integranda dell'ultimo integrale nella relazione scritta sopra:

$$J \tilde{T}_m \cdot (\operatorname{grad} \vec{v})_m = J T_{ij}^{(m)} (v_{i,j})_m.$$

D'altra parte, come sappiamo:

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{x}_i(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t)$$

per cui, grazie al teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j}$$

da cui

$$(v_{i,j})_m = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)}. \quad (9.4.9)$$

Ma

$$\frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)} = G_{jk}.$$

Inserendo tale risultato nella (9.4.9), otteniamo

$$(v_{i,j})_m = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} G_{jk}. \quad (9.4.10)$$

Se sostituiamo la (9.4.10) nella (9.4.8), deduciamo:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} \, dS &= \int_{S_0^*} J T_{ij}^{(m)} G_{jk} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \, dS_0 \\ &= \int_{S_0^*} S_{ik} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \tilde{S} \cdot \operatorname{grad}_0 \dot{\vec{x}} \, dS_0. \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

D'altra parte, essendo il moto regolare, $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ per cui

$$\begin{aligned} \text{grad}_0 \dot{\vec{x}} &= \text{grad}_0 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}_0 \vec{x} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \dot{\tilde{F}}. \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

Grazie alla (9.4.12), la (9.4.11) si scrive nella forma

$$\int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = \int_{S_0^*} \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} dS_0. \quad (9.4.13)$$

A questo punto se sostituiamo agli integrali che compaiono nella (9.4.2) le espressioni trovate in (9.4.3), (9.4.4), (9.4.7), (9.4.13) perveniamo alla seguente equazione:

$$\int_{S_0^*} \left(\rho_0 \dot{k}_m - \rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} \right) dS_0 = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.4.14)$$

Poiché la (9.4.2) sussiste per ogni sottocorpo, deduciamo che l'equazione (9.4.14) vale per ogni S_0^* chiusura di un dominio regolare contenuto in S_0 . Allora, stante l'arbitrarietà della regione d'integrazione e di t , grazie alla continuità della funzione integranda, per un noto lemma deduciamo:

$$\rho_0 \dot{k}_m = \rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 + \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.15)$$

La (9.4.15) è l'**equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica dal punto di vista materiale**.

Ci proponiamo ora di dedurre la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica.

In primo luogo richiamiamo la disequazione che traduce in forma globale il II assioma della termodinamica per un corpo continuo.

Assioma 9.2. II assioma della termodinamica. *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Allora $\forall t \in [t_0, t_1]$ si ha:*

$$\int_{S(t)} \rho \dot{h} dS - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma \geq 0, \quad (9.4.16)$$

dove

h = entropia specifica

ϑ = temperatura assoluta.

Come per dedurre l'equazione indefinita conseguenza del I assioma, scriviamo la (9.4.16) per un sottocorpo arbitrario ad un istante t arbitrario:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{h} dS - \int_{S^*(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma \geq 0. \quad (9.4.17)$$

Tenendo presente come abbiamo operato per la (9.4.2), trasformiamo gli integrali estesi a $S^*(t)$ in integrali estesi a S_0^* applicando il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione e l'integrale esteso a $\partial S^*(t)$ in un integrale esteso a ∂S_0^* applicando il lemma 9.1 per cui la (9.4.17) diventa:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \dot{h}_m dS_0 - \int_{S_0^*} \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} dS_0 + \int_{\partial S_0^*} \frac{\vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0}{\vartheta_m} d\Sigma_0 \geq 0. \quad (9.4.18)$$

Applichiamo ora il teorema della divergenza all'integrale di superficie nella (9.4.18) e riuniamo tutto sotto un unico integrale esteso a S_0^* cosicchè otteniamo:

$$\int_{S_0^*} \left[\rho_0 \dot{h}_m - \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} + \text{div}_0 \left(\frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) \right] dS_0 \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (9.4.19)$$

Per l'arbitrarietà di S_0^* e di t e per la continuità della funzione integranda, dalla (9.4.19) discende:

$$\rho_0 \dot{h}_m - \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} + \text{div}_0 \left(\frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.20)$$

Per una proprietà dell'operatore divergenza abbiamo:

$$\text{div}_0 \left(\frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) = \frac{1}{\vartheta_m} \text{div}_0 \vec{q}_0 + \text{grad}_0 \left(\frac{1}{\vartheta_m} \right) \cdot \vec{q}_0 = \frac{1}{\vartheta_m} \text{div}_0 \vec{q}_0 - \frac{1}{\vartheta_m^2} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0. \quad (9.4.21)$$

Se sostituiamo la (9.4.21) nella (9.4.20) e moltiplichiamo per ϑ_m entrambi i membri della disuguaglianza risultante deduciamo:

$$\rho_0 \vartheta_m \dot{h}_m - \rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.22)$$

Eliminiamo dalla (9.4.22) il termine $-\rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0$ sfruttando l'equazione (9.4.15) da cui ricaviamo:

$$\rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 = \rho_0 \dot{k}_m - \tilde{S} \cdot \tilde{F}. \quad (9.4.23)$$

Sostituendo la (9.4.23) nella (9.4.22) otteniamo:

$$\rho_0 (\vartheta_m \dot{h}_m - \dot{k}_m) + \tilde{S} \cdot \tilde{F} - \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.24)$$

La (9.4.24) è la **disequazione conseguenza del II assioma della termodinamica dal punto di vista materiale**.

Tale disuguaglianza si può scrivere anche in un'altra forma.

Infatti introduciamo la rappresentazione materiale dell'energia libera specifica ψ_m legata alle altre variabili termodinamiche nel modo seguente:

$$\psi_m = k_m - \vartheta_m h_m.$$

Se ne calcoliamo la derivata materiale rispetto al tempo, deduciamo:

$$\dot{\psi}_m = \dot{k}_m - \vartheta_m \dot{h}_m - \dot{\vartheta}_m h_m \quad \Longrightarrow \quad \dot{k}_m - \vartheta_m \dot{h}_m = \dot{\psi}_m + \dot{\vartheta}_m h_m.$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella (9.4.24) e cambiando di segno ad entrambi i membri nella disuguaglianza risultante abbiamo

$$\rho_0 (\dot{\psi}_m + h_m \dot{\vartheta}_m) - \tilde{S} \cdot \tilde{F} + \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.25)$$

La (9.4.25) è nota come **disuguaglianza di Clausius-Duhem dal punto di vista materiale**.

La (9.4.24) (o la (9.4.25)) ad essa equivalente deve essere soddisfatta in \mathcal{S}_0 qualunque sia l'evoluzione del corpo continuo.

Vediamo ora come si imposta il problema termomeccanico per un corpo continuo deformabile dal punto di vista materiale.

Le equazioni generali in ambito meccanico e termodinamico che sussistono per qualsiasi corpo continuo dal punto di vista materiale sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho_m J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^T \\ \rho_0 \dot{k}_m &= \rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 + \tilde{S} \cdot \tilde{F} \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (9.4.26)$$

Al sistema (9.4.26) dobbiamo poi aggiungere le **equazioni costitutive** per caratterizzare il comportamento meccanico e termodinamico del corpo reale che viene schematizzato con il modello di corpo continuo.

Poichè le incognite scalari nel sistema (9.4.26) sono ρ_m , u_i ($i = 1, 2, 3$), S_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), k_m (sostituita eventualmente da ψ_m), ϑ_m , h_m , q_{0i} ($i = 1, 2, 3$), ossia in tutto 19, mentre le equazioni scalari indipendenti sono 8, per ottenere il pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni bisogna aggiungere 11 equazioni costitutive scalari, ovviamente scritte in ambito materiale.

In particolare tra queste avremo le 6 relazioni sforzo-deformazione.

Capitolo 10

Solidi termoelastici e solidi elastici

10.1 Classe costitutiva dei solidi termoelastici.

Nel seguito supporremo sempre di studiare il moto dei corpi continui dal punto di vista materiale ed allora per comodità ometteremo il pedice m nella rappresentazione materiale dei vari campi coinvolti nel nostro studio.

In questo paragrafo ci proponiamo di definire la classe costitutiva dei solidi termoelastici. Questo modello schematizza i solidi reali che si deformano o perché vengono sottoposti a sforzi meccanici o perché ad essi viene fornito o sottratto calore e che manifestano un comportamento elastico, cioè ritornano allo stato iniziale se cessa la causa della deformazione.

I solidi termoelastici sono studiati dal punto di vista materiale.

Definizione 10.1. *Sia dato un corpo continuo \mathcal{C} occupante la regione S_0 nella configurazione di riferimento. Diremo che \mathcal{C} è un solido termoelastico se, preso un suo qualsiasi moto in un dato intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, i valori assunti in $(P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1] = \mathcal{S}_0$ dall'energia libera specifica ψ , dal tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff \tilde{S} , dall'entropia specifica h e dal vettore flusso di calore materiale \vec{q}_0 sono noti se sono noti i valori assunti in (P_0, t) dal tensore gradiente di deformazione \tilde{F} , dalla temperatura ϑ e dal gradiente di temperatura $\text{grad}_0 \vartheta$.*

Un solido termoelastico è dunque un corpo continuo caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ \tilde{S} &= \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ h &= \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ \vec{q}_0 &= \vec{\tilde{q}}_0(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0)\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

dove $\widehat{\psi}$, \widetilde{S} , \widehat{h} , \vec{q}_0 sono dette **funzioni risposta** e sono note dall'esperienza.

La seconda delle (10.1.1) rappresenta la **relazione sforzo-deformazione**, l'ultima è la **legge di propagazione del calore**.

Nel seguito per brevità denoteremo il gradiente di temperatura $\text{grad}_0 \vartheta$ con \vec{g} per cui riscriviamo le (10.1.1) nella forma

$$\begin{aligned}\psi &= \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ \widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ h &= \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ \vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0).\end{aligned}\tag{10.1.2}$$

Indichiamo con \mathcal{A} l'insieme delle disposizioni ordinate $(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0)$ dove \widetilde{F} è un tensore del II ordine tale che $\det \widetilde{F} > 0$, ϑ è uno scalare positivo, \vec{g} è un vettore, P_0 è un punto di S_0 .

Assumeremo che le funzioni risposta $\widehat{\psi}$, \widetilde{S} , \widehat{h} , $\vec{q}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{A})$.

Inoltre supporremo che la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff soddisfi alla condizione seguente:

$$\widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \quad \forall (\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \in \mathcal{A}, \tag{10.1.3}$$

poiché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff deve essere tale che $\widetilde{S} \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T$ in conseguenza della seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Vediamo ora se riusciamo ad impostare in maniera completa il problema termomeccanico per un solido termoelastico facendo uso delle equazioni costitutive (9.1.2).

Le equazioni generali che governano il problema termomeccanico per un corpo continuo dal punto di vista materiale sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \widetilde{S} \\ \widetilde{S} \widetilde{F}^T &= \widetilde{F} \widetilde{S}^T \\ \rho_0 \dot{k} &= \rho_0 r + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \widetilde{S} \cdot \dot{\vec{F}}\end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \tag{10.1.4}$$

cui si associano le equazioni costitutive.

Le incognite scalari del problema sono 19:

$$\rho, u_i (i = 1, 2, 3), S_{ij} (i, j = 1, 2, 3), k(\circ\psi), \vartheta, h, q_{0i} (i = 1, 2, 3),$$

mentre le equazioni generali danno luogo a 8 equazioni scalari indipendenti. Per avere pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni, le equazioni costitutive devono corrispondere a 11 equazioni scalari indipendenti. In effetti delle equazioni costitutive di un solido termoelastico ve ne sono due scalari (quelle relative all'energia libera specifica ed all'entropia specifica), una vettoriale equivalente a tre equazioni scalari (la legge di propagazione del calore) ed una tensoriale (relativa al tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff) che è equivalente non a nove equazioni scalari indipendenti bensì a sei perchè la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff soddisfa all'equazione tensoriale (10.1.3) equivalente a tre equazioni scalari indipendenti. Dunque le equazioni costitutive corrispondono a 11 equazioni scalari indipendenti.

Osservazione 10.1. La densità di massa compare soltanto nell'equazione di continuità della massa per cui è possibile isolare ρ dalle altre incognite e l'equazione di continuità dalle altre equazioni del problema termomeccanico. Si ottiene così un problema di 18 equazioni scalari in 18 incognite. Una volta risolto tale problema ed in particolare determinato il campo dello spostamento, si determina la densità di massa dall'equazione di continuità.

Osservazione 10.2. Come vediamo dalle equazioni costitutive, i valori che le grandezze costitutive assumono in un dato punto ed in un dato istante dipendono solo dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto e nello stesso istante. Perciò le equazioni costitutive di un solido termoelastico soddisfano agli assiomi dell'azione locale e di determinismo. Tra l'altro i solidi termoelastici non sono dotati di memoria.

Per quanto riguarda l'assioma dell'obiettività per il momento non ce ne occupiamo.

Ci proponiamo ora di stabilire quali restrizioni sono imposte alle equazioni costitutive dalla loro compatibilità con il II assioma della termodinamica.

Premettiamo una definizione ed un lemma.

Definizione 10.2. *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (10.1.2), definiamo processo termoelastico ammissibile ogni disposizione ordinata $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$ dove ϑ, ψ, h sono campi scalari, \vec{u}, \vec{q}_0 campi vettoriali, \tilde{S} campo tensoriale del II ordine definiti in $\hat{S}_0 \times (t', t'')$ con \hat{S}_0 aperto contenuto in S_0 e $(t', t'') \subset [t_0, t_1]$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:*

- $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\hat{S}_0 \times (t', t''))$
- $\vartheta \in \mathcal{C}^{2,1}(\hat{S}_0 \times (t', t''))$

- $\psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0$ sono definiti mediante le equazioni costitutive (10.1.2) del solido termoelastico con $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$ e $\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta$.

$\hat{S}_0 \times (t', t'')$ è detto dominio del processo termoelastico.

Dimostriamo ora il seguente lemma

Lemma 10.1. *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (10.1.2), fissiamo ad arbitrio la disposizione ordinata $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$ con \bar{P}_0 punto interno di S_0 , l'istante $\bar{t} \in (t_0, t_1)$, lo scalare α , il vettore \vec{a} , il tensore del II ordine \tilde{A} . Allora esiste un processo termoelastico ammissibile tale che:*

$$\tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{F}, \quad \vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vartheta}, \quad \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \vec{g}, \quad (10.1.5)$$

$$\dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{A}, \quad \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \alpha, \quad \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \vec{a}. \quad (10.1.6)$$

Dimostrazione

Cominciamo con l'osservare che, essendo $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$, abbiamo:

$$\det \tilde{F} > 0, \quad \bar{\vartheta} > 0.$$

Definiamo in $S_0 \times [t_0, t_1]$ il campo tensoriale del II ordine (dipendente solo da t):

$$\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A}$$

e il campo scalare:

$$\bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\vec{g} + (t - \bar{t})\vec{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0).$$

Osserviamo che in (\bar{P}_0, \bar{t}) il campo tensoriale si riduce a \tilde{F} e il campo scalare a $\bar{\vartheta}$. Poiché entrambi sono continui in $S_0 \times [t_0, t_1]$, esistono un intorno di \bar{P}_0 , $U(\bar{P}_0) \subset S_0$, e un intervallo $(t', t'') \subset [t_0, t_1]$ contenente l'istante \bar{t} tali che $\forall (P_0, t) \in U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$ si ha

$$\det [\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A}] > 0,$$

$$\bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\vec{g} + (t - \bar{t})\vec{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0) > 0.$$

Consideriamo ora la disposizione ordinata $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$ dove ϑ, ψ, h sono campi scalari, \vec{u}, \vec{q}_0 campi vettoriali, \tilde{S} campo tensoriale del II ordine definiti in $U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- $\vec{u} = [\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A} - \tilde{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0)$

- $\vartheta = \bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\bar{\vec{g}} + (t - \bar{t}) \bar{\vec{a}}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0)$
- $\psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0$ sono definiti mediante le equazioni costitutive (10.1.2) nelle quali si pone $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$ e $\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta$.

Poiché, come conseguenza della loro definizione, $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(U(\bar{P}_0) \times (t', t''))$, $\vartheta \in \mathcal{C}^{2,1}(U(\bar{P}_0) \times (t', t''))$, concludiamo che la disposizione ordinata $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$ definita sopra è un processo termoelastico ammissibile avente come dominio $U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$.

Mostriamo ora che tale processo soddisfa alle (10.1.5), (10.1.6).

Osserviamo in primo luogo che:

$$\text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{F} + (t - \bar{t}) \tilde{A} - \tilde{a} \implies \tilde{F} = \tilde{F} + (t - \bar{t}) \tilde{A} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'').$$

Allora

$$\tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{F}$$

così come si ha

$$\vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vartheta}.$$

Inoltre

$$\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta = \bar{\vec{g}} + (t - \bar{t}) \bar{\vec{a}} \implies \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vec{g}}.$$

Dunque le (10.1.5) sono soddisfatte.

D'altra parte:

$$\tilde{F} = \tilde{A} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$$

per cui ovviamente

$$\dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{A}.$$

Per quanto riguarda ϑ , si ha:

$$\dot{\vartheta}(P_0, t) = \alpha + \vec{a} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \implies \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \alpha.$$

Infine dall'espressione ottenuta sopra per \vec{g} si deduce immediatamente:

$$\dot{\vec{g}} = \vec{a} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'') \implies \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \vec{a}.$$

Perciò sono verificate anche le (10.1.6) e quindi il lemma è dimostrato.

Nel seguito per brevità ometteremo nelle funzioni risposta che compaiono nelle equazioni costitutive la dipendenza da P_0 .

Enunciamo e dimostriamo ora il teorema che fornisce le condizioni di compatibilità delle equazioni costitutive di un solido termoelastico con il II assioma della termodinamica.

Teorema 10.1. *Sia dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (10.1.2).*

Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni processo termoelastico ammissibile soddisfi la disuguaglianza di Clausius-Duhem è che le funzioni risposta che compaiono nelle (10.1.2) verifichino le seguenti condizioni:

(1) $\widehat{\psi}$, \widetilde{S} , \widehat{h} sono indipendenti da $\overrightarrow{g} = \text{grad}_0 \vartheta$;

(2) la funzione risposta $\widehat{\psi}$ per l'energia libera specifica determina le funzioni risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff \widetilde{S} e per l'entropia specifica \widehat{h} nel modo seguente:

$$\widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad (10.1.7)$$

$$\widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}; \quad (10.1.8)$$

(3) è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\overrightarrow{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{g} \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{A},$$

detta disuguaglianza del calore.

Dimostrazione

Scriviamo la disuguaglianza di Clausius-Duhem dal punto di vista materiale:

$$\rho_0 (\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \widetilde{S} \cdot \dot{\widetilde{F}} + \frac{1}{\vartheta} \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{q}_0 \leq 0.$$

Consideriamo un processo termoelastico ammissibile $(\overrightarrow{u}, \vartheta, \psi, \widetilde{S}, h, \overrightarrow{q}_0)$ con dominio $\hat{S}_0 \times (t', t'')$. Questo soddisferà alla disuguaglianza di Clausius-Duhem se e solo se:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\dot{\widehat{\psi}}(\widetilde{F}, \vartheta, \overrightarrow{g}) + \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta, \overrightarrow{g}) \dot{\vartheta} \right] - \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \overrightarrow{g}) \cdot \dot{\widetilde{F}} \\ + \frac{1}{\vartheta} \overrightarrow{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{g} \leq 0 \quad \text{in } \hat{S}_0 \times (t', t''). \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

Se applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\dot{\widehat{\psi}} = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial g_i} \dot{g}_i = \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi} \cdot \dot{\widetilde{F}} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \partial_{\overrightarrow{g}} \widehat{\psi} \cdot \dot{\overrightarrow{g}}. \quad (10.1.10)$$

Sostituendo la (10.1.10) nella (10.1.9), otteniamo che il processo termoelastico ammissibile soddisfa alla disuguaglianza di Clausius-Duhem se e solo se in $\hat{S}_0 \times (t', t'')$ si ha

$$\begin{aligned} & \left[\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \right] \cdot \dot{\tilde{F}} + \\ & + \rho_0 \left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) + \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \right] \dot{\vartheta} + \\ & + \rho_0 \partial_{\vec{g}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \dot{\vec{g}} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Dimostriamo dapprima la condizione sufficiente.

Per ipotesi valgono le condizioni (1), (2), (3) e dobbiamo provare che ogni processo termoelastico ammissibile soddisfa nel suo dominio alla disuguaglianza di Clausius-Duhem, ossia alla disuguaglianza (10.1.11). Ma la dimostrazione di ciò è immediata poiché, preso un qualsiasi processo termoelastico ammissibile, dalla (1) discende

$$\rho_0 \partial_{\vec{g}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \dot{\vec{g}} = 0,$$

la (2) implica

$$\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) = \tilde{0}, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) + \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) = 0$$

per cui il primo membro della (10.1.11) si riduce a

$$\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g}$$

che per la (3) risulta minore o uguale a zero nel dominio del processo.

Dimostriamo ora la condizione necessaria.

Per ipotesi ogni processo termoelastico ammissibile soddisfa nel suo dominio alla disuguaglianza di Clausius-Duhem ossia alla disuguaglianza (10.1.11) e dobbiamo provare che valgono le condizioni (1), (2), (3).

Fissiamo ad arbitrio una disposizione ordinata $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$ con \bar{P}_0 punto interno di S_0 , un istante $\bar{t} \in (t_0, t_1)$, uno scalare α , un vettore \vec{a} , un tensore del II ordine \tilde{A} . Grazie al lemma 10.1, esiste un processo termoelastico ammissibile tale che

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \tilde{F}, & \vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \bar{\vartheta}, & \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \vec{g}, \\ \dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \tilde{A}, & \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \alpha, & \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \vec{a}. \end{aligned}$$

Per ipotesi tale processo termoelastico soddisfa alla disuguaglianza (10.1.10) per ogni (P_0, t) appartenente al suo dominio di definizione; in particolare tale disuguaglianza è soddisfatta in (\bar{P}_0, \bar{t}) ed assume la forma:

$$\begin{aligned} & \left[\rho_0 \partial_{\bar{F}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) - \bar{S}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \cdot \bar{A} + \\ & + \rho_0 \left[\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta}}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) + \widehat{h}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \alpha + \\ & + \rho_0 \partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{a} + \frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Poiché \bar{A} , α , \bar{a} sono arbitrari, prendiamo dapprima:

$$\bar{A} = \bar{0}, \quad \alpha = 0, \quad \bar{a} = \bar{0}.$$

Con questa scelta la (10.1.12) si riduce a:

$$\frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \quad (10.1.13)$$

La (10.1.13) sussiste per ogni disposizione ordinata $(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}, \bar{P}_0)$ in \mathcal{A} con $\bar{P}_0 \in \overset{\circ}{S}_0$, ma in realtà per continuità vale anche per $\bar{P}_0 \in \partial S_0$. Dunque vale la condizione (3).

Supponiamo ora

$$\bar{A} = \bar{0}, \quad \alpha = 0, \quad \bar{a} \text{ arbitrario} \neq \bar{0}$$

Dalla (10.1.12) deduciamo:

$$\rho_0 \partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{a} \leq - \frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \quad \forall \bar{a}. \quad (10.1.14)$$

Il secondo membro della disuguaglianza (10.1.14) per il risultato precedente è un numero fissato non negativo; poiché \bar{a} è arbitrario, necessariamente si ha

$$\partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) = \bar{0} \quad \forall (\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$$

da cui deduciamo che $\widehat{\psi}$ non dipende da \bar{g} . Perciò la disuguaglianza (10.1.12) assume la forma ridotta:

$$\begin{aligned} & \left[\rho_0 \partial_{\bar{F}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}) - \bar{S}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \cdot \bar{A} + \\ & + \rho_0 \left[\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta}}(\bar{F}, \bar{\vartheta}) + \widehat{h}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \alpha + \\ & + \frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (10.1.15)$$

Prendiamo ora

$$\tilde{A} = \tilde{0}, \quad \alpha \text{ arbitrario } \neq 0$$

per cui la (10.1.15) diventa:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}) + \hat{h}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \right] \alpha \leq -\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \cdot \vec{g}. \quad (10.1.16)$$

Poiché α è arbitrario e il secondo membro della disuguaglianza scritta sopra è un numero fissato non negativo, deduciamo che il termine in parentesi quadra nella (10.1.16) è nullo, per cui grazie all'arbitrarietà della disposizione ordinata $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0)$, concludiamo che \hat{h} non dipende da \vec{g} e si ha:

$$\hat{h}(\tilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}.$$

Grazie a questo risultato, la (10.1.15) diventa

$$\left[\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \right] \cdot \tilde{A} \leq -\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0.$$

da cui per l'arbitrarietà di \tilde{A} deduciamo che \tilde{S} non dipende da \vec{g} e si ha

$$\tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}.$$

Abbiamo così ottenuto in maniera completa anche le condizioni (1) e (2) del teorema.

Nel seguito supporremo sempre che le funzioni risposta del solido termoelastico soddisfino alle condizioni (1), (2), (3).

10.2 Proprietà dei solidi termoelastici.

Ci proponiamo ora di mostrare che, nell'ipotesi che le funzioni risposta del solido termoelastico soddisfino alle 3 condizioni del teorema 10.1, è possibile sostituire nelle equazioni costitutive alla temperatura ϑ come grandezza fondamentale l'entropia h , grazie alle osservazioni sperimentali.

Prima di tutto riscriviamo le equazioni costitutive supponendo verificate le condizioni (1), (2), (3):

$$\begin{aligned}
\psi &= \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta,) \\
\widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta) \\
h &= \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \\
\vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g})
\end{aligned} \tag{10.2.1}$$

dove \vec{q}_0 soddisfa alla disuguaglianza del calore.
Introduciamo la seguente definizione

Definizione 10.3. *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (10.2.1), si definisce calore specifico corrispondente a \widetilde{F} e ϑ lo scalare, denotato con $C(\widetilde{F}, \vartheta)$, dato da*

$$C(\widetilde{F}, \vartheta) = \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta).$$

D'altra parte l'esperienza mostra che

$$C(\widetilde{F}, \vartheta) > 0 \quad \forall (\widetilde{F}, \vartheta),$$

da cui

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \neq 0.$$

Allora per il teorema sulle funzioni implicite dall'equazione

$$h = \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta)$$

è possibile ottenere, almeno localmente, la temperatura ϑ in funzione di h in corrispondenza di ogni fissato valore di \widetilde{F} , ossia è possibile esprimere ϑ nella forma

$$\vartheta = \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h).$$

Alle equazioni costitutive (10.2.1) sostituiamo le nuove equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}
k &= \bar{k}(\widetilde{F}, h) \\
\widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, h) \quad \text{con} \quad \widetilde{S}(\widetilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \bar{k}(\widetilde{F}, h) \\
\vartheta &= \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h) \quad \text{con} \quad \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(\widetilde{F}, h) \\
\vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, h, \vec{g})
\end{aligned} \tag{10.2.2}$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{k}(\tilde{F}, h) &= \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) + h \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) \\ \widetilde{S}(\tilde{F}, h) &= \widetilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) \\ \overrightarrow{q_0}(\tilde{F}, h, \overrightarrow{g}) &= \overrightarrow{q_0}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h), \overrightarrow{g}).\end{aligned}$$

Dunque se si assume h come grandezza fondamentale in luogo di ϑ , le funzioni risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff e per la temperatura sono determinate dalla funzione risposta per l'energia interna specifica.

Dimostriamo che

$$\widetilde{S}(\tilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h).$$

Infatti, se calcoliamo il gradiente rispetto a \tilde{F} della funzione \bar{k} , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h) = \partial_{\tilde{F}} \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) \partial_{\tilde{F}} \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) + h \partial_{\tilde{F}} \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h). \quad (10.2.3)$$

Ma per la condizione (2)

$$\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = -h$$

per cui nella (10.2.3) gli ultimi due termini si elidono. Moltiplicando per ρ_0 la relazione risultante, si deduce:

$$\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = \widetilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = \widetilde{S}(\tilde{F}, h).$$

Resta così provato ciò che ci proponevamo di dimostrare.

In maniera analoga si dimostra:

$$\bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(\tilde{F}, h).$$

Nel §1 avevamo osservato che le equazioni costitutive di un solido termoelastico soddisfano agli assiomi dell'azione locale e di determinismo, ma non avevamo detto nulla riguardo l'assioma dell'obiettività.

Se si considerano le equazioni costitutive nella forma (10.2.1), si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema 10.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive (10.2.1) per un solido termoelastico soddisfino all'assioma dell'obiettività è che esse si possano scrivere nella forma ridotta:*

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^*(\tilde{d}, \vartheta,) \\ \tilde{S} &= \tilde{F} \tilde{S}^*(\tilde{d}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \tilde{S}^*(\tilde{d}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\tilde{d}} \psi^*(\tilde{d}, \vartheta) \\ h &= h^*(\tilde{d}, \vartheta) \quad \text{con} \quad h^*(\tilde{d}, \vartheta) = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta}(\tilde{d}, \vartheta) \\ \vec{q}_0 &= \vec{q}_0^*(\tilde{d}, \vartheta, \vec{g})\end{aligned}\tag{10.2.4}$$

dove le funzioni contraddistinte con l'asterisco sono note e fornite dall'esperienza, mentre \tilde{d} è il tensore di deformazione finita, introdotto nel capitolo precedente.

Omettiamo la dimostrazione del teorema.

E' comunque interessante osservare che dalle (10.2.4) si deduce la simmetria della funzione tensoriale \tilde{S}^* . Infatti, grazie alla simmetria di \tilde{d} , in componenti si ha

$$S_{ij}^* = \rho_0 \frac{\partial \psi^*}{\partial d_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^*}{\partial d_{ji}} = S_{ji}^*.$$

Dalla simmetria di \tilde{S}^* , ne discende che la condizione cui deve soddisfare il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff come conseguenza della seconda equazione indefinita è automaticamente soddisfatta.

Infatti se $\tilde{S} = \tilde{F} \tilde{S}^*$, si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^* \tilde{F}^T \\ \tilde{F} \tilde{S}^T &= \tilde{F} (\tilde{F} \tilde{S}^*)^T = \tilde{F} \tilde{S}^{*T} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^* \tilde{F}^T\end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T,$$

come volevamo dimostrare.

10.3 Solidi elastici.

Introduciamo un'importante sottoclasse dei solidi termoelastici, la sottoclasse dei solidi elastici.

Definizione 10.4. *Un solido elastico è un solido termoelastico per il quale la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff dipende soltanto da \tilde{F} per cui:*

$$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, P_0)$$

o equivalentemente

$$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, P_0).$$

Nel seguito ometteremo per brevità la dipendenza di $\tilde{\tilde{S}}$ da P_0 . Inoltre supporremo $\tilde{\tilde{S}}$ di classe \mathcal{C}^1 e soddisfacente la condizione:

$$\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}) \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{\tilde{S}}^T(\tilde{F}).$$

Una sottoclasse dei solidi elastici è costituita dai solidi iperelastici.

Definizione 10.5. Diciamo che un solido elastico è iperelastico se esiste una funzione a valori reali $\omega = \omega(\tilde{F}, P_0)$ di classe \mathcal{C}^1 tale che:

$$\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, P_0) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \omega(\tilde{F}, P_0). \quad (10.3.1)$$

La funzione ω è detta potenziale elastico.

Dimostriamo ora la seguente

Proposizione 10.1. Un solido termoelastico che evolve in condizioni isotermiche o isentropiche si comporta come un solido iperelastico.

Dimostrazione

Supponiamo dapprima di avere un solido termoelastico che nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ evolve in condizioni isoterme, per cui $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$:

$$\vartheta(P_0, t) = \vartheta_0 \quad \text{con} \quad \vartheta_0 = \text{costante} > 0.$$

Se consideriamo la funzione risposta per l'energia libera specifica $\hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta)$, questa viene a dipendere solo da \tilde{F} (oltre che ovviamente da P_0) poiché ϑ assume il valore costante ϑ_0 . Dunque

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta_0).$$

D'altra parte

$$\tilde{\tilde{S}} = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi},$$

per cui

$$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta_0)$$

e quindi la funzione risposta per il tensore di Piola-Kirchhoff viene a dipendere solo da \tilde{F} e il solido si comporta come un solido elastico. Inoltre $\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta_0)$ è dato dal prodotto di ρ_0 per la derivata rispetto a \tilde{F} di $\hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta_0)$ per cui il solido termoelastico si comporta come un solido iperelastico avente come potenziale

elastico $\widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta_0)$.

Supponiamo ora che il solido termoelastico nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ evolva in condizioni isentropiche, per cui $\forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$:

$$h(P_0, t) = h_0 \quad \text{con} \quad h_0 = \text{costante.}$$

Se consideriamo la funzione risposta per l'energia interna specifica $\bar{k}(\widetilde{F}, h)$, questa viene a dipendere solo da \widetilde{F} (oltre che ovviamente da P_0) poiché h assume il valore costante h_0 . Dunque

$$k = \bar{k}(\widetilde{F}, h_0).$$

D'altra parte

$$\widetilde{S} = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \bar{k},$$

per cui

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}(\widetilde{F}, h_0)$$

e quindi la funzione risposta per il tensore di Piola-Kirchhoff viene a dipendere solo da \widetilde{F} e il solido si comporta come un solido elastico. Inoltre $\widetilde{S}(\widetilde{F}, h_0)$ è il prodotto di ρ_0 per la derivata rispetto a \widetilde{F} di $\bar{k}(\widetilde{F}, h_0)$ per cui il solido termoelastico si comporta come un solido iperelastico avente come potenziale elastico $\bar{k}(\widetilde{F}, h_0)$.

Proviamo ora la seguente

Proposizione 10.2. *Per un solido elastico è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

Le equazioni puramente meccaniche (dal punto di vista materiale) che abbiamo a disposizione per studiare il moto di un solido elastico sono le seguenti:

- equazione di continuità della massa

$$\rho J = \rho_0$$

- I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \widetilde{S} \quad (10.3.2)$$

- relazione conseguenza della II equazione indefinita

$$\widetilde{S} \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T \quad (10.3.3)$$

- relazione sforzo - deformazione

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F}) \quad (10.3.4)$$

cui va associata l'equazione:

$$\tilde{S}(\tilde{F}) \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T(\tilde{F}). \quad (10.3.5)$$

Osserviamo che, come per un generico solido termoelastico, la densità di massa ρ appare solo nell'equazione di continuità per cui possiamo isolare ρ dalle altre incognite così come l'equazione di continuità dalle restanti equazioni. Una volta risolto il problema del moto utilizzando le altre equazioni, si determina la densità di massa dall'equazione di continuità.

Ci limitiamo dunque a considerare le equazioni (10.3.2), (10.3.3), (10.3.4) insieme alla (10.3.5). Le incognite scalari sono 12: u_i ($i = 1, 2, 3$) e S_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Le equazioni scalari indipendenti sono esattamente 12 perché l'equazione tensoriale (10.3.3) equivale a tre equazioni scalari indipendenti e l'equazione tensoriale (10.3.4) non è equivalente a 9 equazioni scalari indipendenti, ma a 6 per la presenza della (10.3.5) che a sua volta è equivalente a 3 equazioni scalari indipendenti ($9 - 3 = 6$).

Dunque il problema del moto per il solido elastico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Se supponiamo che il solido elastico si trovi nella configurazione di riferimento φ_0 , lo spostamento \vec{u} è nullo in S_0 e dunque, essendo $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$, in corrispondenza della configurazione φ_0 risulta $\tilde{F} = \tilde{a}$ in S_0 .

Introduciamo la seguente definizione

Definizione 10.6. *Prende il nome di sforzo residuo il valore che \tilde{S} assume nella configurazione di riferimento, ossia $\tilde{S}(\tilde{a})$.*

Diamo ora una definizione che svolge un ruolo fondamentale nella teoria dell'elasticità.

Definizione 10.7. *Si definisce tensore elastico il tensore del IV ordine \tilde{c} dato da*

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{S}(\tilde{a}).$$

Le componenti del tensore elastico sono

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

Osserviamo inoltre che, poiché in generale $\tilde{\tilde{S}}$ dipende anche da P_0 , il tensore elastico risulta un campo tensoriale definito in S_0 , cioè

$$\tilde{c} = \tilde{c}(P_0) \quad \text{con } P_0 \in S_0.$$

Il tensore elastico gode di particolari proprietà di simmetria a seconda delle proprietà di cui gode la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff. Proviamo a tal riguardo tre proposizioni.

Proposizione 10.3. *Se lo sforzo residuo è nullo, allora il tensore elastico è simmetrico rispetto alla prima coppia di indici, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{jirs}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Per definizione di tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, si ha

$$\tilde{S} = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^{-1})^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1}. \quad (10.3.6)$$

Moltiplicando a destra il primo e l'ultimo membro della (10.3.6) per \tilde{F}^T , otteniamo

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m,$$

da cui discende:

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{J} \tilde{S} \tilde{F}^T. \quad (10.3.7)$$

Tenendo presente che

$$J = \det \tilde{F}, \quad \tilde{S} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}),$$

dalla (10.3.7) possiamo ottenere la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Cauchy rappresentato in ambito materiale:

$$\tilde{\tilde{T}}_m(\tilde{F}) = \frac{1}{\det \tilde{F}} \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}) \tilde{F}^T. \quad (10.3.8)$$

Ovviamente $\tilde{\tilde{T}}_m$ è una funzione tensoriale simmetrica essendo la funzione risposta del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per ottenere il risultato desiderato sarà sufficiente far vedere che:

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{\tilde{T}}_m(\tilde{a}). \quad (10.3.9)$$

Infatti, se è vera la (10.3.9), si ha

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}) = \frac{\partial \hat{T}_{ji}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}) = c_{jirs}.$$

Per ottenere la (10.3.9), esplicitiamo dapprima le componenti di \widetilde{T}_m :

$$\widehat{T}_{ij}^{(m)}(\widetilde{F}) = \frac{1}{\det \widetilde{F}} \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}) F_{jk} = \frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}). \quad (10.3.10)$$

Ora procuriamoci le componenti di $\partial_{\widetilde{F}} \widetilde{T}_m$ in corrispondenza di un generico valore di \widetilde{F} :

$$\frac{\partial \widehat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{F}) = \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left(\frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \right) \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}) + \frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \frac{\partial \widehat{S}_{ik}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{F}). \quad (10.3.11)$$

Poniamo nella (10.3.11) $\widetilde{F} = \widetilde{a}$ e teniamo presente che $\widehat{S}_{ik}(\widetilde{a}) = 0$:

$$\frac{\partial \widehat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = \delta_{jk} \frac{\partial \widehat{S}_{ik}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = \frac{\partial \widehat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = c_{ijrs}. \quad (10.3.12)$$

Dunque abbiamo ottenuto la (10.3.9) come ci proponevamo di ottenere e la proposizione risulta dimostrata.

Proposizione 10.4. *Se, dato un solido elastico, lo sforzo residuo è nullo e la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff \widetilde{S} soddisfa all'assioma dell'obiettività, allora il tensore elastico \widetilde{c} è simmetrico rispetto alla seconda coppia di indici, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{ijsr}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Per ipotesi si ha

$$\widetilde{S}(\widetilde{a}) = \widetilde{0}, \quad \widetilde{S} = \widetilde{F} \widetilde{S}^*(\widetilde{d}),$$

con

$$\widetilde{d} = \frac{1}{2} (\widetilde{F}^T \widetilde{F} - \widetilde{a}).$$

Osserviamo che

$$\widetilde{F} = \widetilde{a} \quad \implies \quad \widetilde{d} = \widetilde{0}.$$

Allora tenendo presenti entrambe le ipotesi della proposizione abbiamo:

$$\widetilde{0} = \widetilde{S}(\widetilde{a}) = \widetilde{a} \widetilde{S}^*(\widetilde{0}) = \widetilde{S}^*(\widetilde{0})$$

ossia

$$\widetilde{S}^*(\widetilde{0}) = \widetilde{0}.$$

La proposizione risulterà dimostrata se riusciremo a provare la seguente relazione:

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{a}} \tilde{S}^*(\tilde{0}). \quad (10.3.13)$$

Infatti se vale la (10.3.13), in componenti si ha:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{sr}}(\tilde{0}) = c_{ijsr}$$

grazie alla simmetria di \tilde{d} .

Vediamo di dimostrare la (10.3.13).

Per definizione

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{\hat{S}}(\tilde{a}) \implies c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

D'altra parte

$$\hat{S}_{ij}(\tilde{F}) = F_{ik} S_{kj}^*(\tilde{d}).$$

Se deriviamo rispetto a F_{rs} in corrispondenza di un generico valore di \tilde{F} , otteniamo:

$$\frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}) = \frac{\partial F_{ik}}{\partial F_{rs}} S_{kj}^*(\tilde{d}) + F_{ik} \frac{\partial S_{kj}^*}{\partial d_{lm}}(\tilde{d}) \frac{\partial d_{lm}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}). \quad (10.3.14)$$

Ma

$$d_{lm}(\tilde{F}) = \frac{1}{2}(F_{nl} F_{nm} - \delta_{lm})$$

per cui

$$\frac{\partial d_{lm}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial F_{rs}}(F_{rl} F_{rm}) = \frac{1}{2}(\delta_{ls} F_{rm} + F_{rl} \delta_{ms}) \quad (10.3.15)$$

Poniamo ora $\tilde{F} = \tilde{a}$ nella (10.3.14) e sostituiamo in essa l'espressione ottenuta in (10.3.15) nella quale pure poniamo $\tilde{F} = \tilde{a}$. Tenendo presente che $S_{kj}^*(\tilde{0}) = 0$, deduciamo:

$$\begin{aligned} c_{ijrs} &= \delta_{ik} \frac{\partial S_{kj}^*}{\partial d_{lm}}(\tilde{0}) \frac{1}{2}(\delta_{ls} \delta_{rm} + \delta_{rl} \delta_{ms}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{sr}}(\tilde{0}) + \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) \right) = \\ &= \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la simmetria di \tilde{d} .

In conclusione abbiamo ottenuto:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0})$$

che è appunto il risultato che ci proponevamo di ottenere.
Dimostriamo infine la seguente

Proposizione 10.5. *Se il solido elastico è iperelastico, nel tensore elastico è possibile scambiare la prima coppia di indici con la seconda, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{rsij}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Se il solido elastico è iperelastico, esiste una funzione a valori reali $\omega(\tilde{F})$ tale che:

$$\tilde{S}(\tilde{F}) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \omega(\tilde{F}).$$

Poiché supponiamo $\tilde{S} \in \mathcal{C}^1$, la funzione ω è di classe \mathcal{C}^2 .
D'altra parte, per definizione di tensore elastico, si ha:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

Ma per definizione di solido iperelastico:

$$\hat{S}_{ij}(\tilde{F}) = \rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}}(\tilde{F})$$

da cui

$$\begin{aligned} c_{ijrs} &= \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left(\rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}} \right) (\tilde{a}) = \\ &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}} \right) (\tilde{a}) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial F_{rs}} \right) (\tilde{a}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \left(\rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{rs}} \right) (\tilde{a}) = \frac{\partial \hat{S}_{rs}}{\partial F_{ij}}(\tilde{a}) = c_{rsij}. \end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

Definizione 10.8. *Sia \tilde{c} il tensore elastico di un solido elastico. Si definiscono simmetrie minori le seguenti proprietà di simmetria di \tilde{c} :*

$$c_{ijrs} = c_{jirs}, \quad c_{ijrs} = c_{ijsr}$$

e si definisce simmetria maggiore la seguente:

$$c_{ijrs} = c_{rsij}. \tag{10.3.16}$$

Per quanto stabilito in precedenza, possiamo asserire che se per un solido elastico lo sforzo residuo è nullo e la funzione \tilde{S} soddisfa all'assioma dell'obiettività, allora il tensore elastico gode delle simmetrie minori. Se poi il solido è iperelastico il tensore elastico gode anche della simmetria maggiore.

Osserviamo che il tensore elastico, essendo un tensore del IV ordine, ha in generale 81 componenti indipendenti, ma il loro numero si riduce notevolmente se gode delle simmetrie minori e della simmetria maggiore.

Infatti, se \tilde{c} gode delle simmetrie minori, dati due valori arbitrari fissati ai primi due indici e fatti variare gli altri due, si ottengono 6 componenti indipendenti ed analogo risultato si ottiene se fissiamo gli ultimi due indici e facciamo variare i primi due. Perciò nell'ipotesi che sussistano le simmetrie minori il tensore elastico ha in generale 36 componenti indipendenti.

Se \tilde{c} gode anche della simmetria maggiore, le componenti indipendenti si riducono a 21. Infatti, considerate le 36 componenti del tensore che sarebbero indipendenti se questo godesse soltanto delle simmetrie minori, 6 di queste soddisfano automaticamente le (10.3.16) e precisamente quelle nelle quali la prima e la seconda coppia di indici sono uguali. Le restanti 30 sono uguali due a due.

Capitolo 11

Solidi elastici lineari

11.1 Definizione di solido elastico lineare.

Prima di dare la definizione di solido elastico lineare facciamo alcune osservazioni e premesse.

Definizione 11.1. *Sia data una famiglia di tensori di ordine r dipendente dal parametro reale $\epsilon \in (0, \epsilon_0) : \{\tilde{t}_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$.*

Diciamo che

$$\tilde{t}_\epsilon = o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{se} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{t}_\epsilon}{\epsilon} = \tilde{0}$$

o equivalentemente se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\tilde{t}_\epsilon|}{\epsilon} = 0.$$

Definizione 11.2. *Sia data una funzione tensoriale $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$ di ordine r di una variabile tensoriale \tilde{A} di ordine s definita su un sottoinsieme dei tensori di ordine s per il quale $\tilde{0}$ sia punto di accumulazione.*

Diciamo che

$$\tilde{t}(\tilde{A}) = o(\tilde{A}) \quad \text{per } \tilde{A} \rightarrow \tilde{0} \quad \text{se} \quad \lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{0}} \frac{\tilde{t}(\tilde{A})}{|\tilde{A}|} = \tilde{0}$$

o equivalentemente se

$$\lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{0}} \frac{|\tilde{t}(\tilde{A})|}{|\tilde{A}|} = 0.$$

Ricordiamo che nel Capitolo 9, studiando le deformazioni di un corpo continuo, abbiamo dato la definizione di tensore di deformazione finita: \tilde{d} , che in

termini di spostamento ha la seguente espressione:

$$\tilde{d} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}).$$

Introduciamo un nuovo tensore di deformazione, il tensore di deformazione infinitesima.

Definizione 11.3. *Definiamo tensore di deformazione infinitesima il seguente tensore del II ordine:*

$$\tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}).$$

Il tensore \tilde{e} è dunque la parte simmetrica di $\text{grad}_0 \vec{u}$.
Come è immediato verificare:

$$\tilde{d} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u}.$$

Dimostriamo la seguente proposizione

Proposizione 11.1. *Sia data una famiglia di deformazioni regolari dipendente dal parametro reale $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$: $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ tale che lo spostamento $\vec{u}^{(\epsilon)}$ corrispondente alla deformazione x_ϵ soddisfi alla condizione:*

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon \quad \text{con} \quad \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Allora, indicati con $\tilde{d}^{(\epsilon)}$ e $\tilde{e}^{(\epsilon)}$ il tensore di deformazione finita e il tensore di deformazione infinitesima relativi a x_ϵ , si ha:

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{e}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Inoltre se $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ è costituita da deformazioni rigide, allora

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Dimostrazione

Osserviamo dapprima che, qualunque sia la famiglia di deformazioni $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$, si ha:

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{e}^{(\epsilon)} + \frac{1}{2} \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}.$$

Per provare la prima parte della proposizione è sufficiente dimostrare che se la famiglia di deformazioni soddisfa all'ipotesi su $\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}$ si ha:

$$\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

ossia che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}}{\epsilon} = \tilde{0}. \quad (11.1.1)$$

Operiamo per componenti e teniamo presente che:

$$[\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}]_{ij} = u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}.$$

Per ottenere la (11.1.1) è sufficiente far vedere che per $i, j = 1, 2, 3$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}|}{\epsilon} = 0. \quad (11.1.2)$$

D'altra parte, se esplicitiamo la somma su k si ha

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}| = \left| \sum_{k=1}^3 u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)} \right| \leq \sum_{k=1}^3 |u_{k,i}^{(\epsilon)}| |u_{k,j}^{(\epsilon)}| \quad (11.1.3)$$

Ma

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \sqrt{\sum_{l,m=1}^3 u_{l,m}^{(\epsilon)} u_{l,m}^{(\epsilon)}}$$

da cui

$$|u_{l,m}^{(\epsilon)}| \leq |\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon \quad \text{per } l, m = 1, 2, 3.$$

Perciò

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)}| \leq \epsilon \quad \text{e} \quad |u_{k,j}^{(\epsilon)}| \leq \epsilon \quad \text{per } k, i, j = 1, 2, 3..$$

Sostituendo nella (11.1.3), si deduce

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}| \leq 3\epsilon^2$$

e dunque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}|}{\epsilon} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3\epsilon^2}{\epsilon} = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Supponiamo ora che le deformazioni x_ϵ siano rigide per cui

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0. \quad (11.1.4)$$

Ma

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \frac{1}{2} [\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} + \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}]$$

da cui per la (11.1.4) deduciamo:

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} - \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}.$$

Ma, come prima abbiamo dimostrato:

$$\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+$$

e perciò

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

La dimostrazione della proposizione è così completata.

La proposizione asserisce che, data la famiglia di deformazioni $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ tale che

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon \quad \text{con } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

a meno di un errore dell'ordine di $o(\epsilon)$ per $\epsilon \rightarrow 0^+$, i tensori di deformazione finita e di deformazione infinitesima coincidono.

In effetti si potrebbe far vedere che tutte le caratteristiche geometriche delle deformazioni x_ϵ sono descritte dal tensore di deformazione infinitesima a meno di un errore dell'ordine di $o(\epsilon)$ per $\epsilon \rightarrow 0^+$.

La proposizione 11.1 inoltre afferma che, a meno di un errore dell'ordine di $o(\epsilon)$ per $\epsilon \rightarrow 0^+$, il gradiente dello spostamento corrispondente ad una deformazione x_ϵ rigida è emisimmetrico.

Le argomentazioni precedenti giustificano la seguente definizione

Definizione 11.4. *Definiamo spostamento rigido infinitesimo per un corpo continuo, che subisca una deformazione regolare, un campo vettoriale definito in S_0 , regione occupata dal corpo prima della deformazione, che ammette la seguente rappresentazione:*

$$\vec{u}(P_0) = \vec{u}(\bar{P}_0) + \widetilde{W} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0 \quad (11.1.5)$$

dove \widetilde{W} è un tensore emisimmetrico indipendente da P_0 e \bar{P}_0 .

Dalla (11.1.5) si vede facilmente che $\text{grad}_0 \vec{u}$ è costante, come avviene in corrispondenza di una generica deformazione rigida ($\text{grad}_0 \vec{u} = \widetilde{F} - \widetilde{a}$ con \widetilde{F} tensore ortogonale costante) ed emisimmetrico, come avviene a meno di un termine dell'ordine di $o(\epsilon)$ per la famiglia di deformazioni rigide $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$.

Infatti, fissato \bar{P}_0 in S_0 , indichiamo con (x_{01}, x_{02}, x_{03}) , $(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03})$ le terne delle coordinate cartesiane di P_0, \bar{P}_0 . Le componenti della rappresentazione analitica del campo dello spostamento soddisfacente alla (11.1.5) sono date da

$$u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = u_i(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03}) + W_{ih}(x_{0h} - \bar{x}_{0h}).$$

Allora

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} = W_{ij}.$$

da cui

$$\text{grad}_0 \vec{u} = \widetilde{W}$$

con \widetilde{W} indipendente da P_0 ed emisimmetrico.

La (11.1.5) si può scrivere anche in altra forma tenendo presente che, come si può dimostrare, per ogni tensore doppio emisimmetrico \widetilde{W} esiste un vettore $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{E}}$ tale che:

$$\widetilde{W} \cdot \vec{a} = \vec{\varphi} \times \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Applicando tale risultato, la (11.1.5) può essere scritta come.

$$\vec{u}(P_0) = \vec{u}(\overline{P}_0) + \vec{\varphi} \times (P_0 - \overline{P}_0) \quad \forall P_0, \overline{P}_0 \in S_0 \quad (11.1.6)$$

dove il vettore $\vec{\varphi}$ è indipendente da P_0 e \overline{P}_0 .

E' interessante confrontare la (11.1.6) con l'espressione che assume il campo spaziale della velocità in corrispondenza di un atto di moto rigido ad un dato istante t

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\overline{P}, t) + \vec{\omega}(t) \times (P - \overline{P}) \quad \forall P, \overline{P} \in S(t). \quad (11.1.7)$$

C'è un'evidente analogia formale tra la (11.1.6) e la (11.1.7). Al campo dello spostamento definito in S_0 corrisponde il campo della velocità all'istante t definito in $S(t)$ ed al vettore $\vec{\varphi}$, indipendente da P_0 , e \overline{P}_0 , corrisponde il vettore velocità angolare $\vec{\omega}(t)$ indipendente da P e \overline{P} .

Osserviamo poi che sussiste un'evidente analogia formale anche tra il tensore di deformazione infinitesima:

$$\tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}),$$

che è la parte simmetrica del gradiente dello spostamento, e il tensore di velocità di deformazione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}),$$

che è la parte simmetrica del gradiente della velocità spaziale.

Poiché, come è noto, in corrispondenza di un atto di moto rigido della forma (11.1.7) $\tilde{D} = \tilde{0}$ in $S(t)$, per le analogie formali riscontrate possiamo asserire che se \vec{u} è uno spostamento rigido infinitesimo della forma (11.1.6), allora

$$\tilde{e} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0.$$

In effetti, si potrebbe provare che nell'ipotesi che la regione S_0 occupata dal continuo prima della deformazione sia la chiusura di un dominio, ossia di un aperto connesso, se il tensore di deformazione infinitesima è nullo in S_0 , allora lo spostamento è uno spostamento rigido infinitesimo.

Ci proponiamo ora di dedurre una formula di rappresentazione asintotica per la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff di un solido elastico.

Proposizione 11.2. *Sia dato un solido elastico la cui funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff \tilde{S} goda delle due proprietà seguenti:*

(1) *lo sforzo residuo è nullo, cioè*

$$\tilde{S}(\tilde{a}) = \tilde{0};$$

(2) *\tilde{S} soddisfa all'assioma dell'obiettività, ossia*

$$\tilde{S}(\tilde{F}) = \tilde{F} \tilde{S}^*(\tilde{d}).$$

Allora \tilde{S} ammette la seguente formula di rappresentazione asintotica \tilde{S} :

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \tilde{c} \cdot \tilde{e} + o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per} \quad \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}. \quad (11.1.8)$$

Dimostrazione

Consideriamo la funzione risposta del tensore di Piola - Kirchhoff per un dato solido elastico: $\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F})$ e ricordiamo che si assume \tilde{S} di classe \mathcal{C}^1 .

Dunque \tilde{S} è differenziabile in corrispondenza di ogni valore di \tilde{F} . In particolare è differenziabile per $\tilde{F} = \tilde{a}$ e per definizione di tensore elastico si ha

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{S}(\tilde{a}).$$

Se indichiamo con $L_{\tilde{a}}$ il differenziale di \tilde{S} in \tilde{a} , avremo che, preso un qualsiasi tensore \tilde{t} del II ordine, abbiamo:

$$L_{\tilde{a}}(\tilde{t}) = \tilde{c} \cdot \tilde{t}.$$

Per definizione di differenziabilità possiamo scrivere

$$\lim_{\tilde{F} \rightarrow \tilde{a}} \frac{\tilde{S}(\tilde{F}) - \tilde{S}(\tilde{a}) - L_{\tilde{a}}(\tilde{F} - \tilde{a})}{|\tilde{F} - \tilde{a}|} = \tilde{0}.$$

Ma, se teniamo presente la (1) della proposizione e l'osservazione su $L_{\tilde{a}}$ e il tensore elastico, la relazione precedente si riduce a

$$\lim_{\tilde{F} \rightarrow \tilde{a}} \frac{\tilde{S}(\tilde{F}) - \tilde{c} \cdot (\tilde{F} - \tilde{a})}{|\tilde{F} - \tilde{a}|} = \tilde{0}. \quad (11.1.9)$$

D'altra parte

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a} \implies \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{F} - \tilde{a}$$

per cui

$$\tilde{F} \rightarrow \tilde{a} \iff \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}.$$

Il limite (11.1.9) si può allora scrivere nella forma:

$$\lim_{\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}} \frac{\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) - \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}}{|\text{grad}_0 \vec{u}|} = \tilde{0}. \quad (11.1.10)$$

da cui discende

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) - \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per } \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}$$

ossia

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} + o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per } \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}. \quad (11.1.11)$$

Se decomponiamo $\text{grad}_0 \vec{u}$ nella somma della sua parte simmetrica che coincide con \tilde{e} e della sua parte emisimmetrica \tilde{E} , possiamo scrivere:

$$\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot (\tilde{e} + \tilde{E})$$

che in componenti fornisce:

$$[\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}]_{ij} = c_{ijrs}(e_{rs} + E_{rs}).$$

Ma per le ipotesi (1), (2) della proposizione, il tensore elastico è simmetrico rispetto alla seconda coppia di indici per cui la relazione scritta sopra si riduce a:

$$[\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}]_{ij} = c_{ijrs} e_{rs},$$

poiché la contrazione di due indici di simmetria con due di emisimmetria dà come risultato 0.

Dunque

$$\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot \tilde{e},$$

risultato che, sostituito nella (11.1.11), fornisce la rappresentazione asintotica (11.1.8).

Possiamo fare due osservazioni sulla (11.1.8).

Osservazione 11.1. Se sono soddisfatte le due ipotesi della proposizione 11.2, la funzione risposta del tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff risulta una funzione lineare del tensore di deformazione infinitesima $\tilde{\epsilon}$ a meno di un termine che è $o(\text{grad}_0 \vec{u})$ per $\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \vec{0}$.

Osservazione 11.2. Per l'ipotesi (1) della proposizione 11.2 il tensore elastico \tilde{c} è simmetrico rispetto alla prima coppia di indici per cui

$$[\tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}]_{ij} = c_{ijrs} e_{rs} = c_{jirs} e_{rs} = [\tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}]_{ji}.$$

Si ottiene dunque che, sempre nelle ipotesi (1), (2), la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff risulta simmetrica a meno di un termine che è $o(\text{grad}_0 \vec{u})$ per $\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \vec{0}$.

Diamo ora la definizione di solido elastico lineare.

Definizione 11.5. *Definiamo solido elastico lineare un solido elastico che soddisfa alle tre seguenti condizioni:*

- (i) *la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff \tilde{S} soddisfa all'assioma dell'obiettività;*
- (ii) *esiste una configurazione, detta configurazione naturale, che assunta come configurazione di riferimento dà luogo a sforzo residuo nullo;*
- (iii) *assunta come configurazione di riferimento quella naturale, qualunque sia il moto del solido, le componenti del gradiente dello spostamento sono così "piccole" da poter sostituire alla funzione risposta effettiva per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff la rappresentazione asintotica (11.1.8):*

$$\tilde{S} = \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}. \quad (11.1.12)$$

Si noti che per un solido elastico lineare il tensore di Piola - Kirchhoff è simmetrico.

Questo modello di continuo schematizza i solidi reali che subiscono piccole deformazioni quando sono soggetti a sforzi meccanici anche rilevanti.

Ovviamente, poiché i solidi elastici lineari sono una sottoclasse dei solidi elastici, anche per essi il problema del moto si imposta in un ambito puramente meccanico.

Scriviamo le equazioni che ne governano il moto, avendo preso come configurazione di riferimento la configurazione naturale:

$$\begin{aligned} \rho J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} && \text{in } S_0 \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{\varepsilon} && \text{con } \tilde{S} = \tilde{S}^T. \end{aligned}$$

Come per un qualsiasi solido elastico, nel sistema scritto sopra si isola dalle incognite la densità di massa così come dalle equazioni l'equazione di continuità della massa. Una volta risolto il problema relativo alle restanti equazioni, si determina ρ dall'equazione di continuità.

Dunque il moto è descritto dalle due ultime equazioni che equivalgono a 9 equazioni scalari (la terza, di carattere tensoriale fornisce 6 equazioni scalari indipendenti per la simmetria di \tilde{S}) in 9 incognite scalari, cioè le tre componenti del campo dello spostamento e le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff.

Vediamo quale forma assume la prima equazione indefinita della meccanica per un solido elastico lineare se utilizziamo la relazione sforzo-deformazione.

Poiché per le proprietà di simmetria del tensore elastico si ha:

$$\tilde{c} \cdot \tilde{\varepsilon} = \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u},$$

deduciamo

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \implies \rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 (\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}). \quad (11.1.13)$$

In componenti la (11.1.13) fornisce

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 F_i + (c_{ijrs} u_{r,s})_{,j}. \quad (11.1.14)$$

Supponiamo ora che per il solido elastico lineare considerato si abbia:

$$\rho_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } S_0$$

e che il tensore elastico non dipenda da P_0 per cui

$$\tilde{c} = \widetilde{\text{cost}} \quad \text{in } S_0.$$

Diremo che il solido elastico è omogeneo. Allora le (11.1.14) si riducono a:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 F_i + c_{ijrs} u_{r,sj}. \quad (11.1.15)$$

11.2 Sottoclassi di solidi elastici lineari.

Introduciamo una prima sottoclasse dei solidi elastici lineari, quella dei solidi elastici lineari isotropi.

Definizione 11.6. *Un solido elastico lineare si dice isotropo se il suo tensore elastico è isotropo.*

Un solido elastico lineare isotropo schematizza un solido reale le cui proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione.

Poichè il tensore elastico per un solido elastico lineare gode delle simmetrie minori, se è isotropo ha la stessa forma che ha il tensore di viscosità per un fluido viscoso classico (vedi Capitolo 5, §2) e dunque le sue componenti si esprimono mediante due soli scalari:

$$c_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})$$

dove $\lambda = \lambda(P_0)$ e $\mu = \mu(P_0)$ sono detti **moduli di Lamé**.

Se il solido elastico lineare considerato, oltre ad essere isotropo, è anche omogeneo i due coefficienti λ e μ sono costanti e prendono il nome di **costanti di Lamé**.

Ci proponiamo ora di stabilire quale forma assume la relazione sforzo - deformazione per un solido elastico lineare ed isotropo. Possiamo a tal riguardo utilizzare i calcoli che abbiamo svolto nel Capitolo 5 per i fluidi viscosi classici; infatti la funzione risposta per il tensore di Piola - Kirchhoff si esprime tramite il tensore di deformazione infinitesima \tilde{e} come si esprime la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy \tilde{T} per un fluido viscoso classico tramite il tensore di velocità di deformazione \tilde{D} .

Si ha perciò:

$$\tilde{S} = \lambda (\text{tr } \tilde{e}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{e}.$$

Tenendo poi presente l'analogia formale, già osservata in precedenza, tra \tilde{e} e \tilde{D} , deduciamo che per un solido elastico lineare ed isotropo la (11.1.13) assume la forma:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{grad}_0 (\lambda \text{div}_0 \vec{u}) + 2\text{div}_0 (\mu \tilde{e}). \quad (11.2.1)$$

Se il solido elastico lineare ed isotropo è anche omogeneo, la (11.2.1) diviene:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad}_0 \text{div}_0 \vec{u} + \mu \Delta_0 \vec{u}. \quad (11.2.2)$$

La (11.2.2) è nota come **equazione di Navier**.

Se un solido elastico lineare è isotropo, come si può verificare facilmente, il tensore elastico gode della simmetria maggiore.

Consideriamo ora la sottoclasse dei solidi elastici lineari tali che \tilde{c} goda della simmetria maggiore. I solidi elastici lineari ed isotropi sono ovviamente contenuti in tale sottoclasse.

Per tali solidi introduciamo la forma quadratica:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \forall \tilde{e} = \text{tensore doppio simmetrico.}$$

Esplicitando le componenti di \tilde{e} e \tilde{c} , la forma quadratica si esprime nel modo seguente:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}.$$

D'altra parte, se \tilde{e} è il tensore di deformazione infinitesima del solido elastico considerato, essendo questo lineare, si ha

$$\tilde{\hat{S}} = \tilde{c} \cdot \tilde{e},$$

ossia in componenti

$$\hat{S}_{ij} = c_{ijrs} e_{rs},$$

per cui in tal caso

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \hat{S}_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\hat{S}} \cdot \tilde{e}.$$

Dimostriamo la seguente

Proposizione 11.3. *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, si ha*

$$\tilde{\hat{S}}(\tilde{e}) = \partial_{\tilde{e}} \omega(\tilde{e}) \quad \text{ossia} \quad \hat{S}_{hk}(\tilde{e}) = \frac{\partial \omega}{\partial e_{hk}}(\tilde{e}).$$

Dimostrazione

Consideriamo le componenti di $\partial_{\tilde{e}} \omega(\tilde{e})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial e_{hk}}(\tilde{e}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e_{hk}} (c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{ijhk} e_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{hkij} e_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{hkrs} e_{rs}) \\ &= c_{hkrs} e_{rs} = \hat{S}_{hk}(\tilde{e}). \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

Nella dimostrazione abbiamo sfruttato la simmetria maggiore del tensore elastico.

Osserviamo che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, il solido elastico lineare si può riguardare come iperelastico poiché la funzione risposta del tensore di Piola - Kirchhoff, dipendente da $\tilde{\epsilon}$, è data dalla derivata rispetto ad $\tilde{\epsilon}$ della forma quadratica $\omega(\tilde{\epsilon})$.

Definizione 11.7. *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, definiamo $\omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t))$, dove ω è la forma quadratica che abbiamo introdotto precedentemente e $\tilde{\epsilon}(P_0, t)$ è il tensore di deformazione infinitesima in (P_0, t) , densità di volume dell'energia di deformazione elastica relativa al punto $P_0 \in S_0$ ed all'istante $t \in [t_0, t_1]$.*

Fissato $t \in [t_0, t_1]$, definiamo energia di deformazione elastica del solido all'istante t la seguente grandezza scalare:

$$\Omega(t) = \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t)) dS_0.$$

Dimostriamo il seguente

Teorema 11.1. *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, si ha:*

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = -\Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dimostrazione

Poiché il moto è regolare, possiamo derivare rispetto al tempo sotto il segno di integrale ottenendo $\forall t \in [t_0, t_1]$:

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t)) dS_0 = \int_{S_0} \dot{\omega}(\tilde{\epsilon}(P_0, t)) dS_0 \quad (11.2.4)$$

D'altra parte per la proposizione 11.3:

$$\dot{\omega}(\tilde{\epsilon}) = \frac{\partial \omega}{\partial e_{ij}}(\tilde{\epsilon}) \dot{e}_{ij} = S_{ij} \dot{e}_{ij} = \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}. \quad (11.2.5)$$

Ma, essendo \vec{u} di classe \mathcal{C}^2 ,

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}) \cdot = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \dot{\vec{u}} + \text{grad}_0^T \dot{\vec{u}}),$$

ossia $\dot{\tilde{\epsilon}}$ è la parte simmetrica di $\text{grad}_0 \dot{\vec{u}}$.

Allora, per la simmetria di \tilde{S} , sostituendo l'ultimo risultato nella (11.2.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(\tilde{\epsilon}) &= \tilde{S} \cdot \text{grad}_0 \dot{\vec{u}} = \tilde{S} \cdot (\text{grad}_0 \dot{\vec{u}}) \cdot \\ &= \tilde{S} \cdot (\tilde{F} - \tilde{a}) \cdot = \tilde{S} \cdot \tilde{F}. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

Se sostituiamo la (11.2.6) sotto integrale nella (11.2.4), deduciamo:

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t) \cdot \tilde{\dot{F}}(P_0, t) dS_0 = -\Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Il teorema risulta così dimostrato.

Tale teorema ha due corollari che ora proveremo.

Corollario 11.1. *Sia dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Considerato l'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$, il lavoro delle forze interne in tale intervallo dipende soltanto dai valori assunti dal tensore di deformazione infinitesima negli istanti t' e t'' ed è indipendente dal modo in cui il solido passa dalla configurazione all'istante t' alla configurazione all'istante t'' .*

Dimostrazione

Considerato l'intervallo di tempo $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ dove $[t_0, t_1]$ è l'intervallo di moto per il solido elastico, si ha

$$\begin{aligned} L_{i, [t', t'']} &= \int_{t'}^{t''} \Pi(t) dt = - \int_{t'}^{t''} \frac{d\Omega}{dt}(t) dt \\ &= \Omega(t') - \Omega(t'') = \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t')) dS_0 - \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t'')) dS_0, \end{aligned}$$

da cui discende immediatamente la tesi.

Corollario 11.2. *Dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, ad ogni istante $t \in [t_0, t_1]$ si ha:*

$$\frac{d(T + \Omega)}{dt}(t) = \Pi_e(t),$$

dove Π_e è la potenza delle forze esterne.

Dimostrazione

Per il teorema dell'energia cinetica, $\forall t \in [t_0, t_1]$ abbiamo

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) = \Pi_e(t) - \frac{d\Omega}{dt}(t), \quad (11.2.7)$$

dove abbiamo sfruttato il teorema 11.1.

Se nella (11.2.7) portiamo al primo membro la derivata rispetto al tempo dell'energia di deformazione elastica, otteniamo:

$$\frac{d(T + \Omega)}{dt}(t) = \Pi_e(t),$$

ossia la tesi.

Da tale corollario discende immediatamente il seguente **teorema di conservazione dell'energia**:

Teorema 11.2. *Dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, se le forze esterne hanno potenza nulla ad ogni istante durante il moto, allora si conserva la somma dell'energia cinetica e dell'energia di deformazione elastica.*

Vediamo ora di introdurre delle condizioni di segno sul tensore elastico di un solido elastico lineare, quando gode della simmetria maggiore.

In tale ipotesi abbiamo definito per ogni tensore doppio simmetrico \tilde{e} la forma quadratica:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}.$$

Com'è noto, la forma quadratica $\omega(\tilde{e})$ è detta definita positiva se

$$\omega(\tilde{e}) > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \tilde{0}.$$

Osserviamo che $\tilde{c} = \tilde{c}(P_0)$ per cui la forma quadratica ha una diversa espressione a seconda del punto $P_0 \in S_0$.

Diamo ora la seguente definizione.

Definizione 11.8. *Se il tensore elastico \tilde{c} di un solido elastico lineare gode della simmetria maggiore, diremo che è definito positivo nel punto $P_0 \in S_0$ se*

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c}(P_0) \cdot \tilde{e} > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \tilde{0}.$$

Diremo poi che \tilde{c} è definito positivo in S_0 o (più semplicemente) definito positivo se è definito positivo in ogni punto di S_0 .

Ovviamente \tilde{c} è definito positivo se e solo se la corrispondente forma quadratica $\omega(\tilde{e})$ è definita positiva.

Stabiliamo il seguente teorema

Teorema 11.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il tensore elastico di un solido elastico lineare ed isotropo sia definito positivo è che i due moduli di Lamé soddisfino alle seguenti condizioni di segno:*

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{in } S_0$$

Dimostrazione

Se il solido elastico lineare è isotropo, il suo tensore elastico è isotropo e il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff ha la forma seguente:

$$\tilde{S} = \lambda (\text{tr}\tilde{e}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{e}.$$

Se teniamo presente che

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs} = \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{S} \cdot \tilde{e},$$

nel nostro caso avremo:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr}\tilde{e}) \tilde{a} \cdot \tilde{e} + 2\mu \tilde{e} \cdot \tilde{e}] = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr}\tilde{e})^2 + 2\mu \tilde{e} \cdot \tilde{e}] \quad (11.2.8)$$

poiché

$$\tilde{a} \cdot \tilde{e} = \text{tr}\tilde{e}.$$

La forma quadratica $\omega(\tilde{e})$ ha formalmente la stessa espressione in funzione di \tilde{e} che ha la forma quadratica $\omega(\tilde{D})$ in funzione di \tilde{D} che interviene nella potenza delle forze interne per un fluido viscoso classico. Come abbiamo visto nel §2 del Capitolo 5, la forma quadratica $\omega(\tilde{D})$ è semidefinita positiva se e solo se i coefficienti di viscosità λ e μ soddisfano alle due condizioni di segno:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Procedendo in maniera analoga a quanto abbiamo fatto per ottenere tale risultato per $\omega(\tilde{D})$, si arriva ad affermare che la forma quadratica $\omega(\tilde{e})$ è definita positiva se e solo se i moduli di Lamé λ e μ soddisfano alle due condizioni di segno:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Il teorema è quindi dimostrato poiché il tensore elastico è definito positivo se e solo se $\omega(\tilde{e})$ è definita positiva.

Dal punto di vista sperimentale, per i solidi reali che possiamo schematizzare con il modello di solido elastico lineare il tensore elastico risulta definito positivo.

Tuttavia, nello studio della propagazione ondosa nei solidi elastici lineari, si ottengono dal punto di vista matematico ottimi risultati imponendo al tensore elastico una condizione di segno meno restrittiva, cioè richiedendo che \tilde{c} sia fortemente ellittico. Introduciamo tale definizione.

Definizione 11.9. *Dato un solido elastico lineare, diciamo che il suo tensore elastico è fortemente ellittico nel punto $P_0 \in S_0$ se*

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c}(P_0) \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (11.2.9)$$

Si dice poi che \tilde{c} è fortemente ellittico in S_0 o (più semplicemente) fortemente ellittico se è fortemente ellittico in tutti i punti di S_0 .

Ci proponiamo di dimostrare il seguente

Teorema 11.4. *Dato un solido elastico lineare ed isotropo, condizione necessaria e sufficiente affinché il suo tensore elastico \tilde{c} sia fortemente ellittico è che i moduli di Lamé soddisfino alle seguenti disuguaglianze:*

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{in } S_0.$$

Dimostrazione

Prima di distinguere tra condizione sufficiente e condizione necessaria, vediamo quale particolare espressione assume

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b})$$

dove $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$, se si tiene presente l'isotropia di \tilde{c} .
Siano $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$ e consideriamo:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) &= c_{ijrs} a_i b_j a_r b_s \\ &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu(\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})] a_i b_j a_r b_s \\ &= \lambda(a_i b_i)(a_r b_r) + \mu(a_i a_i b_j b_j + a_i b_i b_r a_r) \\ &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu[|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2] \\ &= (\lambda + \mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2) \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu[|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2]. \end{aligned}$$

D'altra parte, se i due vettori \vec{a}, \vec{b} sono non nulli, si ha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

dove φ è l'angolo tra i due vettori \vec{a} e \vec{b} .

Sostituendo nella precedente relazione otteniamo

$$\begin{aligned} (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu[|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi] \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(\vec{a} \times \vec{b})^2, \end{aligned}$$

che è l'espressione che ci proponevamo di ottenere e che continua a valere anche se uno dei due vettori \vec{a} e \vec{b} è nullo.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente.

Ipotesi: $\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0.$

Tesi: \tilde{c} è fortemente ellittico.

Grazie al risultato ottenuto sopra e all'ipotesi, abbiamo $\forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0$$

poiché i vettori \vec{a} e \vec{b} (non nulli) non possono essere simultaneamente ortogonali e paralleli e quindi non si possono annullare simultaneamente il loro prodotto scalare e il loro prodotto vettoriale. La condizione sufficiente è dunque provata.

Dimostriamo la condizione necessaria.

Ipotesi: \tilde{c} è fortemente ellittico

Tesi: $\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0$.

Per ipotesi, si ha:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0},$$

ossia, per quanto abbiamo visto in precedenza

$$(\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (11.2.10)$$

Per l'arbitrarietà di \vec{a} e \vec{b} , possiamo dapprima prendere i due vettori ortogonali; allora da (11.2.10) deduciamo:

$$\mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0 \quad \implies \mu > 0.$$

Prendiamo ora i due vettori \vec{a}, \vec{b} paralleli; allora da (11.2.10) discende:

$$(\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 > 0 \quad \implies \lambda + 2\mu > 0.$$

La dimostrazione del teorema è così completata.

Proviamo la seguente

Proposizione 11.4. *Per il tensore elastico \tilde{c} , la condizione di forte ellitticità è più debole della condizione che \tilde{c} sia definito positivo.*

Dimostrazione

In primo luogo mostriamo che se \tilde{c} è definito positivo, allora è fortemente ellittico.

Dunque

Ipotesi: $\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \vec{0}$

Tesi: $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

Prendiamo due vettori arbitrari $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ e poniamo

$$\tilde{A} = \vec{a} \otimes \vec{b}.$$

Allora

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = \tilde{A} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}.$$

Ma \tilde{c} è simmetrico rispetto alla prima ed alla seconda coppia di indici per cui, indicata con \tilde{A}_S la parte simmetrica di \tilde{A} , abbiamo

$$\tilde{A} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A} = \tilde{A}_S \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}_S.$$

Se $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, si può provare che \tilde{A} e $\tilde{A}_S \neq \vec{0}$. Ma allora, essendo \tilde{c} definito positivo, si ha

$$\tilde{A}_S \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}_S > 0,$$

ossia \tilde{c} è fortemente ellittico.

Perché la proposizione risulti provata in maniera completa, dobbiamo mostrare che esistono tensori \tilde{c} che sono fortemente ellittici ma che non sono definiti positivi. Possiamo utilizzare il teorema che abbiamo dimostrato per i solidi elastici lineari ed isotropi. Supponiamo che i moduli di Lamè λ e μ siano tali che

$$\lambda = -\mu, \quad \mu > 0.$$

Allora $\lambda + 2\mu = \mu > 0$, mentre $3\lambda + 2\mu = -3\mu + 2\mu = -\mu < 0$. Dunque il tensore elastico caratterizzato da questi due moduli di Lamè è fortemente ellittico, ma non definito positivo.

11.3 Elastostatica lineare.

L'elastostatica lineare studia la quiete dei solidi elastici lineari.

Premettiamo una definizione che sussiste per qualsiasi corpo continuo il cui moto sia studiato dal punto di vista materiale.

Definizione 11.10. *Dato un corpo continuo \mathcal{C} in moto regolare nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, se S_0 è la regione che occupa nella configurazione di riferimento, definiamo trazione (superficiale) materiale all'istante $t \in [t_0, t_1]$ il seguente campo vettoriale:*

$$\vec{f}_0(P_0, t) = \tilde{S}(P_0, t) \cdot \vec{n}_0 \quad \forall P_0 \in \partial S_0,$$

dove \vec{n}_0 è il versore normale in P_0 a ∂S_0 rivolto verso l'esterno di S_0 .

Vediamo di giustificare tale definizione.

Ricordiamo che, se si studia il moto di \mathcal{C} dal punto di vista spaziale, si definisce trazione (superficiale) all'istante $t \in [t_0, t_1]$ il seguente campo vettoriale:

$$\vec{f}(P, t) = \vec{T}(P, t, \vec{n}) \quad \forall P \in \partial S(t)$$

dove $\vec{T}(P, t, \vec{n})$ è lo sforzo specifico relativo al punto P ed all'istante t , coordinato alla direzione orientata di versore \vec{n} e \vec{n} è il versore normale in P a $\partial S(t)$ rivolto verso l'esterno di $S(t)$. D'altra per il teorema di Cauchy:

$$\vec{T}(P, t, \vec{n}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{n}$$

per cui il risultante delle forze esterne di contatto agenti su \mathcal{C} all'istante t è dato da:

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma = \int_{\partial S(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma.$$

Applicando il lemma 9.1 unitamente alla definizione di tensore degli sforzi di Piola- Kirchhoff, è possibile trasformare l'integrale esteso a $\partial S(t)$ in un integrale esteso a ∂S_0 :

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma = \int_{\partial S_0} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0,$$

risultato che giustifica la definizione 11.10.

Consideriamo un solido elastico lineare che sia in quiete in una data configurazione (ovviamente diversa dalla configurazione di riferimento).

Avremo dunque:

$$\vec{u} = \vec{u}(P_0), \quad \tilde{S} = \tilde{S}(P_0), \quad \vec{F} = \vec{F}(P_0) \quad \text{con } P_0 \in S_0.$$

Nel seguito del paragrafo supporremo sempre soddisfatte le seguenti ipotesi:

- i) la configurazione di riferimento è la configurazione naturale;
- ii) S_0 è la chiusura di un dominio regolare;
- iii) $\rho_0 \in \mathcal{C}(S_0)$, $\vec{F} \in \mathcal{C}(S_0)$, $\tilde{c} \in \mathcal{C}^1(S_0)$, $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$, $\tilde{S} \in \mathcal{C}^1(S_0)$.

L'elastostatica lineare è governata dalle due seguenti equazioni che devono essere soddisfatte in S_0 :

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con } \tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

La prima delle (11.3.1) è la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui con $\vec{u} = \vec{0}$ poiché il solido è in quiete, la seconda è la relazione sforzo-deformazione del solido elastico lineare.

Teorema 11.5. Teorema del lavoro e dell'energia. *Sia dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico \tilde{c} gode della simmetria maggiore, in quiete in una data configurazione. Se (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione in S_0 delle (11.3.1), allora si ha:*

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega \quad (11.3.2)$$

dove Ω è l'energia di deformazione elastica.

Dimostrazione

In primo luogo ricordiamo che

$$\Omega = \int_{S_0} \omega(\tilde{e}(P_0)) \, dS_0.$$

Per provare la (11.3.2), moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima delle (11.3.1) per \vec{u} e integriamo su S_0 ottenendo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = 0. \quad (11.3.3)$$

Ma

$$\operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} = S_{ij,j} u_i = (S_{ij} u_i)_{,j} - S_{ij} u_{i,j},$$

e

$$S_{ij} u_{i,j} = \tilde{S} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} = \tilde{S} \cdot \tilde{e} = 2\omega(\tilde{e}).$$

Sostituendo i risultati trovati nella (11.3.3), deduciamo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} (S_{ij} u_i)_{,j} \, dS_0 - 2 \int_{S_0} \omega(\tilde{e}) \, dS_0 = 0. \quad (11.3.4)$$

Se applichiamo al secondo integrale della (11.3.4) le formule integrali di Gauss-Ostrogradski otteniamo:

$$\int_{S_0} (S_{ij} u_i)_{,j} \, dS_0 = \int_{\partial S_0} u_i S_{ij} n_{0j} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{u} \cdot (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0) \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{u} \cdot \vec{f}_0 \, d\Sigma_0. \quad (11.3.5)$$

Inserendo la (11.3.5) nella (11.3.4) e tenendo presente la definizione di energia di deformazione elastica, si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega,$$

ossia la tesi.

Osserviamo che il primo membro della (11.3.2) rappresenta il lavoro delle forze esterne agenti sul solido in corrispondenza del campo dello spostamento \vec{u} .

Teorema 11.6. Teorema di reciprocità di Betti. *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico goda della simmetria maggiore. Se (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione delle equazioni dell'elastostatica lineare relative a tale solido in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa e (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa, allora si ha:*

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0, \quad (11.3.6)$$

dove

$$\vec{f}_0 = \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}, \quad \vec{f}_0 = \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}.$$

Dimostrazione

Dall'enunciato del teorema deduciamo che (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione delle (11.3.1), mentre (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione delle equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con} \quad \tilde{e} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad}_0 \vec{u} + \operatorname{grad}_0^T \vec{u} \right). \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente per \vec{u} entrambi i membri della prima delle (11.3.1) e per \vec{u} entrambi i membri della prima delle (11.3.7), integrando poi su S_0 .

Avremo così:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = 0. \quad (11.3.8)$$

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = 0. \quad (11.3.9)$$

Se ora procediamo come nella dimostrazione del precedente teorema, otteniamo:

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} \, dS_0,$$

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} \, dS_0.$$

Possiamo allora scrivere la (11.3.8) nella forma:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} \, dS_0, \quad (11.3.10)$$

e la (11.3.9) nella forma:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} dS_0. \quad (11.3.11)$$

Ora mostriamo che per la proprietà di simmetria maggiore di cui gode \tilde{c} si ha

$$\tilde{S} \cdot \tilde{e} = \tilde{S} \cdot \tilde{e} \quad \text{in } S_0. \quad (11.3.12)$$

Infatti:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{e} = S_{ij} \bar{e}_{ij} = c_{ijrs} e_{rs} \bar{e}_{ij} = c_{rsij} e_{rs} \bar{e}_{ij} = c_{ijrs} \bar{e}_{rs} e_{ij} = \bar{S}_{ij} e_{ij} = \tilde{S} \cdot \tilde{e}.$$

Nella relazione scritta sopra abbiamo dapprima scambiato nelle componenti di \tilde{c} la prima coppia di indici con la seconda e nel passaggio successivo abbiamo scambiato il nome degli indici saturati, denotando con i, j gli indici r, s e viceversa con r, s gli indici i, j .

Allora le equazioni (11.3.10) e (11.3.11) hanno i secondi membri uguali per cui sono uguali anche i primi membri, ossia si ottiene la tesi.

Si osservi che il teorema ci consente di asserire che, nell'ipotesi che \tilde{c} goda della simmetria maggiore, il lavoro delle forze esterne relative alla prima soluzione delle equazioni dell'elastostatica lineare in corrispondenza del campo dello spostamento relativo alla seconda soluzione è uguale al lavoro delle forze esterne relative alla seconda soluzione in corrispondenza del campo dello spostamento relativo alla prima.

Enunciamo ora il più generale problema al contorno dell'elastostatica lineare: il **problema misto dell'elastostatica lineare**.

Come abbiamo visto, l'elastostatica lineare è governata dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con } \tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned}$$

Se sostituiamo nella prima equazione la relazione sforzo-deformazione, otteniamo una sola equazione avente come unica incognita vettoriale il campo dello spostamento:

$$\rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0} \quad \text{in } S_0. \quad (11.3.13)$$

All'equazione (11.3.13) vanno associate opportune condizioni al contorno che ora preciseremo.

Siano $\partial_1 S_0$ e $\partial_2 S_0$ due porzioni di ∂S_0 che siano superfici regolari o unione di superfici regolari tali che

$$\partial_1 S_0 \cup \partial_2 S_0 = \partial S_0$$

e che non abbiano punti in comune esclusi eventualmente punti del loro bordo. All'equazione (11.3.13) associamo le due seguenti condizioni al contorno:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{\hat{u}}, \quad \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{\hat{f}}_0, \quad (11.3.14)$$

dove $\vec{\hat{u}}$ e $\vec{\hat{f}}_0$ sono campi vettoriali noti.

Si noti che, essendo \tilde{c} simmetrico rispetto alla prima coppia di indici, si ha

$$(\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \cdot \vec{n}_0 = \vec{n}_0 \cdot (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) = (\vec{n}_0 \cdot \tilde{c}) \cdot \text{grad}_0 \vec{u}.$$

Ciascuno degli ultimi due vettori, essendo uguali, può essere denotato semplicemente con $\vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}$.

La seconda condizione al contorno può dunque essere scritta nella forma:

$$\vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{\hat{f}}_0.$$

Il problema al contorno (11.3.13), (11.3.14) è detto problema misto dell'elastostatica lineare poiché su una parte della frontiera di S_0 è assegnato lo spostamento e sulla parte restante è assegnata la trazione superficiale.

Se $\partial_1 S_0 = \partial S_0$ e $\partial_2 S_0 = \emptyset$, viene assegnato lo spostamento su tutta la frontiera di S_0 ed il problema al contorno è detto **problema dell'elastostatica lineare relativo al solo spostamento**.

Se viceversa $\partial_2 S_0 = \partial S_0$ e $\partial_1 S_0 = \emptyset$, viene assegnata su tutta la frontiera di S_0 la trazione ed il problema al contorno è detto **problema dell'elastostatica lineare relativo alla sola trazione**.

Il problema misto dell'elastostatica lineare consiste nel determinare in S_0 il campo vettoriale $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ che è soluzione in S_0 dell'equazione (11.3.13) e soddisfa alle condizioni al contorno (11.3.14).

Ovviamente, affinché il problema ammetta soluzione, i dati al contorno devono necessariamente soddisfare ad opportune condizioni di regolarità e di compatibilità negli eventuali punti in comune dei bordi di $\partial_1 S_0$ e $\partial_2 S_0$.

Teorema 11.7. Teorema di unicità della soluzione del problema misto dell'elastostatica lineare. *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico \tilde{c} goda della simmetria maggiore e sia definito positivo. Se il problema misto dell'elastostatica relativo a tale solido ammette soluzione, questa è unica*

a meno di uno spostamento rigido infinitesimo, ossia se \vec{u}_1, \vec{u}_2 sono soluzioni dello stesso problema misto, allora

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{s},$$

dove \vec{s} è uno spostamento rigido infinitesimo.

Dimostrazione

Supponiamo che esistano due soluzioni \vec{u}_1 e \vec{u}_2 dello stesso problema misto e poniamo

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Vediamo di quali proprietà gode \vec{u} essendo differenza di due soluzioni dello stesso problema misto.

In primo luogo $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ poiché lo sono \vec{u}_1 e \vec{u}_2 . Inoltre, essendo \vec{u}_1 e \vec{u}_2 soluzioni in S_0 della stessa equazione con la stessa densità delle forze esterne di massa, la loro differenza è soluzione in S_0 della corrispondente equazione omogenea, ossia:

$$\operatorname{div}_0(\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0}. \quad (11.3.15)$$

Infine \vec{u} soddisfa a condizioni al contorno omogenee:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{0}, \quad \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{0}. \quad (11.3.16)$$

Poiché \tilde{c} gode della simmetria maggiore, possiamo applicare il teorema del lavoro e dell'energia alla coppia $(\vec{u}, \tilde{S} = \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon})$ tenendo presente che è soluzione delle due equazioni dell'elastostatica lineare in corrispondenza di forze esterne di massa nulle per cui

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega = \int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} \, dS_0. \quad (11.3.17)$$

D'altra parte

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial_1 S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 + \int_{\partial_2 S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0.$$

Ma l'integrale esteso a $\partial_1 S_0$ è nullo per la prima delle (11.3.16) e l'integrale esteso a $\partial_2 S_0$ è nullo per la seconda delle (11.3.16). Dunque

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 0$$

e la (11.3.17) si riduce a

$$\int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} \, dS_0 = 0. \quad (11.3.18)$$

Ma, essendo \tilde{c} definito positivo, la funzione integranda nella (11.3.18) è non negativa in S_0 ; essendo anche continua ne discende:

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = 0 \quad \text{in } S_0.$$

D'altra parte la forma quadratica $\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e}$ è definita positiva e dunque otteniamo

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = 0 \quad \text{in } S_0 \implies \tilde{e} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0.$$

Per quanto visto sulle proprietà del tensore di deformazione infinitesima concludiamo che $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ è uno spostamento rigido infinitesimo cvd.

Ci proponiamo ora di provare che se $\partial_1 S_0 \neq \emptyset$ c'è unicità della soluzione. Dimostriamo dapprima il seguente

Lemma 11.1. *Se il campo di uno spostamento rigido infinitesimo $\vec{s} = \vec{s}(P_0)$ definito in S_0 è nullo in tre punti non allineati, allora è identicamente nullo in S_0 .*

Dimostrazione

Per definizione di spostamento rigido infinitesimo, abbiamo

$$\vec{s}(P_0) = \vec{s}(\bar{P}_0) + \vec{\varphi} \times (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0. \quad (11.3.19)$$

Per ipotesi $\vec{s} = \vec{0}$ nei tre punti $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$, non allineati, ossia

$$\vec{s}(P_0^{(i)}) = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\vec{s}(P_0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Nella (11.3.19) prendiamo $\bar{P}_0 = P_0^{(1)}$ per cui otteniamo:

$$\vec{s}(P_0) = \vec{\varphi} \times (P_0 - P_0^{(1)}) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Ora nella relazione scritta sopra prendiamo P_0 coincidente dapprima con $P_0^{(2)}$ e poi con $P_0^{(3)}$. Deduciamo allora:

$$\vec{s}(P_0^{(2)}) = \vec{\varphi} \times (P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) = \vec{0}, \quad (11.3.20)$$

$$\vec{s}(P_0^{(3)}) = \vec{\varphi} \times (P_0^{(3)} - P_0^{(1)}) = \vec{0}. \quad (11.3.21)$$

Dalla (11.3.20) si ha che

$$\vec{\varphi} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{\varphi} \parallel (P_0^{(2)} - P_0^{(1)})$$

e analogamente dalla (11.3.21) discende

$$\vec{\varphi} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{\varphi} \parallel (P_0^{(3)} - P_0^{(1)}).$$

Ma poiché i punti $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$, non sono allineati, i vettori $(P_0^{(2)} - P_0^{(1)})$ e $(P_0^{(3)} - P_0^{(1)})$ non sono paralleli e quindi $\vec{\varphi} = \vec{0}$ per cui

$$\vec{s}(P_0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Teorema 11.8. Teorema di unicità vera e propria Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 11.7 ed inoltre si abbia $\partial_1 S_0 \neq \emptyset$. Allora, se esiste una soluzione del problema misto dell'elastostatica lineare, questa è unica.

Dimostrazione

Siano \vec{u}_1, \vec{u}_2 due soluzioni dello stesso problema e poniamo $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Per il teorema precedente \vec{u} è uno spostamento rigido infinitesimo. D'altra parte,

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{0}.$$

Poiché $\partial_1 S_0$, essendo una superficie regolare o l'unione di più superfici regolari, contiene sicuramente tre punti non allineati, per il lemma 11.1 concludiamo che

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0} \quad \implies \quad \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{in } S_0.$$

Il teorema di unicità è così dimostrato.

Se il problema che si considera in elastostatica lineare è relativo alla sola trazione, per quanto visto nel primo teorema di unicità, la soluzione è unica a meno di uno spostamento rigido infinitesimo.

Ricordiamo che tale problema si ottiene associando all'equazione:

$$\rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0} \quad \text{in } S_0 \quad (11.3.22)$$

la condizione al contorno

$$\tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial S_0} = \vec{f}_0. \quad (11.3.23)$$

Ci proponiamo di dimostrare la seguente

Proposizione 11.5. *Condizione necessaria affinché il problema relativo alla sola trazione dell'elastostatica lineare (11.3.22), (11.3.23) ammetta soluzione è che*

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0 &= \vec{0} \\ \int_{S_0} (P_0 - O) \times \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{\partial S_0} (P_0 - O) \times \vec{f}_0 d\Sigma_0 &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (11.3.24)$$

essendo O un punto arbitrario fisso rispetto all'osservatore.

Dimostrazione

Osserviamo che la prima delle (11.3.24) ci dice che il risultante delle forze esterne è nullo, la seconda che è nullo il momento risultante delle forze esterne rispetto al punto O .

Per ottenere le (11.3.24) integriamo su S_0 entrambi i membri della (11.3.22):

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \vec{0}, \quad (11.3.25)$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{S}.$$

Ma per il teorema della divergenza e la condizione al contorno (11.3.23) si ottiene:

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \int_{\partial S_0} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0.$$

Sostituendo nella (11.3.25) tale risultato, ricaviamo la prima delle due relazioni da dimostrare.

Per ottenere la seconda, moltiplichiamo vettorialmente a sinistra entrambi i membri della (11.3.22) per il vettore $(P_0 - O)$ e poi integriamo su S_0 :

$$\int_{S_0} (P_0 - O) \times \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{S_0} (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \vec{0}. \quad (11.3.26)$$

Consideriamo ora la i -esima componente del vettore sotto il secondo integrale al primo membro della (11.3.26) rispetto alla base relativa al riferimento $O x_1 x_2 x_3$ associato all'osservatore:

$$\begin{aligned} \left[(P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} \right]_i &= \theta_{ijl} x_{0j} \left(\operatorname{div}_0 \tilde{S} \right)_l = \theta_{ijl} x_{0j} S_{lr,r} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} x_{0j,r} S_{lr} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} \delta_{jr} S_{lr} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} S_{lj} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} \end{aligned} \quad (11.3.27)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che i due indici di emisimmetria j, l del tensore di Ricci sono contratti con i due indici corrispondenti di simmetria di \tilde{S} .

Sfruttando il risultato ottenuto in (11.3.27), applicando le formule integrali di Gauss-Ostrogradski e usando la condizione al contorno (11.3.23), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left[(P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} \right]_i dS_0 &= \int_{\partial S_0} \theta_{ijl} x_{0j} S_{lr} n_{0r} d\Sigma_0 \\ &= \int_{\partial S_0} \theta_{ijl} x_{0j} \hat{f}_{0l} d\Sigma_0 \\ &= \int_{\partial S_0} \left[(P_0 - O) \times \vec{\hat{f}}_0 \right]_i d\Sigma_0, \end{aligned}$$

ossia

$$\int_{S_0} (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \int_{\partial S_0} (P_0 - O) \times \vec{\hat{f}}_0 d\Sigma_0. \quad (11.3.28)$$

L'inserimento della (11.3.28) nella (11.3.26) fornisce la seconda delle (11.3.24). La proposizione è così dimostrata.

11.4 Elastodinamica lineare.

Sia dato un solido elastico lineare in moto nell'intervallo di tempo $[0, t_1]$ o $[0, +\infty)$. Prendiamo come configurazione di riferimento quella naturale ed indichiamo con S_0 la regione occupata in tale configurazione, che assumiamo essere la chiusura di un dominio regolare.

Le equazioni che ne governano il moto in $\mathcal{S}_0 = S_0 \times [0, t_1]$ o $S_0 \times [0, +\infty)$ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con} \quad \tilde{e} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}_0 \vec{u} + \operatorname{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned} \quad (11.4.1)$$

Le (11.4.1) sono note come **equazioni dell'elastodinamica lineare**.

Nel seguito supporremo soddisfatte le seguenti ipotesi:

$$\rho_0 \in \mathcal{C}(S_0), \quad \vec{F} \in \mathcal{C}(S_0), \quad \tilde{c} \in \mathcal{C}^1(S_0), \quad \vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0), \quad \tilde{S} \in \mathcal{C}^{1,0}(S_0).$$

In base a quanto visto nel §2, sussiste il seguente

Teorema 11.9. Teorema della potenza e dell'energia. *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto nell'intervallo di tempo $[0, t_1]$ o $[0, +\infty)$, si ha:*

$$\frac{d}{dt} (T + \Omega)(t) = \Pi_e(t) \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ o } [0, +\infty). \quad (11.4.2)$$

Il nostro scopo è ora quello di esprimere T e Π_e nell'ambito dell'impostazione materiale.

Consideriamo dapprima l'energia cinetica T ; applicando il teorema del cambiamento delle variabili d'integrazione deduciamo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS = \frac{1}{2} \int_{S_0} J \rho_m \dot{\vec{x}}^2 dS_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_0} J \rho_m \dot{\vec{u}}^2 dS_0 = \frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0. \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

Per ottenere la (11.4.3) abbiamo trasformato l'integrale esteso a $S(t)$ in un integrale esteso a S_0 , abbiamo tenuto presente l'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale e che $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{u}}$.

Consideriamo ora la potenza delle forze esterne

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma.$$

Per quanto riguarda la potenza delle forze esterne di massa, applicando il teorema sul cambiamento delle variabili d'integrazione e procedendo in maniera analoga a quanto fatto per l'energia cinetica, deduciamo:

$$\int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}_m \cdot \dot{\vec{u}} dS_0. \quad (11.4.4)$$

Trasformiamo ora la potenza delle forze esterne di contatto, ricordando che $\vec{f} = \tilde{T} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)}$ e applicando il lemma 9.1:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma &= \int_{\partial S(t)} (\tilde{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} d\Sigma \\ &= \int_{\partial S(t)} (\vec{v} \cdot \tilde{T}) \cdot \vec{n} d\Sigma \\ &= \int_{\partial S_0} J(\dot{\vec{u}} \cdot \tilde{T}_m) \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

Scriviamo in componenti il campo scalare sotto l'integrale esteso a ∂S_0 che compare nella (11.4.5):

$$\begin{aligned} J(\dot{\vec{u}} \cdot \tilde{T}_m) \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) &= J \dot{u}_i T_{ij}^{(m)} G_{jk} n_{0k} \\ &= J T_{ij}^{(m)} G_{jk} n_{0k} \dot{u}_i \\ &= S_{ik} n_{0k} \dot{u}_i = (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0)_i \dot{u}_i. \end{aligned} \quad (11.4.6)$$

Sostituendo la (11.4.6) nella (11.4.5), otteniamo:

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma = \int_{\partial S_0} (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0) \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (11.4.7)$$

In conclusione, dalle (11.4.4), (11.4.7) deduciamo:

$$\Pi_e = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}_m \cdot \dot{\vec{u}} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (11.4.8)$$

Nel seguito per brevità, come del resto abbiamo sempre fatto dal Capitolo 6, omettiamo il pedice m nella densità delle forze esterne di massa.

A questo punto possiamo esplicitare in maniera completa la (11.4.2) nell'ambito dell'impostazione materiale:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 \, dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \, dS_0 \right] = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \dot{\vec{u}} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (11.4.9)$$

Il nostro scopo è ora dimostrare un teorema di reciprocità per l'elastodinamica lineare analogo al teorema di reciprocità di Betti stabilito in elastostatica lineare. Introduciamo dapprima la definizione di convoluzione.

Definizione 11.11. Siano $f = f(t)$, $g = g(t)$ due funzioni a valori reali definite $\forall t \in [0, t_1]$ (o $[0, +\infty)$), continue nell'intervallo di definizione.

Si definisce convoluzione di f e g la funzione scalare $f * g = (f * g)(t)$ tale che:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \, d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)).$$

Come si può verificare facilmente, effettuando un cambiamento della variabile d'integrazione, si ha:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau = (g * f)(t) \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)).$$

Si può anche provare facilmente, sempre con un opportuno cambiamento della variabile d'integrazione, che se f , g , h sono funzioni scalari continue in $[0, t_1]$ (o $[0, +\infty)$), allora

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Definizione 11.12. Siano $\alpha = \alpha(t)$, $\vec{u} = \vec{u}(t)$, $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ una funzione scalare, una funzione vettoriale, una funzione tensoriale definite $\forall t \in [0, t_1]$ (o $[0, +\infty)$), continue nell'intervallo di definizione.

Si definiscono convoluzione di α e \vec{u} e convoluzione di α e \tilde{A} le due funzioni,

una vettoriale ed una tensoriale $\alpha * \vec{u} = (\alpha * \vec{u})(t)$, $\alpha * \tilde{A} = (\alpha * \tilde{A})(t)$ tali che:

$$(\alpha * \vec{u})(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)),$$

$$(\alpha * \tilde{A})(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau) \tilde{A}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)).$$

Siano $\vec{u} = \vec{u}(t)$, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ due funzioni vettoriali e $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$, $\tilde{B} = \tilde{B}(t)$ due funzioni tensoriali dello stesso ordine, definite $\forall t \in [0, t_1]$ (o $[0, +\infty)$), continue nell'intervallo di definizione.

Si definiscono convoluzione di \vec{u} e di \vec{v} e convoluzione di \tilde{A} e \tilde{B} le due funzioni scalari $\vec{u} * \vec{v} = (\vec{u} * \vec{v})(t)$, $\tilde{A} * \tilde{B} = (\tilde{A} * \tilde{B})(t)$ tali che:

$$(\vec{u} * \vec{v})(t) = \int_0^t \vec{u}(t - \tau) \cdot \vec{v}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)),$$

$$(\tilde{A} * \tilde{B})(t) = \int_0^t \tilde{A}(t - \tau) \cdot \tilde{B}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)).$$

Le definizioni date continuano a sussistere se consideriamo campi scalari, vettoriali o tensoriali dipendenti da t . La convoluzione sarà anch'essa, a seconda dei casi, un campo scalare, vettoriale o tensoriale, dipendente da t .

Osservazione 11.1 La convoluzione di funzioni del tempo scalari, vettoriali o tensoriali continue in $[0, t_1]$ o in $[0, +\infty)$ è una funzione continua in $[0, t_1]$ o in $[0, +\infty)$.

La convoluzione di campi scalari, vettoriali o tensoriali continui in $S_0 \times [0, t_1]$ o in $S_0 \times [0, +\infty)$ è un campo scalare, vettoriale o tensoriale continuo in $S_0 \times [0, t_1]$ o in $S_0 \times [0, +\infty)$.

Dimostriamo ora la seguente

Proposizione 11.6. La coppia (\vec{u}, \tilde{S}) soddisfi l'equazione:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \quad (11.4.10)$$

e per \vec{u} sussistano le seguenti condizioni iniziali:

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (11.4.11)$$

Allora (\vec{u}, \tilde{S}) soddisfa anche l'equazione:

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0, \quad (11.4.12)$$

dove

$$\begin{aligned}\vec{F}^*(P_0, t) &= (j * \vec{F})(P_0, t) + t \vec{v}_0(P_0) + \vec{u}_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ j &= j(t) = t. \\ \vec{F}^* &\text{ è detta densità delle pseudoforze di massa.}\end{aligned}$$

Dimostrazione

Consideriamo la convoluzione della funzione $j = j(t)$ con entrambi i membri della (11.4.10):

$$j * \rho_0 \ddot{\vec{u}} = j * \rho_0 \vec{F} + j * \operatorname{div}_0 \tilde{S}. \quad (11.4.13)$$

Poiché ρ_0 è indipendente dal tempo, possiamo scrivere la (11.4.13) nella forma:

$$\rho_0 j * \ddot{\vec{u}} = \rho_0 j * \vec{F} + j * \operatorname{div}_0 \tilde{S}. \quad (11.4.14)$$

Consideriamo la convoluzione al primo membro della (11.4.14) ed integriamo per parti tenendo presenti le (11.4.11):

$$\begin{aligned}(j * \ddot{\vec{u}})(P_0, t) &= \int_0^t (t - \tau) \ddot{\vec{u}}(P_0, \tau) d\tau \\ &= (t - \tau) \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) d\tau \\ &= -t \dot{\vec{u}}(P_0, 0) + \vec{u}(P_0, t) - \vec{u}(P_0, 0) \\ &= \vec{u}(P_0, t) - t \vec{v}_0(P_0) - \vec{u}_0(P_0).\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (11.4.14), deduciamo:

$$\begin{aligned}\rho_0(P_0) \vec{u}(P_0, t) &= \rho_0(P_0) \left[(j * \vec{F})(P_0, t) + t \vec{v}_0(P_0) + \vec{u}_0(P_0) \right] + (j * \operatorname{div}_0 \tilde{S})(P_0, t) \\ &= \rho_0(P_0) \vec{F}^*(P_0, t) + (j * \operatorname{div}_0 \tilde{S})(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.\end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema di reciprocità di Graffi per l'elastodinamica lineare.

Teorema 11.10. Teorema di reciprocità di Graffi. *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico goda della simmetria maggiore. Inoltre sia (\vec{u}, \tilde{S}) soluzione delle equazioni dell'elastodinamica lineare relative a tale solido in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa con \vec{u} soddisfacente alle condizioni iniziali:*

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0 \quad (11.4.15)$$

e sia (\vec{u}, \vec{S}) soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa con \vec{u} soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (11.4.16)$$

Allora in $[0, t_1]$ (o in $[0, +\infty)$) si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0, \quad (11.4.17)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{F}^* &= j * \vec{F} + t \vec{v}_0 + \vec{u}_0, & \vec{f}_0 &= \vec{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0} \\ \vec{F}^* &= j * \vec{F} + t \vec{v}_0 + \vec{u}_0, & \vec{f}_0 &= \vec{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}. \end{aligned}$$

Se

$$\vec{u}_0, \vec{u}_0 \equiv \vec{0}, \quad e \quad \vec{v}_0, \vec{v}_0 \equiv \vec{0},$$

allora in $[0, t_1]$ (o in $[0, +\infty)$) si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0. \quad (11.4.18)$$

Dimostrazione

Se (\vec{u}, \vec{S}) è soluzione delle equazioni dell'elastodinamica lineare in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa con \vec{u} soddisfacente alle condizioni iniziali (11.4.15) e (\vec{u}, \vec{S}) è soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità \vec{F} delle forze esterne di massa con \vec{u} soddisfacente alle condizioni iniziali (11.4.16), per la proposizione 11.6 si ha:

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \operatorname{div}_0 \vec{S} \quad \text{in } S_0 \quad (11.4.19)$$

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \operatorname{div}_0 \vec{S} \quad \text{in } S_0. \quad (11.4.20)$$

Dalla (11.4.19), considerandone la convoluzione di entrambi i membri con \vec{u} , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{u} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + (j * \operatorname{div}_0 \vec{S}) * \vec{u} \\ &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}). \end{aligned} \quad (11.4.21)$$

Analogamente dalla (11.4.20), considerandone la convoluzione di entrambi i membri con \vec{u} , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{u} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + (j * \operatorname{div}_0 \vec{S}) * \vec{u} \\ &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}). \end{aligned} \quad (11.4.22)$$

Ma per una proprietà delle convoluzioni

$$\vec{u} * \vec{u} = \vec{u} * \vec{u}$$

per cui in \mathcal{S}_0 si ha:

$$\rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) = \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}). \quad (11.4.23)$$

Integriamo su S_0 entrambi i membri della (11.4.23):

$$\int_{S_0} \left[\rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = \int_{S_0} \left[\rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0. \quad (11.4.24)$$

D'altra parte, poiché j non dipende da P_0 , abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left[j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] (P_0, t) dS_0 &= \int_{S_0} \left\{ \int_0^t \left[(t - \tau) (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, \tau) \right] d\tau \right\} dS_0 \\ &= \int_0^t (t - \tau) \left[\int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, \tau) dS_0 \right] d\tau, \end{aligned}$$

ossia

$$\int_{S_0} \left[j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0.$$

Analogamente si ha:

$$\int_{S_0} \left[j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0.$$

Sostituendo nella (11.4.24), deduciamo

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0. \quad (11.4.25)$$

Ora consideriamo $\forall t \in [t_0, t_1] \quad o \in [t_0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} &\int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, t) dS_0 = \\ &= \int_{S_0} \left(\int_0^t \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau \right) dS_0 = \\ &= \int_0^t \left(\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Occupiamoci per il momento della funzione integranda dell'integrale di volume:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) &= S_{ij,j}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) \\ &= [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} - S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_{i,j}(P_0, \tau) \\ &= [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} - S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale di volume otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{S_0} [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} dS_0 - \int_{S_0} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) n_{0j} d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} f_{0i}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, t) dS_0 &= \int_0^t \left(\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\int_{\partial S_0} \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\Sigma_0 \right) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left(\int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau = \\ &= \int_{\partial S_0} \left(\int_0^t \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau \right) d\Sigma_0 \\ &\quad - \int_{S_0} \left(\int_0^t \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) d\tau \right) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} (\vec{f}_0 * \vec{u})(P_0, t) d\Sigma_0 - \int_{S_0} (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) dS_0. \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0 = j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0. \quad (11.4.26)$$

Procedendo in maniera analoga si deduce:

$$j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{\tilde{S}} * \vec{u} dS_0 = j * \int_{\partial S_0} \vec{\tilde{f}}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{\tilde{S}} * \tilde{e} dS_0. \quad (11.4.27)$$

Sostituiamo le (11.4.26), (11.4.27) nella (11.4.25) ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0 = \\ \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0. \end{aligned} \quad (11.4.28)$$

D'altra parte, poiché \tilde{c} gode della simmetria maggiore, è facile provare che:

$$\tilde{S} * \tilde{e} = \tilde{S} * \tilde{e}. \quad (11.4.29)$$

Infatti

$$(\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) = \int_0^t S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) d\tau. \quad (11.4.30)$$

Ma

$$\begin{aligned} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) &= c_{ijrs}(P_0) e_{rs}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) \\ &= c_{rsij}(P_0) e_{rs}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) \\ &= c_{rsij}(P_0) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) e_{rs}(P_0, t - \tau) \\ &= c_{ijrs}(P_0) \bar{e}_{rs}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau) \\ &= \bar{S}_{ij}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau). \end{aligned}$$

Se andiamo a sostituire nella (11.4.30), otteniamo:

$$\begin{aligned} (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) &= \int_0^t \bar{S}_{ij}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \bar{S}_{ij}(P_0, t - \tau) e_{ij}(P_0, \tau) d\tau \\ &= (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t), \end{aligned}$$

che è il risultato che ci proponevamo di ottenere.

Allora, grazie alla (11.4.29), la (11.4.28) si riduce a:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0,$$

che è la prima delle due relazioni che dovevamo dimostrare, cioè la (11.4.17).

Ora supponiamo che \vec{u} , \vec{u} soddisfino a condizioni iniziali nulle e stabiliamo la (11.4.18).

A tal fine consideriamo la convoluzione con \vec{u} di entrambi i membri della prima equazione dell'elastodinamica lineare di cui è soluzione la coppia (\vec{u}, \tilde{S}) ed

analogamente consideriamo la convoluzione con \vec{u} di entrambi i membri della prima equazione dell'elastodinamica lineare di cui è soluzione la coppia (\vec{u}, \vec{S}) :

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\vec{u}} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F} * \vec{u} + \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}, \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F} * \vec{u} + \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}.\end{aligned}\quad (11.4.31)$$

Consideriamo $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$:

$$\begin{aligned}(\ddot{\vec{u}} * \vec{u})(P_0, t) &= \int_0^t \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \ddot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \vec{u}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \vec{u}(P_0, t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= (\ddot{\vec{u}} * \vec{u})(P_0, t).\end{aligned}$$

Dunque le due equazioni (11.4.31) hanno uguali i primi membri per cui sono uguali anche i due secondi membri che integriamo su S_0 :

$$\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0. \quad (11.4.32)$$

Ma, per quanto visto nella dimostrazione della prima parte del teorema:

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0 \quad (11.4.33)$$

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0. \quad (11.4.34)$$

Se sostituiamo le (11.4.33) e (11.4.34) nella (11.4.32), deduciamo:

$$\begin{aligned}&\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0 = \\ &= \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0.\end{aligned}\quad (11.4.35)$$

Ma sempre nella prima parte della dimostrazione abbiamo dedotto:

$$\tilde{S} * \tilde{e} = \tilde{S} * \tilde{e},$$

per cui la (11.4.35) si riduce a :

$$\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma = \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma,$$

che è appunto la relazione (10.4.18) che ci proponevamo di dimostrare.

Il teorema di reciprocità è così provato in maniera completa.

Ora formuliamo il più generale problema ai limiti dell'elastodinamica lineare:
il **problema misto dell'elastodinamica lineare**.

Come abbiamo visto, l'elastodinamica lineare è governata dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

Se sostituiamo nella prima equazione la relazione sforzo deformazione, otteniamo una sola equazione avente come unica incognita vettoriale il campo dello spostamento:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0(\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (11.4.36)$$

All'equazione (11.4.36) associamo opportune condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{u}(P_0, 0) &= \vec{u}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0 \\ \dot{\vec{u}}(P_0, 0) &= \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0, \end{aligned} \quad (11.4.37)$$

cioè sono assegnati all'istante iniziale lo spostamento $\vec{u}_0(P_0)$ e la velocità $\vec{v}_0(P_0)$. Per quanto riguarda le condizioni al contorno, sono analoghe a quelle del problema misto dell'elastostatica lineare.

Siano $\partial_1 S_0$ e $\partial_2 S_0$ due porzioni di ∂S_0 che siano superfici regolari o unione di superfici regolari tali che

$$\partial_1 S_0 \cup \partial_2 S_0 = \partial S_0$$

e non abbiano punti in comune esclusi eventualmente punti del loro bordo.

All'equazione (11.4.36) associamo le due seguenti condizioni al contorno:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \cup (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{u} \quad (11.4.38)$$

$$\tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{f}_0, \quad (11.4.39)$$

dove \vec{u} e \vec{f}_0 sono campi vettoriali noti.

Il problema ai limiti (11.4.36), (11.4.37), (11.4.38), (11.4.39) è detto problema misto dell'elastodinamica lineare poiché su una parte della frontiera di S_0 è assegnato lo spostamento e sulla parte restante è assegnata la trazione superficiale. Se $\partial_1 S_0 = \partial S_0$ e $\partial_2 S_0 = \emptyset$, viene assegnato lo spostamento su tutta la frontiera di S_0 ed il problema ai limiti è detto **problema dell'elastodinamica lineare relativo al solo spostamento**.

Se viceversa $\partial_2 S_0 = \partial S_0$ e $\partial_1 S_0 = \emptyset$, viene assegnata su tutta la frontiera di S_0 la trazione ed il problema ai limiti è detto **problema dell'elastodinamica lineare relativo alla sola trazione**.

Il problema misto dell'elastodinamica lineare consiste nel determinare in S_0 il campo vettoriale $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ che è soluzione in S_0 dell'equazione (11.4.36) e soddisfa alle condizioni iniziali (11.4.37) ed alle condizioni al contorno (11.4.38), (11.4.39).

Ovviamente affinché il problema ammetta soluzione i dati iniziali e al contorno devono necessariamente soddisfare ad opportune condizioni di regolarità e compatibilità su cui non insistiamo.

Teorema 11.11. Teorema di unicità della soluzione del problema misto dell'elastodinamica lineare. *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico \tilde{c} goda della simmetria maggiore e sia semidefinito positivo. Se il problema misto dell'elastodinamica lineare relativo a tale solido ammette soluzione, questa è unica.*

Dimostrazione

Supponiamo che esistano due soluzioni \vec{u}_1 e \vec{u}_2 dello stesso problema misto e poniamo

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Vediamo di quali proprietà gode \vec{u} essendo differenza di due soluzioni dello stesso problema misto.

In primo luogo $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$ poiché lo sono \vec{u}_1 e \vec{u}_2 . Inoltre, essendo \vec{u}_1 e \vec{u}_2 soluzioni in S_0 della stessa equazione con la stessa densità delle forze esterne di massa, la loro differenza è soluzione in S_0 della corrispondente equazione omogenea, ossia:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \text{div}_0(\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}). \quad (11.4.40)$$

Inoltre \vec{u} soddisfa a condizioni iniziali omogenee:

$$\begin{aligned} \vec{u}(P_0, 0) &= \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0 \\ \dot{\vec{u}}(P_0, 0) &= \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0, \end{aligned} \quad (11.4.41)$$

e a condizioni al contorno omogenee:

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0} \\ \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (11.4.42)$$

Poiché il tensore degli sforzi di Piola-Kirchoff associato a \vec{u} è dato da $\tilde{S} = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}$, allora la coppia (\vec{u}, \tilde{S}) è soluzione delle due equazioni dell'elastodinamica lineare corrispondenti a forze di massa nulle, cioè:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \quad \text{in } S_0. \end{aligned}$$

Alla coppia (\vec{u}, \tilde{S}) , tenendo presenti le ipotesi del teorema, è applicabile il teorema della potenza e dell'energia, ossia avremo $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty))$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 \right] = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0, \quad (11.4.43)$$

dove abbiamo tenuto presente che $\vec{F} = \vec{0}$.

Ma

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 = \int_{\partial_1 S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 + \int_{\partial_2 S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 = 0, \quad (11.4.44)$$

poiché, a causa delle condizioni al contorno cui soddisfa \vec{u} :

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0} \implies \dot{\vec{u}} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} = \vec{0} \\ \vec{f}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pertanto la (11.4.43) si riduce a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 \right] = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (11.4.45)$$

Dalla (11.4.45) deduciamo:

$$\frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 = \text{costante} \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)).$$

Ma all'istante iniziale si ha

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{0} \implies \text{grad}_0 \vec{u}(P_0, 0) = \tilde{0} \implies \tilde{e}(P_0, 0) = \tilde{0} \quad \forall P_0 \in S_0$$

ed anche

$$\dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0$$

cosicché la somma dell'energia cinetica e dell'energia di deformazione elastica è nulla ad ogni istante. Si ha perciò:

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} dS_0 = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (11.4.46)$$

Ma $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)$

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 \geq 0$$

per definizione e

$$\int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} dS_0 \geq 0$$

perché \tilde{c} è semidefinito positivo (ossia $\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} \geq 0$ per ogni tensore doppio simmetrico $\tilde{\epsilon}$).

Poiché la (11.4.46) ci dice che la somma dei due integrali è uguale a 0, deduciamo che entrambi sono necessariamente nulli $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)$). In particolare abbiamo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (11.4.47)$$

Questo è l'integrale di un campo continuo e non negativo in S_0 per cui dalla (11.4.47) segue:

$$\rho \dot{\vec{u}}^2 = 0 \quad \text{in } S_0 \implies \dot{\vec{u}}^2 = 0 \implies \dot{\vec{u}} = \vec{0} \quad \text{in } S_0.$$

Perciò \vec{u} non dipende dal tempo e poiché all'istante iniziale è nullo in S_0 , concludiamo che

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{in } S_0 \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{in } S_0.$$

L'unicità è così provata.

Capitolo 12

Appendice

12.1 Definizione di spazio metrico

Definizione 12.1. Definiamo spazio metrico ogni coppia (X, d) dove X è un insieme diverso dall'insieme vuoto e d è un'applicazione che va da $X \times X$ a \mathbb{R}^+ con le seguenti proprietà:

- 1) $d(x, x_0) = 0 \iff x = x_0$;
- 2) $\forall x, x_0 \in X \quad d(x, x_0) = d(x_0, x)$;
- 3) $\forall x, x_0, x_1 \in X \quad d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0)$ (disuguaglianza triangolare).

L'applicazione d è detta metrica e $d(x, x_0)$ distanza tra x e x_0 .

12.2 Superfici regolari dello spazio geometrico

Definizione 12.2. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto, connesso, chiusura dell'aperto $\overset{\circ}{K}$. Definiamo superficie dello spazio geometrico l'applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi: K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (u, v) &\longmapsto P = \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Chiamiamo $\varphi(K)$ il sostegno della superficie e $\varphi(\partial K)$ bordo della superficie.

Sia $O \in \mathcal{E}$; allora $\forall P \in \varphi(K)$, abbiamo:

$$P - O = \varphi(u, v) - O =: \vec{r}_\varphi(u, v) \quad (u, v) \in K.$$

Il vettore posizione rispetto ad O dei punti del sostegno della superficie è una funzione vettoriale di due variabili reali definita in K .

Definizione 12.3. Diciamo che la superficie φ è regolare se:

1. $\varphi|_K$ è iniettiva
2. $\vec{r}_\varphi \in \mathcal{C}^1(K)$
3. $\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \neq \vec{0}$ in $\overset{\circ}{K}$ con $\frac{\partial P}{\partial u} := \frac{\partial \vec{r}_\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v} := \frac{\partial \vec{r}_\varphi}{\partial v}$.

Definizione 12.4. Siano φ, ψ due superfici regolari:

$$\begin{aligned} \varphi: K &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \psi: H &\longrightarrow \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Diciamo che φ e ψ sono equivalenti, cioè $\varphi \sim \psi$, se esiste un diffeomorfismo $\tau: K \longrightarrow H$ tale che $\varphi = \psi \circ \tau$.

Rispetto alla relazione di equivalenza introdotta potremo considerare le classi di equivalenza; se σ è una classe di equivalenza, diremo che $\varphi \in \sigma$ è una sua *rappresentazione parametrica*.

Si potrebbe dimostrare la seguente

Proposizione 12.1. Due superfici regolari sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno.

Ogni classe di equivalenza è allora individuata in maniera completa dal sostegno comune a tutte le superfici regolari equivalenti che stanno nella classe considerata. Per tale regione viene usato il termine *superficie* per indicare l'applicazione, la classe di equivalenza e il sostegno comune a tutte le rappresentazioni parametriche della stessa classe di equivalenza.

Definizione 12.5. Sia $\varphi: K \longrightarrow \mathcal{E}$ una superficie regolare. Definiamo area di φ lo scalare dato da

$$A(\varphi) = \int \int_K \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du dv. \quad (12.2.1)$$

Si può dimostrare che se $\varphi \sim \psi$, allora $A(\varphi) = A(\psi)$.

Definizione 12.6. Si definisce area della classe di equivalenza σ nell'insieme delle superfici regolari lo scalare

$$A(\sigma) = A(\varphi),$$

dove φ è una qualsiasi rappresentazione parametrica di σ .

Come detto in precedenza, usualmente si denota con σ anche il sostegno comune a tutte le superfici regolari che appartengono alla stessa classe di equivalenza e la sua area è data dalla (12.2.1) dove φ è una sua qualsiasi rappresentazione parametrica.

Definizione 12.7. *Data la superficie regolare σ (intesa come luogo di punti di \mathcal{E}), sia $\varphi: K \rightarrow \mathcal{E}$ una sua rappresentazione parametrica. Fissato il riferimento $[O, (\vec{e}_i)]$, si abbia:*

$$\vec{r}_\varphi(u, v) = x_i(u, v) \vec{e}_i \quad \forall (u, v) \in K.$$

Allora le tre equazioni:

$$x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (u, v) \in K$$

sono dette equazioni parametriche cartesiane della superficie σ .

Definizione 12.8. *Dato la superficie regolare σ (intesa come luogo di punti di \mathcal{E}), sia P un punto di σ non appartenente al bordo. Consideriamo tutti i cammini regolari sulla superficie passanti per P . Il piano contenente tutte le rette tangenti in P a tali cammini è detto piano tangente alla superficie in P . La retta passante per P e normale al piano tangente è detta retta normale alla superficie nel punto P .*

Si potrebbe dimostrare che i due versori di tale retta sono dati da

$$\vec{n}^\pm = \pm \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v}}{\left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right|}.$$

12.3 Richiami sugli spazi topologici

Definizione 12.9. *Dati un insieme $V \neq \emptyset$ e una famiglia di suoi sottoinsiemi \mathcal{I} , diciamo che (V, \mathcal{I}) è uno spazio topologico se sono soddisfatte tre condizioni:*

- 1) $V, \emptyset \in \mathcal{I}$;
- 2) $A, B \in \mathcal{I} \implies A \cap B \in \mathcal{I}$;
- 3) se $\{A_i\}_{i=1,2,..}$ è un'infinità numerabile di sottoinsiemi di V che stanno in \mathcal{I} , allora

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{I}.$$

I sottoinsiemi di V che stanno in \mathcal{I} sono detti *insiemi aperti*.

Dalla proprietà 3) segue immediatamente che

$$A, B \in \mathcal{I} \implies A \cup B \in \mathcal{I}.$$

Definizione 12.10. Un sottoinsieme B di V è detto *insieme chiuso* se

$$B = C(A)$$

dove $C(A)$ denota il complementare di A rispetto a V e A è un insieme aperto (cioè $A \in \mathcal{I}$).

Dalle leggi di de Morgan discende che:

- i) se B, C sono insiemi chiusi, allora anche $B \cup C$ e $B \cap C$ sono insiemi chiusi;
- ii) se $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$ è un'infinità numerabile di insiemi chiusi, allora $\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i$ è un insieme chiuso.

In genere, una volta precisata la famiglia \mathcal{I} , cioè la sua *topologia*, lo spazio topologico (V, \mathcal{I}) lo si denota semplicemente con V .

Come in uno spazio metrico, si danno le seguenti definizioni.

Definizione 12.11. Si definisce *intorno* di un punto $x \in V$ ogni insieme aperto $I \subset V$ contenente il punto x ; un punto $x \in V$ è detto *punto aderente* per l'insieme $A \subset V$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di A ; si dice che $x \in V$ è *punto di accumulazione* per l'insieme $A \subset V$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di A diverso da x . L'insieme dei punti aderenti per l'insieme A è detto *chiusura* di A ed è denotato con \overline{A} .

Si può dimostrare che gli insiemi chiusi sono gli unici sottoinsiemi di V che verificano la condizione di coincidere con la propria chiusura. Come nel caso di uno spazio metrico, \overline{A} è il più piccolo insieme chiuso che include A .

Ricordiamo che agli spazi topologici si può estendere la definizione di applicazione continua che si dà per uno spazio metrico.

Definizione 12.12. Si dice che l'applicazione f dallo spazio topologico V allo spazio topologico W è *continua nel punto* $x_0 \in V$ se per ogni intorno I_{y_0} del punto $y_0 = f(x_0)$ esiste un intorno J_{x_0} del punto x_0 tale che

$$f(J_{x_0}) \subset I_{y_0}.$$

L'applicazione f da V a W è detta *continua* se è continua in ogni punto $x \in V$.

Si potrebbero poi dimostrare i due teoremi seguenti che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 12.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione f dallo spazio topologico V allo spazio topologico W sia continua è che l'immagine inversa $f^{-1}(A)$ di ogni insieme aperto $A \subset W$ sia un insieme aperto (ovviamente in V).*

Teorema 12.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione f dallo spazio topologico V allo spazio topologico W sia continua è che l'immagine inversa $f^{-1}(B)$ di ogni insieme chiuso $B \subset W$ sia un insieme chiuso (ovviamente in V).*

12.4 Definizione di σ -algebra e misura

Definizione 12.13. *Dato l'insieme $V \neq \emptyset$, una famiglia \mathcal{A} di suoi sottoinsiemi è detta algebra dell'insieme V se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

- 1) $V \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A} \implies C(A) \in \mathcal{A}$
- 3) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Proposizione 12.2. *Se \mathcal{A} è un'algebra, allora si ha*

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

Dimostrazione

Proviamo prima i).

Per definizione di algebra, $V \in \mathcal{A}$ da cui

$$\emptyset = C(V) \in \mathcal{A}.$$

Proviamo ora ii).

$$A, B \in \mathcal{A} \implies C(A \cap B) = C(A) \cup C(B) \in \mathcal{A}.$$

Ma

$$A \cap B = CC(A \cap B) \in \mathcal{A}.$$

Definizione 12.14. L'algebra \mathcal{A} è detta σ -algebra se soddisfa all'ulteriore proprietà:

4) se $\{A\}_{i=1,2,\dots}$ è un'infinità numerabile di insiemi $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Per le leggi di De Morgan, se \mathcal{A} è una σ -algebra, anche l'intersezione di un'infinità numerabile di insiemi che stanno in \mathcal{A} sta in \mathcal{A} .

Definizione 12.15. La coppia (V, \mathcal{A}) dove V è un insieme diverso dall'insieme vuoto e \mathcal{A} è una σ -algebra di V è detta spazio misurabile ed ogni sottoinsieme di V che sta in \mathcal{A} è detto insieme misurabile.

Definizione 12.16. Dato un insieme $V \neq \emptyset$ e una sua σ -algebra \mathcal{A} , chiamiamo misura (σ -addittiva) per l'insieme V una qualsiasi applicazione M a valori reali non negativi definita su \mathcal{A} che gode delle due proprietà seguenti:

- $M(\emptyset) = 0$
- se $\{A\}_{i=1,2,\dots}$ è un'infinità numerabile di insiemi $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ disgiunti a due a due si ha

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} M(A_i).$$

La terna (V, \mathcal{A}, M) è detta spazio misura.

Un esempio ben noto di spazio misura è la terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ dove \mathcal{L} è la σ -algebra degli insiemi di \mathbb{R}^n misurabili secondo Lebesgue e m è la misura di Lebesgue.

Dalla definizione data di misura discende la seguente proposizione:

Proposizione 12.3. Se (V, \mathcal{A}, M) è uno spazio misura, la misura M gode della proprietà di finita additività, cioè

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \cap B = \emptyset \quad M(A \cup B) = M(A) + M(B).$$

Dimostrazione

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$ e poniamo $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$ per $i = 3, 4, \dots$

Per definizione di misura avremo

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = M(A) + M(B) + \sum_{i=3}^{+\infty} M(\emptyset) = M(A) + M(B).$$

Definizione 12.17. *Se V è uno spazio topologico, definiamo σ -algebra di Borel di V la σ -algebra minimale che contiene tutti gli insiemi aperti di V .*

La σ -algebra di Borel di V , essendo un'algebra, contiene anche tutti gli insiemi chiusi di V .

12.5 Modalità d'esame

L'esame si svolge con le seguenti modalità:

- (1) L'esame consiste della sola prova orale.
- (2) Non vengono fissati appelli periodici, ma gli studenti concordano direttamente via e-mail con la docente giorno ed ora della prova.
- (3) La prima domanda verte su un argomento scelto dal candidato che deve essere esposto nei dettagli.
- (4) Gli studenti che già posseggono le nozioni di base sul Calcolo Tensoriale e sulla Meccanica dei Continui contenute nel corso di EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA sono tenuti a scegliere l'argomento relativo alla prima domanda nell'ambito dei Capitoli 13, 14, 15, 16 non trattati a lezione.
- (5) Tutti gli altri studenti scelgono tale argomento nell'ambito di tutti i Capitoli, esclusi i Capitoli 1 e 2.
- (6) Le domande successive alla prima verteranno su tutto il programma svolto a lezione, ma non verranno richiesti dettagli dimostrativi.
- (7) Agli studenti del punto 5) verrà rivolta sicuramente una domanda relativa al Calcolo Tensoriale.

Capitolo 13

Equazioni di Navier-Stokes in coordinate curvilinee.

13.1 Sistemi di coordinate curvilinee.

Come abbiamo visto, il moto di un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo è governato dall'equazione di Navier-Stokes che ha carattere vettoriale e dall'equazione che esprime l'incomprimibilità che ha carattere scalare. Se consideriamo le rappresentazioni analitiche, in un riferimento cartesiano ortonormale, dei campi che intervengono nell'equazione di Navier-Stokes e nella condizione di incomprimibilità, otteniamo un sistema di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali, di cui le prime tre equivalgono all'equazione di Navier-Stokes vettoriale e sono chiamate equazioni di Navier-Stokes scalari. Tali equazioni sono non lineari e, a causa della non linearità, il problema differenziale che si ottiene associando al sistema le condizioni ai limiti è di difficile risoluzione. Tuttavia se la regione in cui si muove il fluido ha delle particolari proprietà geometriche, lo studio del moto può essere semplificato se si utilizzano, in luogo di coordinate cartesiane ortonormali, coordinate curvilinee, come ad esempio coordinate cilindriche o sferiche.

Lo scopo di questo capitolo è appunto quello di vedere quale forma assumono le tre equazioni di Navier-Stokes scalari e la condizione di incomprimibilità in coordinate curvilinee.

Nel primo paragrafo introduciamo ed approfondiamo il concetto di sistema di coordinate curvilinee.

Fissiamo in \mathcal{E} un riferimento cartesiano ortonormale $Oxyz$. (In questo capitolo, per motivi di convenienza, usiamo questa notazione per denotare un riferimento cartesiano in luogo di $Ox_1x_2x_3$, come nei capitoli precedenti.)

Ovviamente ogni punto $P \in \mathcal{E}$ è individuato univocamente mediante la terna

(x, y, z) delle sue coordinate. Ricordiamo che l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x, y, z) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo.

Dunque se S è un dominio (aperto e connesso) di \mathcal{E} , allora $\xi(S) =: S_\xi$ è un dominio di \mathbb{R}^3 e viceversa, se S_ξ è un dominio di \mathbb{R}^3 , allora $S = \xi^{-1}(S_\xi)$ è un dominio di \mathcal{E} .

Consideriamo ora un dominio $S \subset \mathcal{E}$; per quanto detto prima $S_\xi = \xi(S)$ è un dominio di \mathbb{R}^3 .

Supponiamo che sia definita in S_ξ l'applicazione Φ a valori in \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \Phi : S_\xi = \xi(S) \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) &\longmapsto (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

dove

$$q_1 = \Phi_1(x, y, z), \quad q_2 = \Phi_2(x, y, z), \quad q_3 = \Phi_3(x, y, z), \quad (13.1.1)$$

che gode delle proprietà seguenti

1. $\Phi_i \in C^1(S_\xi) \quad i = 1, 2, 3$
2. nel dominio S_ξ

$$\frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13.1.2)$$

Il determinante scritto sopra, com'è noto, è lo jacobiano delle funzioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 rispetto a x, y, z .

La condizione (13.1.2) assicura che, preso arbitrariamente $(x_0, y_0, z_0) \in S_\xi$, esiste in S_ξ un intorno di (x_0, y_0, z_0) tale che ogni (x, y, z) appartenente a tale intorno si può esprimere in funzione di q_1, q_2, q_3 , ossia esistono tre funzioni f, g, h tali che

$$x = f(q_1, q_2, q_3), \quad y = g(q_1, q_2, q_3), \quad z = h(q_1, q_2, q_3) \quad (13.1.3)$$

dove f, g, h sono definite in un intorno del punto (q_{10}, q_{20}, q_{30}) con

$$q_{i0} = \Phi_i(x_0, y_0, z_0) \quad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre in tale intorno $f, g, h \in C^1$ e

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \quad (13.1.4)$$

Si può mostrare infatti che gli jacobiani (13.1.2) e (13.1.4) soddisfano l'importante relazione

$$\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = 1. \quad (13.1.5)$$

Se l'applicazione Φ , oltre a soddisfare alle condizioni 1., 2., è iniettiva le equazioni (13.1.3) sono definite globalmente (cioè in tutto $\Phi(S_\xi)$) e non solo localmente.

Osserviamo che preso un punto $P \in S$, a questo resta associata una terna $(x, y, z) \in S_\xi$ (cioè la terna delle sue coordinate cartesiane). A sua volta alla terna (x, y, z) resta associata la terna $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$ con $q_i = \Phi_i(x, y, z)$. Viceversa presa una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$, a questa, tramite la (13.1.3), resta associata una terna $(x, y, z) \in S_\xi$ e d'altra parte questa individua un punto $P \in S$.

Dunque note le (13.1.1) ad ogni punto $P \in S$ resta associata una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$ che individua P univocamente. Per questo motivo (q_1, q_2, q_3) è detta terna delle **coordinate curvilinee** del punto $P \in S$.

Definizione 13.1. *Le (13.1.1) sono chiamate equazioni di una trasformazione di coordinate e definiscono un sistema di coordinate curvilinee in S . Le (13.1.3) sono le equazioni della trasformazione inversa.*

Dalla (13.1.5) segue che lo jacobiano di una trasformazione è il reciproco dello jacobiano della sua inversa.

Vediamo alcuni esempi di sistemi di coordinate curvilinee.

Esempio 13.1. Coordinate polari piane.

Quanto visto relativamente allo spazio geometrico \mathcal{E} si può ripetere se consideriamo un qualsiasi piano dello spazio geometrico.

Sia dato un piano $\Pi \subset \mathcal{E}$ e in tale piano fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale Oxy . Poniamo $S = \Pi \setminus \{O\}$ per cui $S_\xi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Preso un qualsiasi punto $P(x, y) \in S$, indichiamo con r la sua distanza dall'origine e con φ l'angolo che OP forma con il semiasse positivo Ox .

Come è facile verificare, $r \in (0, +\infty)$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$ si esprimono in funzione di x e y nel modo seguente:

$\forall (x, y) \in S_\xi$

$$r = \Phi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \Phi_2(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \quad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \quad y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, \quad y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

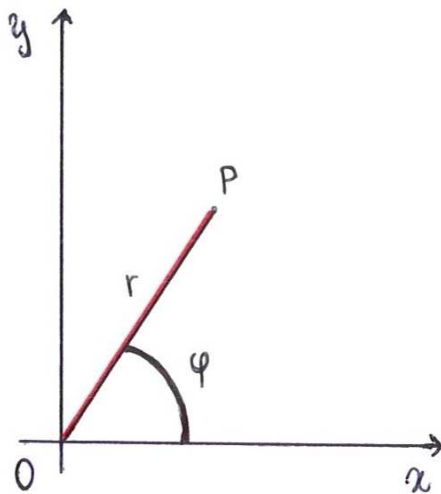


Figura 13.1: Coordinate polari piane

Si prova facilmente che $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$ ed inoltre in S_ξ

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

Esprimendo lo jacobiano tramite le coordinate polari piane, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Eccetto che nel punto di coordinate $(0, 0)$, la trasformazione ha un'inversa:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

definita per ogni $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$.

Tramite calcoli diretti si ottiene

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Esempio 13.2. Coordinate cilindriche.

Fissato nello spazio geometrico il riferimento cartesiano ortonormale $Oxyz$, poniamo $S = \mathcal{E} \setminus \{P \in 0z\}$ per cui $S_\xi = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Preso un qualsiasi punto $P(x, y, z) \in S$, indichiamo con

r la distanza da O del punto P^* proiezione ortogonale di P sul piano Oxy ,

φ l'angolo che OP^* forma con il semiasse positivo Ox ,

z la terza coordinata di P .

Allora $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$ si esprimono tramite (x, y, z) nel modo seguente:

$$\forall (x, y, z) \in S_\xi$$

$$\begin{aligned}r &= \Phi_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \Phi_2(x, y, z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, & y < 0, \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ z &= \Phi_3(x, y, z) = z.\end{aligned}$$

Come si verifica facilmente, $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$ e

$$\frac{\partial(r, \varphi, z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

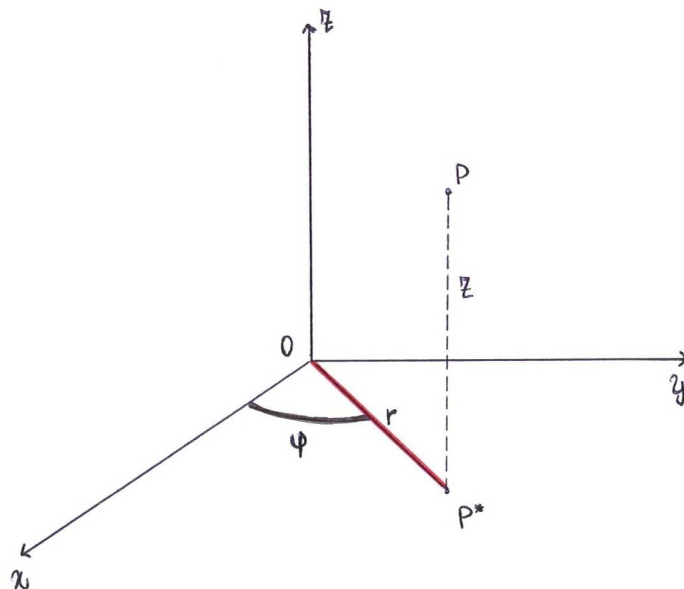


Figura 13.2: Coordinate cilindriche

In coordinate cilindriche lo jacobiano è dato da:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

La trasformazione inversa è data da

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z \end{aligned}$$

ed è definita per $(r, \varphi, z) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$.

Inoltre

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

Esempio 13.3. Coordinate sferiche.

Come nell'esempio 4.2, è stato fissato un riferimento $Oxyz$ nello spazio e preso $S = \mathcal{E} \setminus \{P \in 0z\}$ e $S_\xi = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Preso un punto $P(x, y, z) \in S$, indichiamo con

r la sua distanza dall'origine,

θ l'angolo che il vettore $(P - O)$ forma con il versore dell'asse Oz ,

φ l'angolo che OP^* (P^* = proiezione ortogonale di P sul piano Oxy) forma con il semiasse positivo Ox .

Come è facile verificare, $r \in (0, +\infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ si esprimono in funzione di x, y, z nel modo seguente

$\forall (x, y, z) \in S_\xi$

$$r = \Phi_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \Phi_2(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \Phi_3(x, y, z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, & y < 0. \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Le funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$ e si ha

$$\frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

Lo jacobiano utilizzando le coordinate sferiche si scrive come:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}.$$

La trasformazione inversa è data

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

definita in $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$.

Inoltre

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

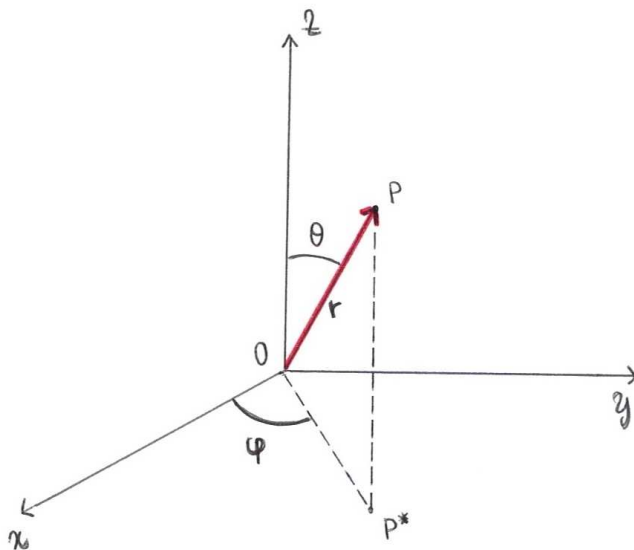


Figura 13.3: Coordinate sferiche

Osservazione 13.1. Nei tre esempi precedenti l'angolo φ si può far variare in $[-\pi, \pi)$ anzichè in $[0, 2\pi)$. In tal caso si deve modificare la relazione che esprime φ in funzione delle coordinate cartesiane, nel modo seguente

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0, & y \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & y > 0. \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Esaminiamo ora le caratteristiche di un sistema di coordinate curvilinee dal **punto di vista geometrico**.

A tal fine supponiamo di avere fissato nel dominio S un sistema di coordinate curvilinee definito dalla trasformazione (13.1.1) e consideriamo un punto P_0 con coordinate curvilinee (q_{10}, q_{20}, q_{30}) . Le equazioni

$$q_{10} = \Phi_1(x, y, z), \quad q_{20} = \Phi_2(x, y, z), \quad q_{30} = \Phi_3(x, y, z) \quad (13.1.6)$$

descrivono tre superfici nello spazio, ognuna delle quali passa per il punto P_0 . Queste superfici corrispondono ai tre piani coordinati $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ nel caso di un sistema di coordinate cartesiane dove (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate cartesiane di P_0 .

Chiamiamo le tre superfici descritte dalle (13.1.6) *superfici coordinate* che si intersecano nel punto P_0 . Così le trasformazioni di coordinate (13.1.1) definiscono tre famiglie di superfici ad un parametro; *le coordinate curvilinee di un punto rappresentano le tre superfici coordinate che si intersecano in quel punto.*

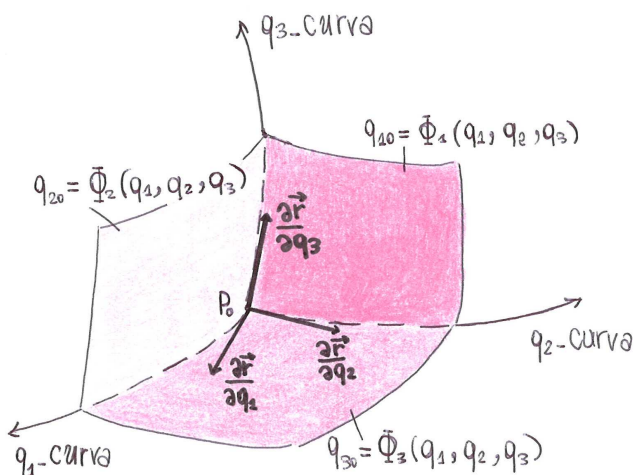


Figura 13.4: Coordinate curvilinee.

E' chiaro che due qualsiasi delle tre superfici coordinate si intersecano lungo un cammino, che chiamiamo *cammino coordinato* (in un sistema di coordinate cartesiane questo corrisponde ad un asse coordinato). Così, per esempio, le superfici $q_{20} = \Phi_2(x, y, z)$ e $q_{30} = \Phi_3(x, y, z)$ si intersecano lungo un cammino nei punti del quale varia solo q_1 . In particolare, chiamiamo questo cammino *cammino coordinato q_1* . Il *cammino coordinato q_2* e il *cammino coordinato q_3* sono definiti in modo simile e sono indicati in figura 13.4.

Dall'equazione (13.1.3), vediamo che il vettore posizione di un punto in termini delle sue coordinate curvilinee è dato da

$$\vec{r}^*(q_1, q_2, q_3) = f(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_x + g(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_y + h(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_z \quad (13.1.7)$$

con \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z versori degli assi Ox , Oy , Oz rispettivamente.

Ponendo $q_2 = c_2$ e $q_3 = c_3$, dove c_2 e c_3 sono costanti, otteniamo che

$$\vec{r} = \vec{r}^*(q_1, c_2, c_3)$$

è l'equazione vettoriale parametrica con parametro q_1 del cammino coordinato q_1 lungo il quale le due superfici coordinate $c_2 = \Phi_2(x, y, z)$, $c_3 = \Phi_3(x, y, z)$ si intersecano. Segue che la derivata $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}$ rappresenta il vettore tangente a tale cammino.

Con lo stesso ragionamento, osserviamo che $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}$ e $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$ rappresentano i vettori tangenti (indicati in figura 13.4) ai cammini coordinati q_2 e q_3 rispettivamente.

Dalla definizione di jacobiano e prodotto misto segue che

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}. \quad (13.1.8)$$

Ma per definizione di coordinate curvilinee, lo jacobiano nella (13.1.8) è diverso da zero e perciò anche il prodotto misto a secondo membro della (13.1.8) è $\neq 0$ in $\Phi(S_\xi)$, per cui i tre vettori tangenti $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$.

Ogni vettore può dunque essere decomposto rispetto a questa base.

Tuttavia, a differenza della base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, questa nuova base varia da punto a punto nello spazio. Per questa ragione chiamiamo $\left(\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}\right)$ una *base locale*. Più avanti normalizzeremo questi vettori di base.

D'ora in poi, assumiamo che le coordinate q_1, q_2, q_3 siano ordinate in modo tale che i vettori di base $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$, formino una terna destra. Allora lo jacobiano $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}$ è positivo in $\Phi(S_\xi)$.

Definizione 13.2. *Il sistema di coordinate curvilinee definito dalla (13.1.1) o dalla sua inversa (13.1.3) è detto ortogonale se $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$, ossia $\forall P \in S$, i vettori di base $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$ sono ortogonali a due a due.*

In questo caso le formule per il gradiente, la divergenza ed il rotore appaiono molto più simili a quelle che si hanno in un sistema di coordinate cartesiane. Le coordinate curvilinee più frequentemente usate sono ortogonali.

Se $\vec{r}^*(q_1, q_2, q_3)$ è il vettore posizione che indica la posizione di un punto in coordinate curvilinee, poniamo

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \right| \quad i = 1, 2, 3.$$

Riprendiamo gli esempi 2 e 3 di coordinate curvilinee.

Esempio 13.2. Coordinate cilindriche.

Le superfici coordinate che si intersecano nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sono:

- la superficie cilindrica circolare retta di raggio $r_0 = \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}$ avente come asse l'asse Oz ,
- il semipiano passante per l'asse Oz e formante con il semipiano coordinato Oxz , $x > 0$ l'angolo $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{r_0}$, $\sin \varphi_0 = \frac{y_0}{r_0}$,
- il piano di equazione $z = z_0$.

I cammini di intersezione tra le tre superfici coordinate, ossia i tre cammini coordinati passanti per P_0 , sono la semiretta passante per l'asse Oz e per il punto P_0 giacente sul piano $z = z_0$ (cammino coordinato r), la circonferenza passante per P_0 con centro sull'asse Oz e giacente sul piano $z = z_0$ (cammino coordinato φ) ed infine la retta parallela all'asse Oz passante per P_0 (cammino coordinato z).

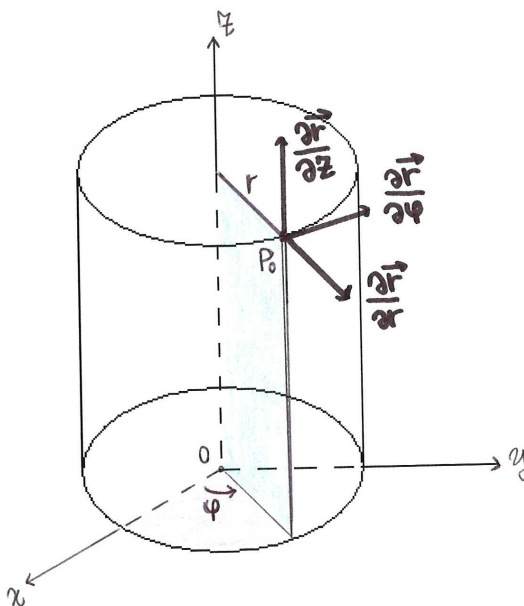


Figura 13.5: Coordinate cilindriche.

Il vettore posizione in coordinate cilindriche assume la forma

$$\vec{r}^*(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

cosicché i vettori tangenti ai cammini coordinati sono dati da

$$\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial r} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y ; \quad \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y ; \quad \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial z} = \vec{e}_z.$$

E' evidente che questi vettori sono mutuamente ortogonali in ogni punto di S . Quindi il sistema di coordinate cilindriche è un sistema ortogonale di coordinate curvilinee.

Inoltre

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = 1.$$

Esempio 13.3 Coordinate sferiche.

Le superfici coordinate che si intersecano nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sono

- la superficie sferica di raggio $r_0 = \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2 + (z_0)^2}$ e centro nell'origine,
- il cono con vertice nell'origine, avente come asse l'asse Oz e angolo generatore $\theta_0 = \arccos \frac{z_0}{r_0}$,
- il semipiano passante per l'asse Oz che forma con il semipiano Oxz , $x > 0$, l'angolo $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{y_0}{\sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}}.$$

I cammini di intersezione tra le tre superfici coordinate, ossia i tre cammini coordinati passanti per P_0 , sono la semiretta passante per l'origine e per il punto P_0 (cammino coordinato r), la semicirconferenza con centro l'origine che passa per P_0 e giace nel semipiano passante per l'asse Oz individuato dall'angolo φ_0 (cammino coordinato θ) ed infine la circonferenza passante per P_0 con centro sull'asse Oz e giacente sul piano $z = z_0$ (cammino coordinato φ).

Il vettore posizione in coordinate sferiche è dato da

$$\vec{r}^*(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z$$

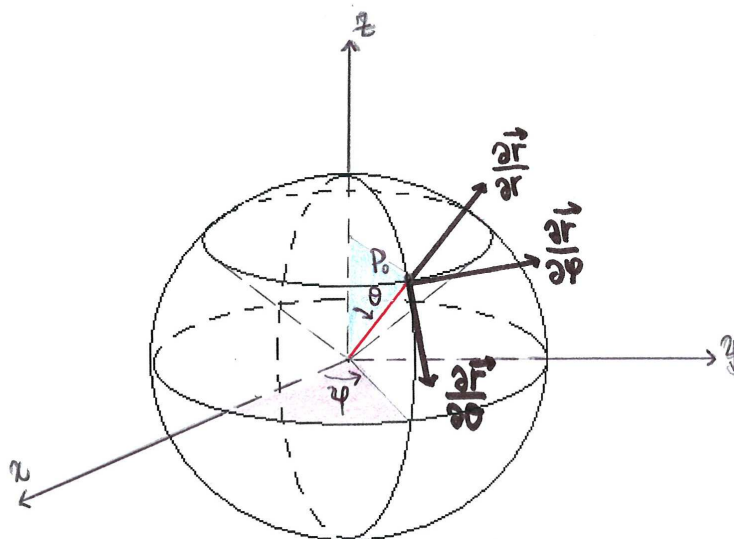


Figura 13.6: Coordinate sferiche.

per cui i vettori tangenti ai cammini coordinati sono

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che questi vettori sono mutuamente ortogonali così che il sistema di coordinate sferiche è un sistema ortogonale di coordinate curvilinee. Inoltre abbiamo

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta.$$

13.2 Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali.

Fissato nel dominio S di \mathcal{E} un sistema di coordinate curvilinee (q_1, q_2, q_3) definito dalle equazioni (13.1.1), supponiamo che le funzioni Φ_i ($1 \leq i \leq 3$) siano di classe $C^2(S_\xi)$.

Aggiungiamo anche l'ipotesi che la trasformazione inversa sia data globalmente da

$$x = f(q_1, q_2, q_3), \quad y = g(q_1, q_2, q_3), \quad z = h(q_1, q_2, q_3),$$

dove le funzioni f, g, h sono definite e di classe C^2 in $\Phi(S_\xi)$.

Assumiamo inoltre di aver ridenominato le coordinate in modo tale che lo jacobiano $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}$ sia positivo in $\Phi(S_\xi)$. Questo implica che i vettori di base $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$, in quest'ordine, formano una terna destra.

Ora il nostro scopo è di rappresentare gradiente di un campo scalare, divergenza e rotore di un campo vettoriale nel sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) che assumiamo sia ortogonale.

Poniamo

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad (13.2.1)$$

dove $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \right|$.

I vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formano una base ortonormale destra. Quindi si ha

$$\vec{e}_i = \vec{e}_j \times \vec{e}_k \quad (13.2.2)$$

dove (i, j, k) sono permutazioni cicliche (cioè gli indici i, j, k assumono rispettivamente i valori 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2).

Teniamo comunque presente che i versori \vec{e}_i variano da punto a punto a differenza dei versori associati al riferimento cartesiano ortonormale.

In ogni caso, essendo $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ due basi entrambe ortonormali, se \mathbb{A} è la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda, la matrice di passaggio dalla seconda alla prima è \mathbb{A}^T .

D'altra parte

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial g}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial g}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial g}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial h}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (13.2.3)$$

per cui

$$\mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial g}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial g}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial g}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial h}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (13.2.4)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \vec{e}_i \\ \vec{e}_y &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \vec{e}_i \\ \vec{e}_z &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

In ogni caso sia \mathbb{A} che \mathbb{A}^T variano al variare del punto che si considera in S . Possiamo anche scrivere immediatamente il legame che sussiste tra le componenti di un vettore \vec{u} rispetto alla base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e le sue componenti rispetto alla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Se

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3,$$

per formule ben note si ha

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (13.2.6)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (13.2.7)$$

Si noti che mentre u_x, u_y, u_z non dipendono dal punto, u_1, u_2, u_3 variano al variare del punto che si considera in S .

Poiché la base (\vec{e}_i) è ortonormale, in maniera analoga a quanto visto per un vettore, possiamo considerare le componenti di un qualsiasi tensore di ordine r con $r \in \mathbb{N}, r > 1$ rispetto a tale base e vedere come si esprimono tramite le

componenti rispetto alla base associata al riferimento cartesiano ortonormale, sfruttando la relazione con cui mutano le componenti di un tensore di ordine r al variare della base ortonormale. Anche in tal caso le componenti rispetto ad (\vec{e}_i) dipendono dal punto che si considera in S . Ma su ciò non insistiamo.

Osservazione 13.2. Per quanto riguarda la derivazione tensoriale in coordinate curvilinee di un campo tensoriale, anche nel caso da noi considerato in cui le coordinate sono ortogonali, questa risulta particolarmente complicata perché la base (\vec{e}_i) non è fissa, ma dipende dal punto. Ciò implica che in coordinate curvilinee, a differenza di quanto avviene in coordinate cartesiane ortonormali, la derivazione tensoriale non si riduce alla derivazione della rappresentazione analitica dei campi.

Comunque, poichè il nostro scopo è solo quello di vedere quale forma assumono in coordinate curvilinee ortogonali le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano, incompressibile ed omogeneo, non affronteremo il problema generale della derivazione tensoriale in coordinate curvilinee, ma ci limiteremo, con alcuni artifici, a stabilire come si esprimono in tali coordinate i vari termini che compaiono in tali equazioni.

Sia $F = F(P)$ un campo scalare differenziabile in un aperto $\widehat{S} \subset S$ e consideriamone la rappresentazione analitica nel riferimento cartesiano ortonormale $Oxyz$

$$F^\circ = F^\circ(x, y, z)$$

definita in $\widehat{S}_\xi = \xi(\widehat{S})$.

Poichè F è differenziabile in \widehat{S} , F° è differenziabile in \widehat{S}_ξ . Inoltre $\forall P \in \widehat{S}$ è definito il gradiente di F e precisamente

$$\text{grad } F(P) = \frac{\partial F^\circ}{\partial x}(x, y, z) \vec{e}_x + \frac{\partial F^\circ}{\partial y}(x, y, z) \vec{e}_y + \frac{\partial F^\circ}{\partial z}(x, y, z) \vec{e}_z, \quad (13.2.8)$$

dove (x, y, z) è la terna delle coordinate cartesiane di P .

D'altra parte P è anche individuato dalla terna (q_1, q_2, q_3) delle sue coordinate curvilinee. Indicata con $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base ortonormale associata nel punto P al sistema di coordinate curvilinee, potremo sempre decomporre $\text{grad } F(P)$ rispetto a tale base. Omettendo gli argomenti scriveremo

$$\text{grad } F = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3. \quad (13.2.9)$$

Il nostro scopo è di vedere come si esprimono le F_i .

Intanto osserviamo che, per le (13.1.3), possiamo introdurre la funzione F^* definita in $\Phi(\widehat{S}_\xi)$ nel modo seguente

$$F^*(q_1, q_2, q_3) = F^\circ(f(q_1, q_2, q_3), g(q_1, q_2, q_3), h(q_1, q_2, q_3)). \quad (13.2.10)$$

F^* può essere chiamata *rappresentazione analitica del campo scalare F nel sistema di coordinate curvilinee*.

Poichè $f, g, h \in C^2(\Phi(S_\xi))$ e F° è differenziabile in \widehat{S}_ξ , deduciamo che F^* è differenziabile in $\Phi(\widehat{S}_\xi)$ e

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_i} = \frac{\partial F^\circ}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial F^\circ}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.2.11)$$

per le formule di derivazione delle funzioni composte applicate a (13.2.10).

D'altra parte per la (13.2.6) abbiamo

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial F^\circ}{\partial x} \\ \frac{\partial F^\circ}{\partial y} \\ \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \end{bmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial F^*}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (13.2.12)$$

dove abbiamo tenuto presente la (13.2.11).

Infine, sostituendo le (13.2.12) nella (13.2.9), otteniamo la formula di rappresentazione del **gradiente di un campo scalare F nel sistema di coordinate curvilinee ortogonali** (q_1, q_2, q_3) :

$$\text{grad } F = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F^*}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F^*}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial F^*}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (13.2.13)$$

Nel seguito, una volta fissato il sistema di coordinate curvilinee, per brevità nelle rappresentazioni analitiche dei campi che si considerano ometteremo l'asterisco. Dunque possiamo scrivere la (13.2.13) nella forma seguente

$$\text{grad } F = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \vec{e}_3,$$

dove è evidente che al primo membro interviene il campo vero e proprio ed al secondo membro la sua rappresentazione analitica nel sistema di coordinate

curvilinee fissato.

Ora al fine di ricavare l'espressione della divergenza di un campo vettoriale in un sistema ortogonale di coordinate curvilinee, premettiamo alcune osservazioni.

Osserviamo dapprima che i campi vettoriali definiti in S mediante i tre vettori $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i}$, grazie alle proprietà di regolarità imposte al sistema di coordinate curvilinee ortogonali, sono di classe $\mathcal{C}^1(S)$ così come i tre campi scalari h_i . Ciò implica che anche i campi vettoriali individuati dai tre vettori \vec{e}_i appartengono alla stessa classe di regolarità.

Notiamo poi che l'applicazione che va da S a \mathbb{R} che ad ogni punto $P \in S$ associa la sua i -esima coordinata curvilinea q_i con $i = 1, 2, 3$ si può riguardare come un campo scalare che denotiamo con G_i . Tale campo scalare ha come rappresentazione analitica nel sistema di coordinate curvilinee appunto q_i e nel riferimento cartesiano $Oxyz$ la funzione Φ_i . Per le ipotesi fatte inizialmente, $G_i \in \mathcal{C}^2(S)$ per $i = 1, 2, 3$. Se applichiamo l'operatore gradiente a tale campo scalare nel sistema di coordinate curvilinee, otteniamo

$$\text{grad } G_i = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \delta_{ij} \vec{e}_j = \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Quindi, se teniamo presente che $\text{rot}(\text{grad } F) = \vec{0} \quad \forall F \in \mathcal{C}^2$, deduciamo

$$\text{rot grad } G_i = \text{rot} \left(\frac{\vec{e}_i}{h_i} \right) = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3. \quad (13.2.14)$$

Inoltre

$$\text{div} \left(\frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) = \text{div} \left(\frac{\vec{e}_j}{h_j} \times \frac{\vec{e}_k}{h_k} \right), \quad (13.2.15)$$

dove (i, j, k) sono permutazioni cicliche.

Usando la seguente proprietà della divergenza:

se \vec{u}, \vec{v} sono campi vettoriali differenziabili, allora

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v},$$

dalle (13.2.14) deduciamo

$$\text{div}(\text{grad } G_j \times \text{grad } G_k) = \text{grad } G_k \cdot \text{rot grad } G_j - \text{grad } G_j \cdot \text{rot grad } G_k = 0. \quad (13.2.16)$$

Ora sia $\vec{u} = \vec{u}(P)$ un campo vettoriale la cui rappresentazione analitica nelle coordinate q_1, q_2, q_3 sia la seguente:

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \quad (13.2.17)$$

in termini della base locale $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Assumiamo che \vec{u} sia differenziabile in \widehat{S} , per cui è definita la sua divergenza.

Si può verificare facilmente, tenendo presente la relazione con le componenti cartesiane, che u_i si può riguardare come un campo scalare differenziabile in \widehat{S} per $i = 1, 2, 3$.

Allora dalla (13.2.17) otteniamo

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} (u_1 \vec{e}_1) + \operatorname{div} (u_2 \vec{e}_2) + \operatorname{div} (u_3 \vec{e}_3). \quad (13.2.18)$$

Per calcolare ogni termine a secondo membro dell'equazione precedente, scriviamo

$$u_i \vec{e}_i = (u_i h_j h_k) \left(\frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $h_j h_k$, con (i, j, k) permutazioni cicliche. Applicando una nota proprietà della divergenza, deduciamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u_i \vec{e}_i) &= \operatorname{grad}(u_i h_j h_k) \cdot \left(\frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) + u_i h_j h_k \operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) \\ &= \operatorname{grad}(u_i h_j h_k) \cdot \left(\frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right), \end{aligned} \quad (13.2.19)$$

dove abbiamo usato le (13.2.15) e le (13.2.16).

Ma per la (13.2.13),

$$\operatorname{grad} (u_i h_j h_k) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial (u_i h_j h_k)}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial (u_i h_j h_k)}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial (u_i h_j h_k)}{\partial q_3} \vec{e}_3.$$

Poichè i vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono ortonormali, l'equazione (13.2.19) si riduce a

$$\operatorname{div} (u_i \vec{e}_i) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (u_i h_j h_k)}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

e con (i, j, k) permutazioni cicliche. Sostituendo nella (13.2.18) per $i=1, 2, 3$ otteniamo

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \quad (13.2.20)$$

che esprime la **divergenza di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee** (q_1, q_2, q_3) .

Se $\vec{u} = \text{grad } F$, dove F è un campo scalare dotato di gradiente secondo in \widehat{S} , per le (13.2.13) e (13.2.20), otteniamo:

$$\Delta F = \text{div grad } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \right] \quad (13.2.21)$$

che esprime il **laplaciano di un campo scalare nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee** (q_1, q_2, q_3) .

Ricaviamo poi l'espressione del rotore di un campo vettoriale \vec{u} differenziabile in \widehat{S} in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Tenendo presente che la sua rappresentazione analitica in termini della base locale (\vec{e}_i) è la seguente

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3,$$

otteniamo:

$$\text{rot } \vec{u} = \text{rot } (u_1 \vec{e}_1) + \text{rot } (u_2 \vec{e}_2) + \text{rot } (u_3 \vec{e}_3) \quad (13.2.22)$$

dove possiamo scrivere:

$$u_i \vec{e}_i = (u_i h_i) \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Per una proprietà del rotore e per la (13.2.14) ricaviamo:

$$\text{rot } (u_i \vec{e}_i) = \text{grad } (u_i h_i) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i} + (u_i h_i) \text{rot } \left(\frac{\vec{e}_i}{h_i} \right) = \text{grad } (u_i h_i) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i}. \quad (13.2.23)$$

D'altra parte

$$\text{grad } (u_i h_i) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial (u_i h_i)}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial (u_i h_i)}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial (u_i h_i)}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad i = 1, 2, 3.$$

Quindi calcolando il prodotto vettoriale che compare nella (13.2.23) per $i = 1, 2, 3$ e tenendo presente che (\vec{e}_i) è una base ortonormale destra, troviamo:

$$\begin{aligned} \text{rot } (u_1 \vec{e}_1) &= -\frac{\vec{e}_3}{h_2 h_1} \frac{\partial (u_1 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial (u_1 h_1)}{\partial q_3}; \\ \text{rot } (u_2 \vec{e}_2) &= \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\vec{e}_1}{h_3 h_2} \frac{\partial (u_2 h_2)}{\partial q_3}; \end{aligned}$$

$$\text{rot}(u_3 \vec{e}_3) = -\frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2}.$$

Sostituendo nel secondo membro della (13.2.22) si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{u} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \vec{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (13.2.24)$$

La (13.2.24) fornisce l'espressione del **rotore di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee** (q_1, q_2, q_3)

La (13.2.24) può essere anche scritta facendo uso di un determinante simbolico:

$$\text{rot } \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ u_1 h_1 & u_2 h_2 & u_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (13.2.25)$$

Ricaviamo infine l'espressione del laplaciano di un campo vettoriale in un sistema di coordinate curvilinee.

Sia dato il campo vettoriale \vec{u} che supponiamo di classe \mathcal{C}^2 in \widehat{S} .

Per calcolarne il laplaciano in coordinate curvilinee ortogonali, ricordiamo che, per una proprietà del laplaciano, possiamo scrivere:

$$\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}.$$

Poichè sappiamo come vengono espresse in coordinate curvilinee ortogonali le componenti del gradiente di un campo scalare e le componenti del rotore di un campo vettoriale, in primo luogo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{u})_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (\text{div } \vec{u}) - \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} [h_3 (\text{rot } \vec{u})_3] - \frac{\partial}{\partial q_3} [h_2 (\text{rot } \vec{u})_2] \right\} \\ (\Delta \vec{u})_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (\text{div } \vec{u}) - \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} [h_1 (\text{rot } \vec{u})_1] - \frac{\partial}{\partial q_1} [h_3 (\text{rot } \vec{u})_3] \right\} \\ (\Delta \vec{u})_3 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (\text{div } \vec{u}) - \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [h_2 (\text{rot } \vec{u})_2] - \frac{\partial}{\partial q_2} [h_1 (\text{rot } \vec{u})_1] \right\}. \end{aligned}$$

Se ora teniamo presenti la (13.2.20) e la (13.2.24), le relazioni precedenti forniscono:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{u})_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 &- \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} \quad (13.2.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{u})_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 &- \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} \quad (13.2.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{u})_3 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 &- \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\}. \quad (13.2.28)
 \end{aligned}$$

Le (13.2.26), (13.2.27), (13.2.28) rappresentano le componenti del laplaciano di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee (q_1, q_2, q_3) .

13.3 Equazioni di Navier-Stokes in diversi sistemi di coordinate curvilinee

Ora vogliamo, attraverso le formule ricavate nel paragrafo precedente, scrivere le equazioni di Navier-Stokes dapprima in un generico sistema ortogonale di coordinate curvilinee e poi in particolare in coordinate cilindriche e sferiche.

Ci limitiamo a considerare un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo per cui il suo moto è governato dalle due equazioni seguenti

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad } p \quad (13.3.1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (13.3.2)$$

La prima è l'equazione di Navier-Stokes vettoriale e la seconda è la condizione di incomprimibilità. ρ e μ sono costanti positive.

Supponiamo che il fluido si muova in una regione in cui sia fissato un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Ci proponiamo di scrivere la (13.3.2) e le componenti della (13.3.1) facendo intervenire le rappresentazioni analitiche dei campi \vec{v} , p , \vec{F} nel sistema di coordinate curvilinee. Come in precedenza, denotiamo tali rappresentazioni analitiche e le loro componenti senza aggiungere l'asterisco come apice.

Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è la base ortonormale locale associata al sistema di coordinate curvilinee nel generico punto della regione occupata dal fluido, avremo

$$\begin{aligned}\vec{v}(q_1, q_2, q_3, t) &= v_1(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_1 + v_2(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_2 + v_3(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_3, \\ p &= p(q_1, q_2, q_3, t), \\ \vec{F}(q_1, q_2, q_3, t) &= F_1(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_1 + F_2(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_2 + F_3(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la (13.3.2), si scrive immediatamente tenendo presente quanto ottenuto nel paragrafo precedente (equazione (13.2.20))

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] = 0. \quad (13.3.3)$$

Occupiamoci ora della (13.3.1).

Ricordiamo che per definizione di derivata materiale rispetto al tempo di un campo spaziale, si ha

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (13.3.4)$$

e vediamo di esprimere in una forma più conveniente il termine $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}$ che compare nella (13.3.4). Si può dimostrare la seguente relazione:

$$\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v}.$$

Dunque la (13.3.4), grazie a tale risultato, fornisce

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v}.$$

Tenendo presente come si esprime in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali il gradiente di un campo scalare otteniamo

$$\left(\text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} \right)_i = \frac{1}{h_i} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_i} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_i} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

Come abbiamo visto, le tre componenti di $\text{rot } \vec{v}$ sono:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \\ (\text{rot } \vec{v})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \\ (\text{rot } \vec{v})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned}$$

Se ricordiamo che (\vec{e}_i) è una base destra, avremo

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_1 &= (\text{rot } \vec{v})_2 v_3 - (\text{rot } \vec{v})_3 v_2 \\ &= \frac{v_3}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] - \frac{v_2}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right], \\ (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_2 &= (\text{rot } \vec{v})_3 v_1 - (\text{rot } \vec{v})_1 v_3 \\ &= \frac{v_1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] - \frac{v_3}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right], \\ (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_3 &= (\text{rot } \vec{v})_1 v_2 - (\text{rot } \vec{v})_2 v_1 \\ &= \frac{v_2}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] - \frac{v_1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right]. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo membro della (13.3.1) i termini $\rho \vec{F}$ e $\text{grad } p$ non presentano problemi, così come $\Delta \vec{v}$, poichè nel paragrafo precedente abbiamo visto quale forma assumono in coordinate curvilinee ortogonali le componenti del laplaciano di un campo vettoriale.

A questo punto, sfruttando tutti i risultati ottenuti, siamo in grado di scrivere in componenti l'equazione di Navier-Stokes in un qualsiasi sistema di coordinate curvilinee ortogonali. Precisamente abbiamo:

componente rispetto al vettore di base \vec{e}_1

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\rho}{h_1} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) + \rho \frac{v_3}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] + \\ &- \rho \frac{v_2}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] = \\ &= \rho F_1 + \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\ &- \frac{\mu}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\mu}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

componente rispetto al vettore di base \vec{e}_2

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\rho}{h_2} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_2} \right) + \rho \frac{v_1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] + \\
 & - \rho \frac{v_3}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] = \\
 & = \rho F_2 + \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 & - \frac{\mu}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\mu}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial q_2},
 \end{aligned}$$

componente rispetto al vettore di base \vec{e}_3

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \frac{1}{h_3} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_3} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_3} \right) + \rho \frac{v_2}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] + \\
 & - \rho \frac{v_1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] = \\
 & = \rho F_3 + \frac{\mu}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
 & - \frac{\mu}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\mu}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial q_3}.
 \end{aligned}$$

Particolarizziamo ora i risultati trovati nel caso delle coordinate cilindriche e delle coordinate sferiche, richiamando prima quelli relativi alle coordinate cartesiane ortonormali.

Coordinate cartesiane

1. Versori:

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

2. Vettore posizione \vec{r} :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

3. Vettore velocità \vec{v} :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

4. Gradiente del campo scalare F :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

5. Laplaciano del campo scalare F :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale \vec{v} :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

7. Rotore del campo vettoriale \vec{v} :

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

8. Laplaciano del campo vettoriale \vec{v} :

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

8. Condizione di incomprimibilità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

10. Equazioni di Navier-Stokes (con $\rho, \mu = \text{costanti} > 0$):

$$\begin{aligned} x: \quad \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho F_x + \mu \Delta v_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \quad \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho F_y + \mu \Delta v_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z + \mu \Delta v_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Coordinate cilindriche

1. Versori:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1\end{aligned}$$

2. Vettore posizione \vec{r}^* :

$$\vec{r}^* = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

3. Vettore velocità \vec{v} :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$$

4. Gradiente del campo scalare F :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

5. Laplaciano del campo scalare F :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale \vec{v} :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

7. Rotore del campo vettoriale \vec{v} :

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(v_\varphi r) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

8. Laplaciano del campo vettoriale \vec{v} .

Per quanto riguarda il laplaciano di \vec{v} , il calcolo non è così immediato come per gli altri operatori.

Se teniamo presenti le espressioni ottenute per le componenti di $\Delta \vec{v}$ in un

generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali, deduciamo:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \\
 &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} \\
 &= \Delta v_r - \frac{1}{r^2} \left[v_r + 2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi \partial z} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \\
 &= \Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2} \left[v_\varphi - 2 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v_r}{\partial z} - r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial z} \right] \\
 &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi \partial z} \\
 &= \Delta v_z
 \end{aligned}$$

9. Condizione di incomprimibilità:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

10. Equazioni di Navier-Stokes (con $\rho, \mu = \text{costanti}$):

$$\begin{aligned}
 r : \rho & \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi^2 \right) \right] = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\
 & + \mu \left[\Delta v_r - \frac{1}{r^2} \left(v_r + 2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 \varphi : \rho & \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r v_\varphi \right) \right] = \\
 & = \rho F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[\Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(v_\varphi - 2 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 z : \rho & \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z.
 \end{aligned}$$

Coordinate sferiche

1. Versori:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_r & = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\
 \vec{e}_\theta & = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\
 \vec{e}_\varphi & = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\
 h_1 & = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta
 \end{aligned}$$

2. Vettore posizione \vec{r}^* :

$$\vec{r}^* = r \vec{e}_r$$

3. Vettore velocità \vec{v} :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

4. Gradiente del campo scalare F :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

5. Laplaciano del campo scalare F :

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale \vec{v} :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi r) \right],$$

che si può scrivere nella forma:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

7. Rotore del campo vettoriale \vec{v} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_\theta r) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

8. Laplaciano del campo vettoriale \vec{v} :

Procedendo come nel calcolo di $\Delta \vec{v}$ per le coordinate cilindriche si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \left[\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_r + \\ &+ \left[\Delta v_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(v_\theta + 2 \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \left[\Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(v_\varphi - 2 \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - 2 \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

9. Condizione di incomprimibilità

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0,$$

10. Equazioni di Navier-Stokes (con $\rho, \mu = \text{costanti}$):

$$\begin{aligned} r: \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) &= \\ = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ \theta: \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) &= \\ = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(v_\theta + 2 \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ \varphi: \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) &= \\ = \rho F_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[\Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(v_\varphi - 2 \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - 2 \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Esercizio 1. Determinare gradiente e laplaciano sia in coordinate cartesiane ortonormali che in coordinate cilindriche del campo scalare $F = F(P)$ definito in \mathcal{E} la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane è data da:

$$F^0(x, y, z) = x^2 + y^2 + z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Risposta:

in coordinate cartesiane

$$\text{grad } F = 2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) + \vec{e}_z, \quad \Delta F = 4$$

in coordinate cilindriche

$$\text{grad } F = 2r \vec{e}_r + \vec{e}_z, \quad \Delta F = 4.$$

Esercizio 2. Determinare divergenza, rotore e laplaciano sia in coordinate cartesiane ortonormali che in coordinate cilindriche del campo vettoriale $\vec{v} = \vec{v}(P)$ definito in \mathcal{E} la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane è data da:

$$\vec{v}^0(x, y, z) = (x^2 + y^2) \vec{e}_x + z \vec{e}_z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Risposta:

in coordinate cartesiane

$$\text{div } \vec{v} = 2x + 1, \quad \text{rot } \vec{v} = -2y \vec{e}_z, \quad \Delta \vec{v} = 4 \vec{e}_x$$

in coordinate cilindriche

$$\text{div } \vec{v} = 2r \cos \varphi + 1, \quad \text{rot } \vec{v} = -2r \sin \varphi \vec{e}_z, \quad \Delta \vec{v} = 4(\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi).$$

Capitolo 14

Moti con un punto di ristagno per un fluido newtoniano

14.1 Premesse

Come abbiamo osservato più volte, i problemi ai limiti per l'equazione di Navier-Stokes sono di difficile risoluzione a causa della non linearità. Tuttavia in alcuni casi è possibile ottenere soluzioni analitiche o comunque numeriche ricorrendo a **trasformazioni di similarità** che riducono l'equazione di Navier-Stokes ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie più semplice da risolvere. Esempi importanti di moti ottenuti mediante trasformazioni di similarità sono i moti con un **punto di ristagno**, cioè i moti di fluidi che partendo dall'infinito si muovono verso un ostacolo.

In questo capitolo studieremo il moto stazionario piano sia ortogonale che obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtoniano, omogeneo ed incompressibile. Tale moto è caratterizzato dalla presenza sull'ostacolo di un punto di ristagno, cioè un punto in cui la velocità del fluido è nulla.

Facciamo alcune premesse sui moti piani stazionari piani. Supponiamo di avere un corpo continuo che si muove di moto stazionario (dal punto di vista cinematico) piano con piano direttore Ox_1x_2 . Allora $\vec{v} = \vec{v}(P)$ ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$$

con $v_1(x_1, x_2)$ e $v_2(x_1, x_2)$ funzioni definite su un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ che supponiamo essere la chiusura di un aperto.

Se poi assumiamo che il corpo continuo sia incompressibile, nell'ipotesi che le funzioni $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^1(D)$, la condizione di incompressibilità $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ in S

implica

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

A questo punto introduciamo la nozione di funzione di corrente.

Definizione 14.1. *Dato un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto piano stazionario, se $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^1(D)$, definiamo funzione di corrente la funzione $\psi = \psi(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2(D)$, tale che*

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \quad , \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Ovviamente la funzione di corrente è definita a meno di una costante arbitraria, del tutto inessenziale.

Se le componenti della velocità sono espresse mediante la funzione di corrente, la condizione di incomprimibilità è soddisfatta automaticamente. Infatti

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

poichè per le ipotesi su ψ sussiste il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione.

A questo punto ricordiamo che, per il teorema 2.3, dato un corpo continuo in moto stazionario nella regione S , se $f = f(P)$ è un campo stazionario di classe $\mathcal{C}^1(S)$, f è costante lungo ogni linea di flusso se e solo se $\dot{f} = 0$ in S , o equivalentemente $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = 0$ in S .

Se allora supponiamo di avere un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto piano stazionario, indicato con $\psi = \psi(P)$ il campo scalare definito in S avente come rappresentazione analitica la funzione di corrente ψ , per definizione di funzione di corrente otteniamo

$$\operatorname{grad} \psi \cdot \vec{v} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} v_2 = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0 \quad \text{in } S.$$

Dunque, per il teorema 2.3 e tenendo presente l'Osservazione 2.6, deduciamo che le linee di flusso sono cammini piani che giacciono su piani $x_3 = \text{costante}$ e sono il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3) \in S$ tali che

$$\psi(x_1, x_2) = C, \quad x_3 = C'$$

con C e C' costanti.

Per affrontare il problema del moto piano sia ortogonale che obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile considereremo dapprima l'analogo moto per un fluido perfetto incomprimibile.

14.2 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido perfetto incompressibile

Consideriamo un fluido perfetto, incompressibile ed omogeneo. Sia $Ox_1x_2x_3$ il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore. Supponiamo che il fluido durante il moto occupi la regione S al di sopra del piano di equazione $x_2 = 0$ per cui

$$S = \{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0 \}. \quad (14.2.1)$$

Assumiamo inoltre che il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico e che avvenga in assenza di forze esterne di massa.

Abbiamo dunque:

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{F} = \vec{0}.$$

Di conseguenza, l'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti,

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p,$$

per le ipotesi fatte sul fluido e sul moto, si riduce a:

$$\rho \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p \quad (14.2.2)$$

dove ρ è una costante positiva.

A quest'equazione dobbiamo associare la condizione di incompressibilità

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (14.2.3)$$

Se assumiamo che la frontiera del semispazio occupata dal fluido sia una parete materiale rigida e fissa rispetto all'osservatore, aggiungiamo alle due equazioni precedenti la condizione al contorno di impenetrabilità:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{x_2=0} = 0 \quad (14.2.4)$$

dove \vec{n} è il versore normale al piano di equazione $x_2 = 0$, rivolto verso l'esterno di S .

Poichè

$$\vec{n} = -\vec{e}_2$$

la (14.2.4) fornisce

$$v_2|_{x_2=0} = 0.$$

Ora, per il moto piano con un punto di ristagno per un fluido perfetto, che si muove verso la parete piana di equazione $x_2 = 0$ perpendicolarmente ad essa il campo della velocità ha la rappresentazione analitica di componenti:

$$v_1 = a x_1, \quad v_2 = -a x_2, \quad v_3 = 0 \quad (14.2.5)$$

con a costante positiva.

Osserviamo che questo moto presenta sull'ostacolo, costituito dalla parete piana, un punto di ristagno nell'origine O poiché in tale punto le tre componenti della velocità v_1, v_2, v_3 sono nulle.

Inoltre si tratta di un **moto potenziale**, dal momento che il campo della velocità \vec{v} proviene da un potenziale cinetico $\gamma = \gamma(P)$.

Precisamente si ha:

$$\vec{v} = \text{grad } \gamma,$$

dove

$$\gamma(P) = \frac{a}{2}(x_1^2 - x_2^2), \quad \forall P(x_1, x_2, x_3) \in S. \quad (14.2.6)$$

E' immediato verificare che il campo della velocità così definito soddisfa la condizione di incomprimibilità e la condizione al contorno. Resta da determinare il campo della pressione in modo tale che (\vec{v}, p) soddisfi l'equazione

$$\rho \text{ grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p.$$

Ma possiamo osservare che, trattandosi di un fluido perfetto, incomprimibile ed omogeneo, soggetto a forze esterne di massa identicamente nulle ($\vec{F} = \vec{0}$) con il campo della velocità \vec{v} proveniente da un potenziale cinetico γ , ed essendo il moto stazionario dal punto di vista meccanico, sono soddisfatte le ipotesi del **II teorema di Bernoulli**. Perciò si ha:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{costante in } S$$

ovvero

$$p = \text{costante} - \frac{\rho \vec{v}^2}{2}.$$

Tenendo conto dell'espressione di \vec{v} , deduciamo :

$$p = \text{costante} - \rho \frac{a^2}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Assumeremo come costante la pressione nel punto di ristagno, e la indicheremo con p_0 .

Abbiamo perciò:

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (14.2.7)$$

dove $p = p(x_1, x_2)$ è la pressione in un punto arbitrario $P = P(x_1, x_2, x_3) \in S$. Osserviamo che la pressione assume il suo valore massimo nel punto di ristagno.

Ci proponiamo infine di determinare le linee di flusso per il moto sopra considerato. Per determinarle possiamo seguire due strade.

Rifacciamoci dapprima alla definizione di linee di flusso. Perciò dobbiamo procurarci le curve $P(\lambda)$ che sono soluzioni massimali dell'equazione del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P)$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

le cui incognite sono le tre funzioni $x_1 = x_1(\lambda)$, $x_2 = x_2(\lambda)$, $x_3 = x_3(\lambda)$.

Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = ax_1 \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -ax_2 \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \end{cases} \quad (14.2.8)$$

Questo sistema è formato da tre equazioni disaccoppiate del I ordine lineari, a coefficienti costanti, omogenee. La sua soluzione generale è

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{a\lambda} \\ x_2 &= C_2 e^{-a\lambda} \\ x_3 &= C_3 \end{aligned}$$

con C_1, C_2, C_3 costanti arbitrarie e $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

Quindi le equazioni cartesiane parametriche con parametro λ delle linee di flusso sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{a\lambda} \\ x_2 &= C_2 e^{-a\lambda} \\ x_3 &= C_3 \quad \forall \lambda \in (-\infty; +\infty). \end{aligned} \quad (14.2.9)$$

In corrispondenza di ogni terna $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$, con $C_2 \geq 0$ (perchè abbiamo assunto per ipotesi che il fluido si muova rimanendo nella regione dello spazio al di sopra del piano $x_2 = 0$), otteniamo una singola linea di flusso.

Osserviamo che le linee di flusso sono cammini piani che giacciono su piani paralleli al piano Ox_1x_2 . Le linee di flusso con $C_3 = 0$ stanno sul piano Ox_1x_2 .

Inoltre le linee di flusso corrispondenti a $C_1 \neq 0$ e $C_2 = 0$ sono cammini rettilinei paralleli all'asse Ox_1 . Se poi $C_3 = 0$, allora le linee di flusso coincidono con il semiasse positivo o il semiasse negativo Ox_1 a seconda che C_1 sia > 0 o < 0 .

Se $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$ le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli al semiasse positivo Ox_2 . Se in più $C_3 = 0$, allora le linee di flusso coincidono con il semiasse positivo Ox_2 .

Se $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Infine nel caso $C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$ possiamo eliminare dal sistema (14.5.5) il parametro λ , usando la seconda equazione parametrica del sistema, ossia:

$$e^{-a\lambda} = \frac{x_2}{C_2}$$

che è equivalente a:

$$e^{a\lambda} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (14.5.5) deduciamo:

$$x_1 = C_1 \frac{C_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 = C_1 C_2 \quad \text{cioè } x_1 x_2 = \text{costante}.$$

Se poi teniamo presente che $x_3 = C_3$, concludiamo che le linee di flusso corrispondenti a $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ sono rami di iperboli che giacciono su piani di equazione $x_3 = \text{costante}$.

Alla stessa conclusione possiamo pervenire determinando, per il moto che stiamo considerando, la funzione di corrente $\psi(x_1, x_2)$.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a x_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a x_1 \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene:

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 x_2 + \Psi(x_2)$$

con $\Psi(x_2)$ funzione arbitraria.

Dalla seconda equazione deduciamo

$$ax_1 + \Psi'(x_2) = ax_1,$$

da cui

$$\Psi(x_2) = \text{costante}.$$

Se prendiamo la costante nulla, otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = ax_1x_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \geq 0.$$

Per quanto visto nel paragrafo precedente, deduciamo che le linee di flusso sono cammini piani giacenti sui piani $x_3 = \text{costante}$ tali che

$$\begin{aligned} ax_1x_2 &= C & \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \geq 0 \\ x_3 &= C'. \end{aligned}$$

Se $C = 0$, otteniamo che le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli all'asse Ox_1 o paralleli al semiasse positivo Ox_2 . In particolare, se $C' = 0$, le linee di flusso coincidono con l'asse Ox_1 o col semiasse positivo Ox_2 .

Se $C \neq 0$, le linee di flusso sono rami di iperbole che giacciono sui piani $x_3 = \text{costante}$.

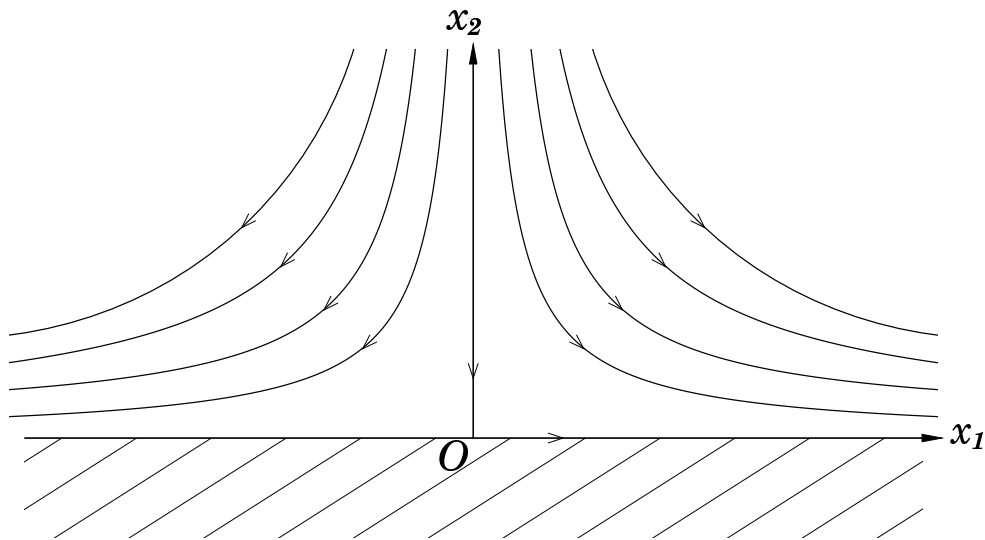


Figura 14.1: Linee di flusso nel piano Ox_1x_2

In conclusione, in questo paragrafo abbiamo considerato un esempio di moto potenziale piano per un fluido perfetto, incompressibile ed omogeneo. Il fluido si muove partendo dall'asse Ox_2 e andando contro il piano $x_2 = 0$. Il fluido in prossimità della parete si divide in due flussi e prosegue in entrambe le direzioni.

14.3 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile: impostazione del problema

Affronteremo ora lo studio del moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo.

Fissiamo il riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$. Assumiamo ancora che il liquido reale che schematizziamo con questo modello di fluido parta dall'infinito e si muova verso la parete piana, fissa, rigida di equazione $x_2 = 0$, perpendicolarmente ad essa. Il moto sia piano, con piano direttore Ox_1x_2 .

La regione S occupata dal fluido sia il semispazio al di sopra del piano $x_2 = 0$ per cui

$$S = \{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0 \}.$$

Supponiamo che il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico e avvenga in assenza di forze esterne di massa. Abbiamo perciò

$$\vec{v} = \vec{v}(P), p = p(P), \vec{F} = \vec{0}.$$

Le equazioni che governano il moto del fluido sono:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \nu \Delta \vec{v} - \text{grad } \frac{p}{\rho}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

Alle equazioni (14.3.1) va poi associata la condizione al contorno di aderenza per \vec{v} :

$$\vec{v}|_{x_2=0} = \vec{0}. \quad (14.3.2)$$

Studiare il problema del moto consiste, quindi, nel determinare in S la coppia (\vec{v}, p) soddisfacente alle due equazioni scritte sopra ed alla condizione al contorno di aderenza tali che $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(S)$.

Per il moto piano ortogonale con un punto di ristagno di un fluido perfetto abbiamo visto che la velocità ha le componenti date da:

$$v_1 = a x_1 \quad v_2 = -a x_2 \quad v_3 = 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \geq 0$$

con a costante e la pressione è fornita dall'equazione di Bernoulli

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Come è facile verificare, la coppia (\vec{v}, p) con \vec{v}, p definite nel modo detto sopra, soddisfa il sistema (14.3.1) che governa il moto del fluido newtoniano, ma non

verifica la condizione di aderenza (14.3.2), poiché la prima componente della velocità, v_1 , è non nulla sulla parete $x_2 = 0$.

Dobbiamo allora modificare questa soluzione per prendere in considerazione l'effetto della viscosità espresso dalla condizione di aderenza.

Cerchiamo quindi una soluzione avente un campo della velocità \vec{v} la cui rappresentazione analitica abbia le componenti della forma:

$$v_1 = a x_1 f'(x_2), \quad v_2 = -a f(x_2), \quad v_3 = 0, \quad (14.3.3)$$

dove $f = f(x_2)$ è una funzione da determinarsi sufficientemente regolare.

Le (14.3.3) rappresentano le equazioni della trasformazione di similarità poiché, come vedremo, consentono di ricondurre lo studio del moto ad un'equazione differenziale ordinaria.

Osserviamo che v_1, v_2, v_3 sono tali che è soddisfatta la condizione di incomprimibilità. Infatti

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = a f'(x_2) - a f'(x_2) = 0.$$

Si devono cercare, allora, una funzione $f = f(x_2)$ definita per $x_2 \geq 0$ e una funzione $p = p(x_1, x_2, x_3)$ definita per $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}$ e $x_2 \geq 0$ tali che sia soddisfatta l'equazione di Navier-Stokes e che sia verificata la condizione di velocità nulla su $x_2 = 0$.

Inoltre poiché, come si desume dall'esperienza, la viscosità del fluido si manifesta in maniera rilevante solo in una regione adiacente alla parete, f e p devono essere tali che per $x_2 \rightarrow +\infty$ il fluido newtoniano si comporti come un fluido perfetto incomprimibile omogeneo di uguale densità. Così richiediamo

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad (14.3.4)$$

affinchè sia soddisfatta la condizione di aderenza alla parete;

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1, \quad (14.3.5)$$

affinchè all'infinito il moto del fluido newtoniano abbia lo stesso andamento del moto con un punto di ristagno per un fluido perfetto, incomprimibile ed omogeneo.

La condizione (14.3.5) implica

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} v_1 = a x_1,$$

mentre per v_2 possiamo soltanto concludere che

$$v_2 \sim -a x_2 \quad \text{per } x_2 \rightarrow +\infty$$

poichè, come si verifica facilmente con la regola di de L'Hôpital, se $f'(x_2) = 1$ per $x_2 \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \frac{f(x_2)}{x_2} = 1,$$

ossia $f \sim x_2$ per $x_2 \rightarrow +\infty$.

In realtà, come vedremo successivamente dalla risoluzione numerica del problema, esiste una costante A non nulla tale che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A.$$

Dunque, per $x_2 \rightarrow +\infty$, il moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo ha lo stesso andamento del moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo di uguale densità che si muove non verso la parete di equazione $x_2 = 0$, bensì di equazione $x_2 = A$.

Tenendo presente che le componenti di \vec{v} sono date dalle (14.3.3), scriviamo l'equazione di Navier-Stokes in componenti:

$$v_{i,j} v_j = \nu v_{i,jj} - \frac{p_{,i}}{\rho}.$$

Per $i = 1$ si ha:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 = \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1},$$

ossia

$$a^2 x_1 f'^2 - a^2 x_1 f f'' = a \nu x_1 f''' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}. \quad (14.3.6)$$

Per $i = 2$ si deduce:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 = \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2},$$

ossia

$$a^2 f f' = -a \nu f'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}. \quad (14.3.7)$$

Per $i = 3$ si ottiene

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

da cui

$$p = p(x_1, x_2).$$

Nelle due prime equazioni scritte sopra compare la pressione $p(x_1, x_2)$ che è incognita. Ma dalla (14.3.7) otteniamo

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho a^2 f f' - \rho a \nu f''$$

che, integrata rispetto a x_2 , fornisce:

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} f^2(x_2) - \rho a \nu f'(x_2) + P(x_1), \quad (14.3.8)$$

con $P(x_1)$ funzione arbitraria.

Tale funzione si può determinare ricordando che per $x_2 \rightarrow +\infty$ la pressione deve essere equivalente alla pressione per il moto piano ortogonale con un punto di ristagno di un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo di densità ρ .

Dunque

$$p \sim p_0 - \rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{per } x_2 \rightarrow +\infty.$$

Possiamo valutare la (14.3.8) per $x_2 \rightarrow +\infty$, tenendo presente che

$$\text{per } x_2 \rightarrow +\infty : f'(x_2) \rightarrow 1 \Rightarrow f(x_2) \sim x_2,$$

e poi confrontare l'equazione che otteniamo con l'equazione di Bernoulli. Troveremo due espressioni della pressione che valgono per $x_2 \rightarrow +\infty$. Eguagliandole determiniamo la funzione $P(x_1)$.

Valutando la (14.3.8) per $x_2 \rightarrow +\infty$, si ha:

$$p \sim -\rho \frac{a^2}{2} x_2^2 - \rho a \nu + P(x_1).$$

Confrontando questa con l'equazione di Bernoulli, otteniamo:

$$p_0 - \rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) = -\rho \frac{a^2}{2} x_2^2 - \rho a \nu + P(x_1),$$

da cui

$$P(x_1) = p_0 + \rho a \nu - \rho \frac{a^2}{2} x_1^2. \quad (14.3.9)$$

Sostituendo la (14.3.9) nella (14.3.8) si deduce:

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} x_1^2 - \rho \frac{a^2}{2} f^2 + \rho a \nu (1 - f').$$

che possiamo scrivere come

$$p = p_0 - \rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + f^2) - \rho a \nu f'$$

avendo indicato per brevità ancora con p_0 la costante $p_0 + \rho a \nu$.

Notiamo che la nuova costante p_0 rappresenta il valore della pressione nel punto di ristagno ed è il valore massimo che la pressione assume sulla parete $x_2 = 0$.

Ora possiamo calcolare $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ che compare nella (14.3.6)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho a^2 x_1.$$

Quindi la (14.3.6) si riduce a

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0. \quad (14.3.10)$$

A tale equazione si devono poi associare le condizioni al contorno (14.3.4), (14.3.5).

Dunque il problema del moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano omogeneo ed incomprimibile è ricondotto al problema differenziale ordinario (14.3.10), (14.3.4), (14.3.5).

I risultati ottenuti si possono riassumere nel seguente teorema:

Teorema 14.1. *Dato un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, il moto piano con un punto di ristagno di tale fluido, che si muove verso la parete $x_2 = 0$, rigida e fissa, perpendicolarmente ad essa, ha la forma seguente:*

$$\vec{v} = ax_1 f'(x_2) \vec{e}_1 - af(x_2) \vec{e}_2$$

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + f^2(x_2)] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0$$

con p_0 costante, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ e f soddisfa il seguente problema

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1.$$

La (14.3.10) è un'equazione differenziale ordinaria non lineare, del terzo ordine ed il problema (14.3.10), (14.3.4), (14.3.5) non è risolubile mediante funzioni elementari, ma solo numericamente. Sono comunque noti teoremi di esistenza ed unicità del problema, come vedremo nel paragrafo successivo.

14.4 Moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano : risultati analitici e numerici

In primo luogo, scriviamo in una forma più opportuna e precisamente **in forma adimensionale** la (14.3.10):

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0.$$

Ciò ci consentirà di eliminare il parametro materiale $\frac{\nu}{a}$.

Se esaminiamo le dimensioni fisiche di a , f , ν , $\left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$, come è facile verificare, queste sono:

$$[a] = t^{-1}, \quad [f] = l, \quad [\nu] = l^2 t^{-1}, \quad \left[\left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = l^{-1}.$$

Allora poniamo:

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_2 & (14.4.1) \\ \phi(\eta) &= \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} f \left[\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \eta \right]. \end{aligned}$$

La nuova variabile η e la nuova funzione $\phi(\eta)$ sono adimensionali. Tenendo presente che:

$$f(x_2) = f \left[\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \eta \right] = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(\eta),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= \phi'(\eta), \\ f''(x_2) &= \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \phi''(\eta), \\ f'''(x_2) &= \frac{a}{\nu} \phi'''(\eta), \end{aligned}$$

dove, per semplicità, indichiamo con l'apice anche la derivata di ϕ rispetto a η .

Grazie a tali risultati l'equazione (14.3.10) si riduce a:

$$\phi''' + \phi \phi'' - \phi'^2 + 1 = 0, \quad (14.4.2)$$

nota come **equazione di Hiemenz**. All'equazione (14.4.2) vanno poi associate le condizioni al contorno sulla parete e per $x_2 \rightarrow +\infty$.

L'equazione (14.4.2) trae il suo nome da K. Hiemenz che per la prima volta nel 1911 risolse numericamente il problema nella sua tesi di laurea.

Sulla parete, dove $x_2 = 0$, avevamo imposto come condizioni al contorno $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Se lavoriamo con la variabile adimensionale η e la funzione adimensionale ϕ , queste condizioni si riscrivono come:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0. \quad (14.4.3)$$

Per $x_2 \rightarrow +\infty$ è richiesto $f'(x_2) \rightarrow 1$. Nella nuova variabile η e per la nuova funzione ϕ , questa condizione assume la forma:

$$\phi'(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow +\infty. \quad (14.4.4)$$

Abbiamo dunque ottenuto un'equazione differenziale ordinaria non lineare del III ordine, (14.4.2), adimensionale cui sono associate tre condizioni al contorno, date da (14.4.4) e (14.4.3), pure adimensionali.

La soluzione del problema (14.4.2), (14.4.4), (14.4.3) non si può trovare in termini di funzioni elementari.

Tuttavia tale problema è un sottocaso del seguente problema differenziale più generale:

$$\phi''' + \phi \phi'' + \lambda (1 - \phi'^2) = 0, \quad (14.4.5)$$

con le condizioni al contorno

$$\phi(0) = \alpha, \quad \phi'(0) = \beta, \quad \phi'(\infty) = 1, \quad (14.4.6)$$

dove λ , α , β sono costanti.

L'equazione (14.4.5) è nota come **equazione di Falkner-Skan**.

Nel nostro caso particolare, abbiamo:

$$\lambda = 1, \quad \alpha = \beta = 0.$$

Per tale problema esistono alcuni risultati di esistenza ed unicità della soluzione. Riportiamo qui i teoremi più significativi.

Teorema 14.2. *Sia $\lambda > 0$, $-\infty < \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < 1$. Allora esiste una e una sola soluzione $\phi(\eta)$ di (14.4.5), (14.4.6) tale che*

$$0 < \phi'(\eta) < 1 \quad \text{per} \quad 0 < \eta < \infty.$$

Inoltre la soluzione soddisfa la condizione:

$$\phi''(\eta) > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \eta < \infty.$$

Una dimostrazione del teorema precedente, che omettiamo, è dovuta a Coppel (1960). Successivamente nel 1970 K. Kuen Tam provò l'esistenza di almeno una soluzione del problema senza assumere la condizione: $0 < \phi'(\eta) < 1$ nell'ipotesi $\alpha = \beta = 0$.

Teorema 14.3. *L'equazione differenziale (14.4.5) soggetta alle condizioni (14.4.3), (14.4.4) ha almeno una soluzione.*

Notiamo che il Teorema 14.3 non fornisce l'unicità della soluzione. Craven e Peletier nel 1972 hanno dimostrato l'unicità nel caso $\alpha = \beta = 0$, eliminando le ipotesi sul segno di ϕ' .

Una volta determinata la funzione $\phi(\eta)$, la soluzione completa del problema del moto è:

$$\begin{aligned} v_1 &= a x_1 f'(x_2) = a x_1 \phi'(\eta) \\ v_2 &= -a f(x_2) = -a \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(\eta) = -(a\nu)^{\frac{1}{2}} \phi(\eta) \\ p &= -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + f^2(x_2)] + p_0 \\ &= -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1^2 + \frac{\nu}{a} \phi^2(\eta) \right] - \rho a \nu \phi'(\eta) + p_0. \end{aligned}$$

Come abbiamo già detto in precedenza, la soluzione numerica del problema differenziale (14.4.2), (14.4.4), (14.4.3) è stata data per la prima volta nel 1911 nella tesi di laurea da Hiemenz (questo moto infatti è noto anche come moto di Hiemenz), e più tardi (1935) è stata perfezionata da Howarth.

Sotto riportiamo i grafici delle funzioni $\phi(\eta)$, $\phi'(\eta)$ e $\phi''(\eta)$ determinati risolvendo numericamente il problema (14.4.2), (14.4.4), (14.4.3).

Dalla figura 14.2 notiamo che i grafici delle funzioni $\phi(\eta)$, $\phi'(\eta)$, $\phi''(\eta)$ soddisfano le condizioni del teorema 14.2.

Inoltre vediamo che la curva $\phi'(\eta)$ inizia a crescere linearmente a partire da $\eta = 0$ e tende asintoticamente all'unità. Per $\eta = 2.4$ si ha $\phi' = 0.99$ cioè il valore finale è raggiunto con un'accuratezza dell'1 per cento.

Per quanto riguarda il grafico di $\phi(\eta)$ vediamo che per $\eta > 2.4$, la funzione ha un andamento lineare come si avrebbe nel caso del moto con un punto di ristagno per un fluido perfetto. Precisamente per $\eta > 2.4$

$$\phi(\eta) = \eta - \alpha$$

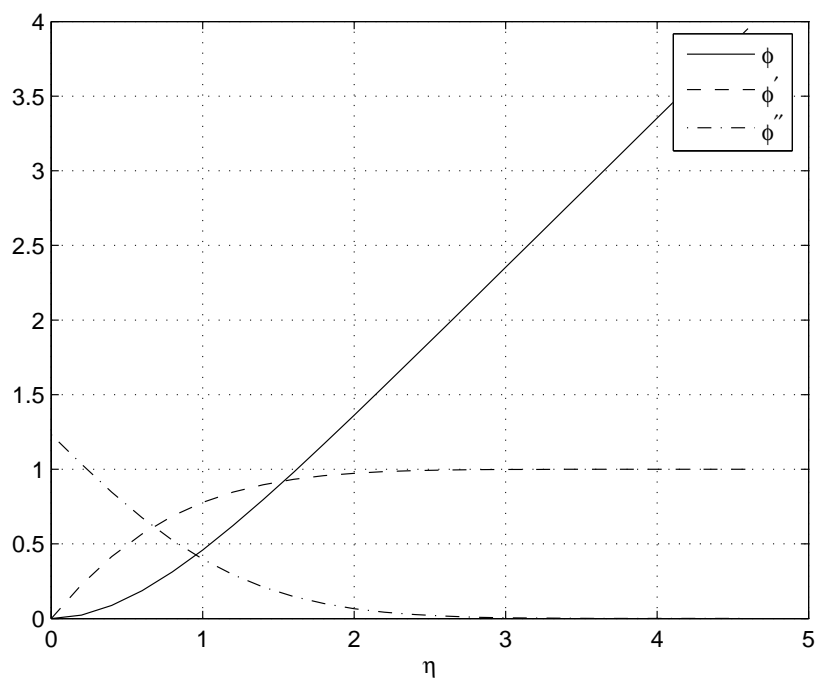


Figura 14.2: Moto di Hiemenz

dove $\alpha = 0.6479$. Si ha perciò, come osservato nel paragrafo precedente, che

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A,$$

dove $A = \sqrt{\frac{\nu}{a}} 0.6479$.

Se consideriamo la distanza dal piano $x_2 = 0$ corrispondente a $\eta = 2.4$ e la denotiamo con δ , si ha:

$$\delta = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}} 2.4. \quad (14.4.7)$$

E' importante notare che per $x_2 > \delta$ il moto del fluido newtoniano ha lo stesso andamento del moto di un fluido perfetto, che colpisce la parete di equazione $x_2 = A = \sqrt{\frac{\nu}{a}} 0.6479$; mentre per $x_2 < \delta$ i due moti sono diversi e quindi si rileva il comportamento tipico del fluido viscoso.

La regione $x_2 < \delta$ è detta *boundary layer* o *strato limite*. L'effetto della viscosità si manifesta essenzialmente solo in tale regione. La sua ampiezza è influenzata dalla viscosità: è piccola a basse viscosità cinematiche e proporzionale a $\nu^{\frac{1}{2}}$.

Si noti che lo spessore del boundary è indipendente da x_1 .

Calcoliamo ora $\text{grad } p$, essendo

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} [x_1^2 + \rho \frac{\nu}{a} \phi^2(\eta)] - \rho a \nu \phi'(\eta) + p_0$$

dove

$$\eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x_2.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\rho a^2 x_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} (\phi \phi' + \phi''). \end{aligned}$$

Vediamo dunque che la componente lungo \vec{e}_2 di $\text{grad } p$, $\frac{\partial p}{\partial x_2}$, è proporzionale a $\rho a^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$ in ogni punto di S .

Come si verifica facilmente, anche il moto piano ortogonale con un punto di ristagno per un fluido newtoniano ammette una funzione di corrente ψ , che ci

proponiamo di determinare.

Consideriamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a f(x_2) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a x_1 f'(x_1) \end{cases} \quad (14.4.8)$$

Se integriamo la prima equazione rispetto a x_1 , otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) + \Psi(x_2)$$

con Ψ funzione arbitraria.

Dalla seconda equazione del sistema deduciamo

$$a x_1 f'(x_2) + \Psi'(x_2) = a x_1 f'(x_2)$$

da cui

$$\Psi(x_2) = \text{costante}.$$

Dunque

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) + \text{costante}.$$

Se imponiamo alla funzione di corrente di annullarsi nel punto $x_2 = 0$, otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Le linee di flusso sono perciò cammini piani giacenti su piani $x_3 = \text{costante}$, luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3)$ ($x_2 \geq 0$) tali che

$$a x_1 f(x_2) = C$$

$$x_3 = C'$$

con C, C' costanti.

Osservazione 14.1. L'esistenza della costante A tale che

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} [f(x_2) - x_2] = -A$$

che abbiamo determinato risolvendo il problema numericamente è stata provata da Hartman nel suo trattato sulle equazioni differenziali studiando il comportamento asintotico della soluzione del problema (14.4.5), (14.4.6), soddisfacente alle condizioni (14.4.7).

Osservazione 14.2. E' interessante dal punto di vista fisico determinare le componenti parallele alla parete della trazione superficiale data da

$$\vec{f} = \tilde{T} \cdot \vec{n}|_{x_2=0}$$

dove $\vec{n} = -\vec{e}_2$.

Poichè

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

e le componenti di \vec{v} sono date dalle (14.3.3), otteniamo

$$\begin{aligned} f_1 &= -T_{12}|_{x_2=0} = -\mu\left(\frac{dv_1}{dx_2}\right)|_{x_2=0} = -\mu a x_1 f''(0) = \rho a^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} \phi''(0) \\ f_2 &= -T_{22}|_{x_2=0} = p|_{x_2=0} = -\rho \frac{a^2}{2} x_1^2 + p_0 \\ f_3 &= -T_{32}|_{x_2=0} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la componente non nulla di \vec{f} parallela alla parete è data da

$$f_1 = -\rho a^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} \phi''(0).$$

Il valore di $\phi''(0)$, ottenuto risolvendo numericamente il problema, è

$$\phi''(0) = 1.2326.$$

14.5 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido perfetto incompressibile

Un moto obliquo con un punto di ristagno si ha quando un getto di fluido urta obliquamente contro una parete rigida con un angolo di incidenza arbitrario. Dal punto di vista matematico, un tale moto è ottenuto combinando un moto ortogonale con un punto di ristagno e un moto di taglio parallelo alla parete.

Come è usuale quando si studiano moti piani con un punto di ristagno per fluidi viscosi, supponiamo che all'infinito il moto tenda al moto di un fluido non viscoso per il quale il punto di ristagno non sia l'origine. Le coordinate di questo nuovo punto di ristagno contengono due costanti: A e B . A è determinata come parte della soluzione del moto ortogonale, e B è un parametro libero che può assumere valori arbitrari.

Inoltre il gradiente della pressione ha una componente costante parallela alla parete proporzionale a $B - A$ che non è presente nel moto ortogonale.

Cominciamo con lo studio del moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido perfetto.

Nel moto piano stazionario obliquo con un punto di ristagno per un fluido perfetto, che si muove verso una parete piana, rigida, fissa, di equazione $x_2 = 0$ il campo della velocità ha la seguente rappresentazione analitica:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3 \quad (14.5.1)$$

dove le componenti di \vec{v} sono così definite:

$$v_1 = ax_1 + bx_2, \quad v_2 = -ax_2, \quad v_3 = 0 \quad (14.5.2)$$

con a, b costanti e a costante positiva.

Osserviamo che questo è un moto piano, con piano direttore Ox_1x_2 ; inoltre il moto definito dalle (14.5.2), se ci riferiamo soltanto al piano direttore, ha solo nell'origine O un punto di ristagno poiché in tale punto le tre componenti della velocità v_1, v_2, v_3 sono nulle.

E' facile verificare che il campo della velocità così definito soddisfa la condizione di incomprimibilità e la condizione al contorno di impenetrabilità:

- Condizione di incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = a - a = 0.$$

- Condizione al contorno:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{x_2=0} = -v_2|_{x_2=0} = ax_2|_{x_2=0} = 0.$$

Resta da determinare il campo incognito della pressione in modo tale che (\vec{v}, p) soddisfi l'equazione

$$\rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = -\operatorname{grad} p.$$

Notiamo che, a differenza di quanto avviene per il moto ortogonale, la velocità non proviene da un potenziale, poiché, come si verifica facilmente

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -b\vec{e}_3 \neq \vec{0} \quad \text{in } S.$$

Per determinare la pressione non possiamo perciò utilizzare il II Teorema di Bernoulli e dobbiamo ricorrere ad un altro metodo.

Scriviamo l'equazione che governa il moto del fluido in componenti:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con $i = 1, 2, 3$. Ovviamente sull'indice j è assunta la convenzione della somma. Per $i = 1$ abbiamo

$$\rho(a^2 x_1 + a b x_2 - a b x_2) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho a^2 x_1.$$

Per $i = 2$ deduciamo

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho a^2 x_2.$$

Per $i = 3$ otteniamo

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2).$$

Dalla prima equazione ricaviamo p integrando rispetto a x_1

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} x_1^2 + P(x_2)$$

dove $P(x_2)$ è una funzione arbitraria dipendente solo da x_2 .

Deriviamo questa espressione rispetto a x_2 e la uguagliamo alla seconda equazione

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho a^2 x_2,$$

ottenendo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = P'(x_2) = -\rho a^2 x_2$$

da cui

$$P(x_2) = -\rho \frac{a^2}{2} x_2^2 + p_0$$

con p_0 costante.

Dunque

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) + p_0$$

dove la costante p_0 rappresenta la pressione nell'origine del piano Ox_1x_2 che è il punto di ristagno. Notiamo che in tale punto la pressione assume il suo valore massimo.

Ci proponiamo infine di determinare le linee di flusso per il moto sopra considerato.

Osserviamo che, poichè il moto è stazionario, traiettorie e linee di flusso coincidono.

Come nel caso del moto ortogonale, per determinare le linee di flusso possiamo seguire due metodi.

Per determinare le linee di flusso col primo metodo dobbiamo procurarci le curve $P(\lambda)$ che sono soluzioni massimali dell'equazione del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P)$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

le cui incognite sono le tre funzioni $x_1 = x_1(\lambda)$, $x_2 = x_2(\lambda)$, $x_3 = x_3(\lambda)$. Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = ax_1 + bx_2 \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -ax_2 \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \end{cases} \quad (14.5.3)$$

Occupiamoci dapprima della seconda equazione nell'incognita $x_2(\lambda)$ che scriviamo come:

$$\frac{dx_2}{d\lambda} + ax_2 = 0$$

La soluzione generale è data da

$$x_2 = C_2 e^{-a\lambda}$$

con $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ e C_2 costante arbitraria non negativa, poichè abbiamo assunto che il fluido si muove rimanendo al di sopra del piano $x_2 = 0$.

Occupiamoci ora della prima equazione, dove a x_2 al secondo membro sostituiamo l'espressione trovata sopra:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} - ax_1 = C_2 b e^{-a\lambda} \quad (14.5.4)$$

È un'equazione differenziale del primo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. La sua soluzione generale si può determinare come somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'omogenea è

$$\hat{x}_1 = C_1 e^{a\lambda},$$

con C_1 costante arbitraria, mentre possiamo assumere la soluzione particolare della completa della forma

$$x_1^* = Ce^{-a\lambda}$$

con C costante da determinarsi.

Sostituendo nella (14.5.4) deduciamo

$$-aCe^{-a\lambda} - aCe^{-a\lambda} = C_2be^{-a\lambda}$$

da cui

$$C = -\frac{b}{2a}C_2.$$

Dunque la soluzione generale della (14.5.4) è data da

$$x_1 = C_1e^{a\lambda} - \frac{b}{2a}C_2e^{-a\lambda}$$

con $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

Infine la soluzione generale della terza equazione del sistema (14.5.3) è data da

$$x_3 = C_3$$

con C_3 costante arbitraria.

Quindi le equazioni cartesiane parametriche con parametro λ delle linee di flusso sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1e^{a\lambda} - \frac{b}{2a}C_2e^{-a\lambda} \\ x_2 &= C_2e^{-a\lambda} \\ x_3 &= C_3 \quad \forall \lambda \in (-\infty; +\infty) \end{aligned} \tag{14.5.5}$$

In corrispondenza di ogni terna $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$, con $C_2 \geq 0$ otteniamo una singola linea di flusso. Osserviamo che le linee di flusso sono cammini piani che giacciono su piani paralleli al piano Ox_1x_2 . Le linee di flusso con $C_3 = 0$ stanno sul piano Ox_1x_2 .

Poichè il moto è piano, ci limitiamo a prendere $C_3 = 0$ e quindi consideriamo le linee di flusso che giacciono sul piano Ox_1x_2 .

Se $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Le linee di flusso corrispondenti a $C_1 \neq 0$ e $C_2 = 0$ si riducono al semiasse positivo o negativo Ox_1 a seconda che C_1 sia positivo o negativo.

Se $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$, la linea di flusso corrispondente è la semiretta di equazione

$$x_2 = -\frac{2a}{b}x_1, \quad x_2 > 0.$$

Infine nel caso generale $C_1 \neq 0$ e $C_2 \neq 0$ possiamo eliminare dal sistema (14.5.5) il parametro λ , usando la seconda equazione parametrica del sistema, ossia:

$$e^{-a\lambda} = \frac{x_2}{C_2}$$

che è equivalente alla relazione:

$$e^{a\lambda} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima equazione delle (14.5.5) otteniamo:

$$x_1 = C_1 \frac{C_2}{x_2} - \frac{b}{2a} x_2$$

che possiamo scrivere come

$$x_1 x_2 + \frac{b}{2a} x_2^2 = C_1 C_2 \quad \Rightarrow \quad 2a x_1 x_2 + b x_2^2 = 2a C_1 C_2 \quad \text{con } x_2 > 0.$$

Concludiamo dunque che nel caso generale le linee di flusso che giacciono nel piano Ox_1x_2 sono rami di iperboli che hanno come asintoti l'asse Ox_1 e la retta di equazione $x_2 = -\frac{2a}{b}x_1$.

Un secondo metodo per determinare le linee di flusso consiste nel trovare la funzione di corrente per il moto preso in esame.

Vediamo dunque quale espressione ha tale funzione.

Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a x_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2 \end{cases} \quad (14.5.6)$$

Se integriamo la prima equazione rispetto a x_1 otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = a x_1 x_2 + \Psi(x_2)$$

con Ψ funzione arbitraria di x_2 .

Tenendo presente la seconda equazione del sistema deduciamo

$$a x_2 + \Psi'(x_2) = a x_2 + b x_2$$

da cui

$$\Psi'(x_2) = b x_2 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x_2) = \frac{b}{2} x_2^2 + \text{costante}.$$

Se assumiamo tale costante uguale a zero, otteniamo

$$\psi(x_1, x_2) = ax_1x_2 + \frac{b}{2}x_2^2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Le linee di flusso del moto piano obliquo con un punto di ristagno per il fluido perfetto giacenti nel piano Ox_1x_2 sono dunque i cammini luogo dei punti $P(x_1, x_2) \in Ox_1x_2$ tali che

$$ax_1x_2 + \frac{b}{2}x_2^2 = C$$

con $C = \text{costante}$.

Se $C = 0$ otteniamo

$$ax_2(x_1 + \frac{b}{2a}x_2) = 0$$

da cui deduciamo

$$x_2 = 0 \quad \text{o} \quad x_2 = -\frac{2a}{b}x_1.$$

Se $C \neq 0$ troviamo l'equazione

$$x_1x_2 + \frac{b}{2a}x_2^2 = \text{costante}.$$

Ritroviamo dunque le linee di flusso ottenute col primo metodo.

Per studiare nel paragrafo successivo il moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtoniano, è conveniente considerare un moto più generale per il fluido perfetto. Più precisamente, supporremo che il fluido colpisca obliquamente la parete piana di equazione $x_2 = A$ e che le componenti della velocità abbiano la forma seguente

$$v_1 = ax_1 + b(x_2 - B), \quad v_2 = -a(x_2 - A), \quad v_3 = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0 \quad (14.5.7)$$

con A e B costanti.

Osserviamo che questo è un moto piano obliquo con piano direttore Ox_1x_2 , per il quale il punto di ristagno nel piano Ox_1x_2 non è più $(0, 0)$, bensì il punto di coordinate $\left(\frac{b}{a}(B - A), A\right)$.

E' facile verificare che \vec{v} soddisfa la condizione di incomprimibilità e al contorno. Inoltre dall'equazione $\rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = -\operatorname{grad} p$ ricaviamo la pressione, come nel caso precedente.

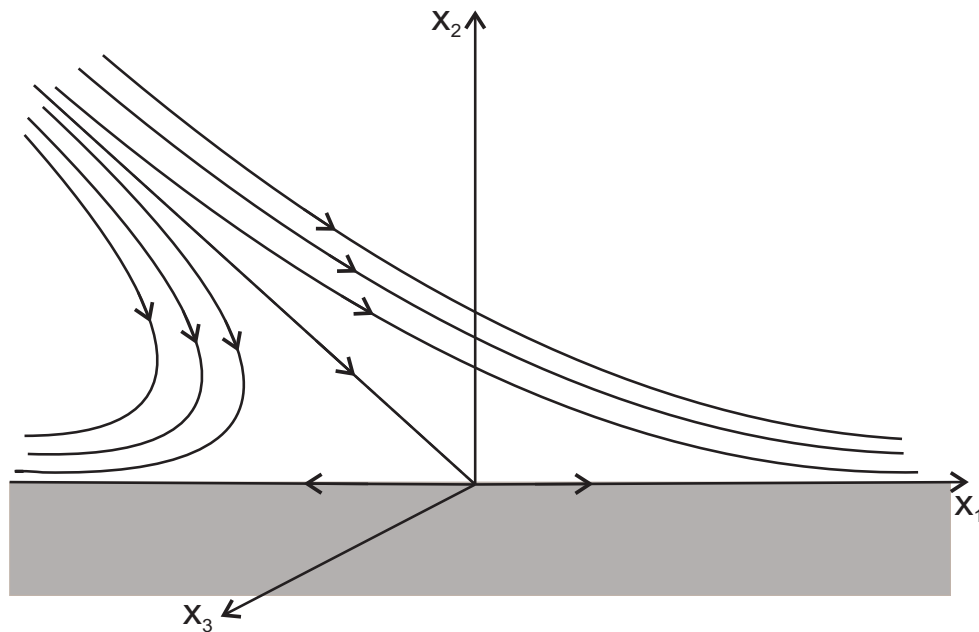


Figura 14.3: Linee di flusso nel piano Ox_1x_2 .

Scrivendo l'equazione in componenti, deduciamo

$$\begin{aligned} -\rho[a^2 x_1 + a b (A - B)] &= \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ -\rho[a^2 (x_2 - A)] &= \frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Integrando la prima delle (14.5.8), si ha:

$$p = -\rho\left[\frac{a^2}{2} x_1^2 + a b (A - B)x_1\right] + P(x_2)$$

dove $P(x_2)$ è una funzione arbitraria di x_2 .

Determiniamo tale funzione derivando p rispetto a x_2 e uguagliando l'espressione così ottenuta alla seconda delle (14.5.8):

$$P'(x_2) = -\rho a^2 (x_2 - A)$$

da cui

$$P(x_2) = -\rho \frac{a^2}{2} (x_2^2 - 2A x_2) + p_0^*$$

con p_0^* costante.

Dunque possiamo scrivere

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} \left\{ \left[x_1 - \frac{b}{a}(B-A) \right]^2 + (x_2 - A)^2 \right\} + p_0.$$

dove p_0 è una costante che rappresenta la pressione nel punto di ristagno di coordinate $\left(\frac{b}{a}(B-A), A \right)$.

Come è facile verificare, le linee di flusso di questo moto sono ancora iperboli aventi come asintoti le rette di equazione $x_2 = A$ e $x_2 = -\frac{2a}{b}x_1 + 2B - A$.

14.6 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtoniano: impostazione del problema

Consideriamo il moto stazionario piano per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo che si muove verso una parete piana, rigida, fissa, obliquamente ad essa.

Le equazioni che governano il moto sono:

- equazione di Navier - Stokes: $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$
- condizione di incomprimibilità: $\text{div } \vec{v} = \vec{0}$.

Studiare il problema del moto consiste, quindi, nel determinare in S la coppia (\vec{v}, p) soddisfacente alle equazioni del moto e alla condizione al contorno di aderenza tali che $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ e $p \in \mathcal{C}^1(S)$.

Come abbiamo visto, per il moto obliquo con un punto di ristagno per un fluido perfetto la velocità ha componenti date da

$$v_1 = a x_1 + b x_2, \quad v_2 = -a x_2, \quad v_3 = 0$$

con a, b costanti e a costante positiva, mentre la pressione è data da

$$p = -\frac{1}{2}\rho a^2 (x_1^2 + x_2^2) + p_0.$$

E' facile verificare che (\vec{v}, p) , con \vec{v} e p definite come sopra, soddisfa le equazioni che governano il moto del fluido newtoniano, ma non la condizione di aderenza:

$$\vec{v}|_{x_2=0} = \vec{0}.$$

Modifichiamo, allora, questa soluzione per prendere in considerazione l'effetto della viscosità. Cerchiamo quindi una soluzione avente un campo della velocità \vec{v} per il quale le componenti della rappresentazione analitica siano della forma:

$$v_1 = a x_1 f'(x_2) + b g(x_2), \quad v_2 = -a f(x_2), \quad v_3 = 0 \quad (14.6.1)$$

con $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ e $f = f(x_2)$, $g = g(x_2)$ funzioni da determinarsi sufficientemente regolari.

Le (14.6.1) sono le equazioni della trasformazione di similarità.

Si noti che v_1 e v_2 sono state scelte in modo tale che la condizione di incomprimibilità sia soddisfatta.

Quindi si devono cercare f , g , p tali che siano soddisfatte l'equazione di Navier - Stokes e la condizione al contorno di velocità nulla su $x_2 = 0$. Inoltre, come è usuale nello studio dei moti con un punto di ristagno per un fluido newtoniano, assumiamo che all'infinito il fluido newtoniano si comporti come un fluido perfetto.

Pertanto si richiede:

- $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$
affinchè sia soddisfatta la condizione di aderenza alla parete;
- $\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1$, $\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} g'(x_2) = 1$
affinchè all'infinito il moto del fluido newtoniano abbia lo stesso andamento dell'analogo moto per un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo.

Più precisamente, supponiamo che all'infinito il fluido newtoniano abbia lo stesso comportamento di un fluido perfetto che colpisce obliquamente la parete di equazione $x_2 = A$ ed abbia come punto di ristagno il punto di coordinate $\left(\frac{b}{a}(B - A), A\right)$, con A e B costanti. Tali costanti sono correlate al comportamento all'infinito delle funzioni f e g nel modo seguente:

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [g(x_2) - x_2] = -B. \quad (14.6.2)$$

Come vedremo, poichè f è soluzione del problema al contorno relativo al moto di Hiemenz, la costante A assume il valore che abbiamo precisato nel paragrafo sul moto ortogonale, mentre B è un parametro libero al quale vengono attribuiti valori arbitrari.

Stabiliamo ora a quali equazioni devono soddisfare f , g e p .

Tenendo presente che le componenti di \vec{v} sono date da (14.6.1), scriviamo l'equazione di Navier - Stokes in componenti

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Per $i = 1$ si ha:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 = \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

da cui

$$a^2 f'^2 x_1 + a b g f' - a^2 x_1 f f'' - a b f g' = \nu (a f''' x_1 + b g'') - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

Per $i = 2$ deduciamo,

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 = \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

da cui

$$a^2 f f' = -a \nu f'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}.$$

Per $i = 3$ otteniamo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2).$$

Utilizziamo le equazioni

$$a x_1 (\nu f''' + a f f'' - a f'^2) + b (\nu g'' + a (f g' - g f')) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (14.6.3)$$

$$a \nu f'' + a^2 f' f = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (14.6.4)$$

per ottenere l'espressione di $p(x_1, x_2)$ e le equazioni cui devono soddisfare f e g . Integrando la (14.6.4) rispetto a x_2 , scritta nella forma

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho a^2 f' f - \rho a \nu f'',$$

si ha:

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} f^2(x_2) - \rho a \nu f'(x_2) + P(x_1)$$

con $P(x_1)$ funzione arbitraria.

Tale funzione si può determinare ricordando che per $x_2 \rightarrow +\infty$ la pressione deve avere lo stesso andamento che ha per un fluido perfetto per il quale la velocità abbia le componenti date dalle (14.5.7) e la pressione sia della forma seguente:

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} \left\{ \left[x_1 - \frac{b}{a} (B - A) \right]^2 + (x_2 - A)^2 \right\} + p_0. \quad (14.6.5)$$

Quindi possiamo valutare p per $x_2 \rightarrow +\infty$ per il fluido newtoniano tenendo presente che:

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [f(x_2) - x_2] = -A$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} g'(x_2) = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} [g(x_2) - x_2] = -B$$

e poi confrontare l'equazione che otteniamo con la (14.6.5).

Per $x_2 \rightarrow +\infty$ p ha il seguente andamento:

$$-\rho \frac{a^2}{2} (x_2 - A)^2 - \rho a \nu + P(x_1)$$

da cui

$$P(x_1) = -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1 - \frac{b}{a} (B - A) \right]^2 + \rho a \nu + p_0$$

Sostituendo si ha:

$$p = p(x_1, x_2) = -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1^2 - 2 \frac{b}{a} (B - A) x_1 + f^2(x_2) \right] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0^* \quad (14.6.6)$$

dove $p_0^* = p_0 + \rho a \nu - \rho \frac{b^2}{2} (B - A)^2$.

Si noti che p_0^* rappresenta il valore della pressione nel punto di ristagno $(0, 0)$.

A questo punto possiamo calcolare $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ che compare nella (14.6.3):

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho a^2 \left[x_1 - \frac{b}{a} (B - A) \right]$$

Osserviamo dall'espressione scritta sopra per $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ che la componente del gradiente della pressione parallela a Ox_1 ha un termine costante proporzionale a $B - A$, che non compare nel moto ortogonale.

Inserendo nella (14.6.3) il risultato trovato, deduciamo:

$$a x_1 \left(\nu f''' + a f f'^2 \right) + b [\nu g'' + a (f g' - g f')] = -a^2 x_1 + a b (B - A).$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ha:

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0 \quad (14.6.7)$$

$$\frac{\nu}{a} g'' + f g' - f' g = B - A. \quad (14.6.8)$$

A tali equazioni si devono associare le condizioni al contorno:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad (14.6.9)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} g'(x_2) = 1. \quad (14.6.10)$$

Abbiamo dunque ottenuto il seguente

Teorema 14.4. *Dato un fluido newtoniano incompressibile e omogeneo, il moto piano con un punto di ristagno di tale fluido, che si muove verso la parete $x_2 = 0$, rigida e fissa, obliquamente ad essa, ha la seguente forma:*

$$\vec{v} = [a x_1 f'(x_2) + b g(x_2)] \vec{e}_1 - a f(x_2) \vec{e}_2$$

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1^2 - 2 \frac{b}{a} (B - A) x_1 + f^2(x_2) \right] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0^*$$

dove $p_0^* = p_0 + \rho a \nu - \rho \frac{b^2}{2} (B - A)^2$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ e (f, g) soddisfa il seguente problema:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 &= 0 \\ \frac{\nu}{a} g''' + f g' - f' g &= B - A \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad g(0) &= 0, \\ \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} f'(x_2) = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} g'(x_2) &= 1. \end{aligned}$$

14.7 Moto piano obliquo con un punto di ristagno per un fluido newtoniano incompressibile: risultati analitici

Scriviamo in forma adimensionale le equazioni seguenti, in modo da ridurre il numero di parametri che compaiono in esse:

$$\frac{\nu}{a} f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0$$

$$\frac{\nu}{a} g''' + f g' - f' g = B - A.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} x_2, \quad \phi(\eta) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} f \left(\sqrt{\frac{\nu}{a}} \eta \right), \\ \beta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} B, \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{\nu}} A, \quad \gamma(\eta) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} g \left(\sqrt{\frac{\nu}{a}} \eta \right). \end{aligned}$$

Tenendo presente che:

$$f(x_2) = f\left(\sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta\right) = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\phi(\eta)$$

$$g(x_2) = g\left(\sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta\right) = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\gamma(\eta),$$

si deduce

$$g'(x_2) = \gamma'(\eta), \quad g''(x_2) = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\gamma''(\eta)$$

$$f'(x_2) = \phi'(\eta), \quad f''(x_2) = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\phi''(\eta), \quad f'''(x_2) = \frac{a}{\nu}\phi'''(\eta).$$

Dalla (14.6.7) si ottiene l'equazione di Hiemenz

$$\phi''' + \phi\phi'' - \phi'^2 + 1 = 0. \quad (14.7.1)$$

La (14.6.8) diventa

$$\gamma'' + \phi\gamma' - \phi'\gamma = \beta - \alpha. \quad (14.7.2)$$

Dunque le equazioni adimensionali che governano il moto sono:

$$\begin{aligned} \phi''' + \phi\phi'' - \phi'^2 + 1 &= 0 \\ \gamma'' + \phi\gamma' - \phi'\gamma &= \beta - \alpha \end{aligned} \quad (14.7.3)$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi'(\eta) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \gamma'(\eta) = 1. \end{aligned} \quad (14.7.4)$$

Dal sistema (14.7.3) vediamo che la funzione ϕ influenza γ , ma non viceversa. Come già abbiamo osservato, la prima delle equazioni (14.7.3) è quella di Hiemenz per la quale abbiamo enunciato in precedenza teoremi di esistenza e unicità della soluzione.

Per quanto riguarda la seconda equazione, questa, assumendo ϕ come funzione nota, si può riguardare come una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti non costanti e non omogenea. Grazie alla teoria relativa alle equazioni differenziali lineari, la sua soluzione generale è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare di quella completa.

Vediamo in primo luogo di determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$\gamma'' + \phi\gamma' - \phi'\gamma = 0 \quad (14.7.5)$$

A tal fine enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente teorema

Teorema 14.5. *Se $y_1(t)$ è una soluzione particolare per $t \in [a, b]$ dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (14.7.6)$$

dove $a_1 = a_1(t)$ e $a_2 = a_2(t)$ sono funzioni continue definite in $[a, b]$, allora la soluzione generale dell'equazione (14.7.6) è data da:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{e^{-\int_{t_0}^{\tau} a_1(s) ds}}{y_1^2(\tau)} d\tau \quad (14.7.7)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in [a, b]$.

Applichiamo il Teorema 14.5 all'equazione (14.7.5).

In primo luogo dimostriamo che una sua soluzione particolare è ϕ'' .

Se scriviamo il primo membro della (14.7.5) sostituendo φ'' e le sue corrispondenti derivate a γ , otteniamo

$$\varphi^{iv} + \varphi\varphi''' - \varphi'\varphi''.$$

D'altra parte φ è soluzione dell'equazione di Hiemenz

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0.$$

Se allora deriviamo entrambi i membri di tale equazione deduciamo

$$\varphi^{iv} + \varphi'\varphi'' + \varphi\varphi''' - 2\varphi'\varphi'' = 0$$

da cui

$$\varphi^{iv} + \varphi\varphi''' - \varphi'\varphi'' = 0$$

Dunque φ'' è soluzione particolare della (14.7.5).

Utilizzando tale soluzione particolare, grazie al teorema 14.5, possiamo scrivere che la soluzione generale della (14.7.5) è data da

$$\hat{\gamma}(\eta) = C_1 \phi''(\eta) + C_2 \phi''(\eta) \int_0^\eta \frac{e^{-\int_0^s \phi(t) dt}}{\phi''^2(s)} ds \quad \forall \eta > 0.$$

Verifichiamo ora che una soluzione particolare della (14.7.2) è

$$\gamma^*(\eta) = (\alpha - \beta) \phi'(\eta).$$

Deriviamo $\gamma^*(\eta)$:

$$\begin{aligned} \gamma^{*'}(\eta) &= (\alpha - \beta) \phi''(\eta), \\ \gamma^{*''}(\eta) &= (\alpha - \beta) \phi'''(\eta). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (14.7.2) si ottiene:

$$(\alpha - \beta) \left(\phi'''(\eta) + \phi \phi''(\eta) - \phi'^2(\eta) \right) = \beta - \alpha$$

Notiamo che per l'equazione di Hiemenz

$$\phi'''(\eta) + \phi \phi''(\eta) - \phi'^2(\eta) = -1$$

e quindi effettivamente $\gamma^*(\eta)$ è soluzione particolare della (14.7.2).
Dunque la soluzione generale della (14.7.2) è

$$\gamma(\eta) = (\alpha - \beta) \phi'(\eta) + C_1 \phi''(\eta) + C_2 \phi''(\eta) \int_0^\eta \frac{e^{-\int_0^s \phi(t) dt}}{\phi''^2(s)} ds$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Dobbiamo ora determinare le costanti C_1 e C_2 nel nostro caso.

Per determinare C_1 imponiamo la condizione $\gamma(0) = 0$:

$$\gamma(0) = C_1 \phi''(0) = 0.$$

Poichè $\phi''(0)$ è noto ed è non nullo (come abbiamo visto dalla soluzione numerica del moto di Hiemenz), si ha $C_1 = 0$.

Per determinare C_2 deriviamo $\gamma(\eta)$ e poi calcoliamo $\gamma'(0)$:

$$\gamma'(\eta) = (\alpha - \beta) \phi''(\eta) + C_2 \phi'''(\eta) \int_0^\eta \frac{e^{-\int_0^s \phi(t) dt}}{\phi''^2(s)} ds + C_2 \frac{\phi''(\eta)}{\phi''^2(\eta)} e^{-\int_0^\eta \phi(t) dt},$$

$$\gamma'(0) = (\alpha - \beta) \phi''(0) + C_2 (\phi''(0))^{-1},$$

da cui

$$C := C_2 = \phi''(0) [\gamma'(0) - (\alpha - \beta) \phi''(0)]. \quad (14.7.8)$$

Pertanto la soluzione della (14.7.2) si può scrivere formalmente come:

$$\gamma'(\eta) = (\alpha - \beta) \phi'(\eta) + C \phi''(\eta) \Phi(\eta)$$

dove si è posto

$$\Phi(\eta) = \int_0^\eta \frac{e^{-\int_0^s \phi(t) dt}}{\phi''^2(s)} ds.$$

Notiamo che la costante C contiene $\alpha, \phi''(0), \gamma'(0)$. Di tali costanti α e $\phi''(0)$ sono già state determinate numericamente precedentemente poichè ϕ è soluzione

del problema di Hiemenz. Nella parte successiva del capitolo, risolvendo numericamente il problema

$$\begin{aligned} \phi''' + \phi \phi'' - \phi'^2 + 1 &= 0 \\ \gamma'' + \phi \gamma' - \phi' \gamma &= \beta - \alpha \\ \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \gamma(0) &= 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi'(\eta) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \gamma'(\eta) &= 1, \end{aligned} \quad (14.7.9)$$

determineremo il valore di $\gamma'(0)$ per diversi valori di β .

Osservazione 14.3 Sulla parete $x_2 = 0$ ci sono tre punti di notevole interesse fisico aventi come prima coordinata:

1. $x_1 = 0$; è l'origine che rappresenta il punto di ristagno del moto;
2. $x_1 = x_p$; è il punto di massima pressione sulla parete;
3. $x_1 = x_s$; è il punto in cui la linea di flusso separatoria nel piano Ox_1x_2 incontra la parete.

Esaminiamo i punti 2 e 3.

2. Consideriamo la pressione data dalla (14.6.6):

$$p = p(x_1, x_2) = -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1^2 - 2 \frac{b}{a} (B - A) x_1 + f^2(x_2) \right] - \rho a \nu f'(x_2) + p_0^*$$

con le condizioni $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

Proviamo che il punto in cui si ha la pressione massima su $x_2 = 0$ ha coordinata x_1 data da

$$x_p = b \sqrt{\frac{\nu}{a^3}} (\beta - \alpha).$$

Se poniamo $x_2 = 0$, l'espressione della pressione si riduce a

$$p(x_1, 0) = -\rho \frac{a^2}{2} \left[x_1^2 - 2 \frac{b}{a} (B - A) x_1 \right] + p_0^* =: p^*(x_1).$$

Per avere un punto di massimo dobbiamo porre $\frac{dp^*}{dx_1} = 0$, per cui

$$\frac{dp^*}{dx_1} = -\rho a^2 \left[x_1 - \frac{b}{a} (B - A) \right] = 0$$

che fornisce

$$x_1 = \frac{b}{a} (B - A).$$

Ricordiamo che $B = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \beta$ e $A = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \alpha$; sostituendo otteniamo

$$x_1 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\nu}{a}} (\beta - \alpha) = b \sqrt{\frac{\nu}{a^3}} (\beta - \alpha).$$

Inoltre

$$\frac{d^2 p^*}{dx_1^2} = -\rho a^2 < 0.$$

Dunque x_p è la coordinata del punto in cui la pressione è massima sulla parete.

3. Mostriamo ora che

$$x_s = -b \sqrt{\frac{\nu}{a^3}} \frac{\gamma'(0)}{\phi''(0)}.$$

Ricordiamo che la funzione di corrente $\psi = \psi(x_1, x_2)$ è tale che

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

$$v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

Inoltre, limitandoci a considerare il piano Ox_1x_2 ,

$\psi(x_1, x_2) = \text{costante}$ dà l'equazione delle linee di flusso

$\psi(x_1, x_2) = 0$ dà l'equazione della linea di flusso separatoria.

Nel nostro caso dobbiamo in primo luogo determinare $\psi(x_1, x_2)$, tenendo presente che

$$v_1 = ax_1 f'(x_2) + bg(x_2), \quad v_2 = -af(x_2), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Per determinare $\psi = \psi(x_1, x_2)$, dobbiamo dunque utilizzare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = af(x_2) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = ax_1 f'(x_2) + bg(x_2). \end{cases}$$

Integrando la prima equazione otteniamo:

$$\psi = a x_1 f(x_2) + \Psi(x_2)$$

con Ψ funzione arbitraria. Dalla seconda equazione deduciamo:

$$a x_1 f'(x_2) + \Psi'(x_2) = a x_1 f'(x_2) + b g(x_2)$$

da cui

$$\Psi(x_2) = b g(x_2).$$

Integrando quest'ultima otteniamo:

$$\Psi(x_2) = b \int_0^{x_2} g(s) ds + \text{costante}.$$

Se prendiamo la costante nulla, abbiamo:

$$\psi = \psi(x_1, x_2) = a x_1 f(x_2) + b \int_0^{x_2} g(s) ds.$$

Poniamo ora $\psi(x_1, x_2) = 0$, per cui deduciamo che l'equazione della linea di flusso separatoria è la seguente

$$a x_1 f(x_2) + b \int_0^{x_2} g(s) ds = 0$$

che possiamo scrivere nella forma

$$x_1 = \frac{-b \int_0^{x_2} g(s) ds}{a f(x_2)}.$$

Ci proponiamo di determinare il punto in cui la linea di flusso separatoria incontra la parete quando $x_2 = 0$. Dunque, tenendo conto che $f(0) = 0$, otteniamo

$$x_s = -\frac{b}{a} \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{-b \int_0^{x_2} g(s) ds}{a f(x_2)} = -\frac{b g'(0)}{a f''(0)}, \quad (14.7.10)$$

dove abbiamo applicato due volte la regola di de L'Hôpital.

Vediamo ora un metodo alternativo per ottenere la (14.7.10).

Consideriamo la componente di indici 1 e 2 del tensore degli sforzi di Cauchy.

$$T_{12} = -p \delta_{12} + \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

D'altra parte $-T_{12}|_{x_2=0}$ fornisce la componente lungo Ox_1 della trazione superficiale sulla parete $x_2 = 0$. Infatti questa è data da

$$\vec{f} = \tilde{T} \cdot \vec{n}|_{x_2=0}$$

dove

$$\vec{n} = -\vec{e}_2$$

Quindi

$$f_1 = -T_{12}|_{x_2=0}.$$

Perciò

$$f_1 = -\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) |_{x_2=0} = -\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) |_{x_2=0}.$$

Il punto in cui la linea di flusso separatoria incontra la parete $x_2 = 0$ si determina ponendo uguale a zero f_1 . Dunque

$$\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) |_{x_2=0} = a x_1 f''(0) + b g'(0) = 0$$

da cui

$$x_1 = -\frac{b g'(0)}{a f''(0)} = x_s,$$

come ci proponevamo di determinare.

In forma adimensionale, ricordando che

$$g'(x_2) = \gamma'(\eta), \quad f''(x_1) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} \phi''(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} x_2$$

si ottiene

$$x_s = -b \sqrt{\frac{\nu}{a^3}} \frac{\gamma'(0)}{\phi''(0)}. \quad (14.7.11)$$

Notiamo che il rapporto $\frac{x_p}{x_s} = (\alpha - \beta) \frac{\phi''}{\gamma'}$ è lo stesso per ogni angolo di incidenza.

Esaminiamo, ora, la pendenza della linea di flusso separatoria nel punto in cui interseca la parete $x_2 = 0$.

L'equazione della linea di flusso è

$$a x_1 f(x_2) + b \int_0^{x_2} g(s) ds = 0.$$

Scriviamo l'equazione precedente in forma adimensionale ponendo $x_1 = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \xi$.

Si ottiene

$$a \xi \phi(\eta) + b \int_0^\eta \gamma(s) ds = 0$$

da cui

$$\xi = -\frac{b \int_0^\eta \gamma(s) ds}{a \phi(\eta)}.$$

Poniamo ora

$$-\frac{b \int_0^\eta \gamma(s) ds}{a \phi(\eta)} =: h(\eta) \Rightarrow \xi = h(\eta).$$

Perciò nel piano $O\xi, \eta$ la linea di flusso separatoria ha equazione

$$H(\xi, \eta) := \xi - h(\eta) = 0.$$

Il vettore $\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}, -\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)$ è tangente al cammino nel punto (ξ, η) .

Nel nostro caso

$$H(\xi, \eta) = \xi + \frac{b \int_0^\eta \gamma(s) ds}{a \phi(\eta)}.$$

Dunque il vettore $\left(\frac{b}{a} \frac{d}{d\eta} \frac{\int_0^\eta \gamma(s) ds}{\phi(\eta)}, -1\right)$ è tangente al nostro cammino in un generico punto (ξ, η) .

Quindi la pendenza della retta tangente in (ξ, η) è data da

$$m = -\frac{1}{\frac{b}{a} \frac{d}{d\eta} \frac{\int_0^\eta \gamma(s) ds}{\phi(\eta)}}$$

Ci proponiamo di determinare m_s , cioè m nel punto in cui la linea di flusso separatoria incontra la parete.

A tal fine consideriamo

$$\frac{d}{d\eta} \frac{\int_0^\eta \gamma(s) ds}{\phi(\eta)}$$

e calcoliamone il limite per $\eta \rightarrow 0^+$ applicando più volte la regola di de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\eta} \frac{\int_0^\eta \gamma(s) ds}{\phi(\eta)} = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\phi(\eta) \gamma(\eta) - \phi'(\eta) \int_0^\eta \gamma(s) ds}{[\phi(\eta)]^2} \\ & = \frac{\phi''(0)\gamma''(0) - \phi'''(0)\gamma'(0)}{3 [\phi''(0)]^2}. \end{aligned}$$

Ricordando le equazioni (14.7.3)

$$\begin{aligned} \phi''' + \phi \phi'' - \phi'^2 + 1 &= 0 \\ \gamma'' + \phi \gamma' - \phi' \gamma &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

e le condizioni (14.7.4)

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0,$$

si ha

$$\phi'''(0) = -1, \quad \gamma''(0) = \beta - \alpha.$$

Allora

$$\frac{\phi''(0)\gamma''(0) - \phi'''(0)\gamma'(0)}{3[\phi''(0)]^2}$$

diventa

$$\frac{(\beta - \alpha)\phi''(0) + \gamma'(0)}{3[\phi''(0)]^2}.$$

Dunque la pendenza della linea di flusso separatoria nel punto di intersezione con la parete è data da

$$m_s = -\frac{3a[\phi''(0)]^2}{b[(\beta - \alpha)\phi''(0) + \gamma'(0)]}.$$

Vediamo che m_s è indipendente dal coefficiente di viscosità cinematica del fluido, mentre dipende dal rapporto $\frac{a}{b}$.

Se ora consideriamo il rapporto tra questa pendenza e quella della linea di flusso separatoria all'infinito ($m_\infty = -2\frac{a}{b}$), questo è dato da

$$\frac{m_s}{m_\infty} = -\frac{3[\phi''(0)]^2}{2[(\beta - \alpha)\phi''(0) + \gamma'(0)]}.$$

Dunque $\frac{m_s}{m_\infty}$ è anche indipendente dal rapporto $\frac{a}{b}$ ed è perciò lo stesso per tutti i moti obliqui con un punto di ristagno di un qualsiasi fluido newtoniano.

In ogni caso sia m_s sia $\frac{m_s}{m_\infty}$ dipendono da $B - A$, cioè dal termine costante che compare nella componente del gradiente della pressione parallela alla parete.

14.8 Risultati numerici e discussione

In questo paragrafo enunciamo alcuni risultati ottenuti risolvendo numericamente il problema (14.7.9).

La Figura 14.4 mostra il grafico della funzione di Hiemenz e delle sue derivate, che già avevamo rappresentato in precedenza.

Si vede dunque che

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi''(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi'(\eta) = 1$$

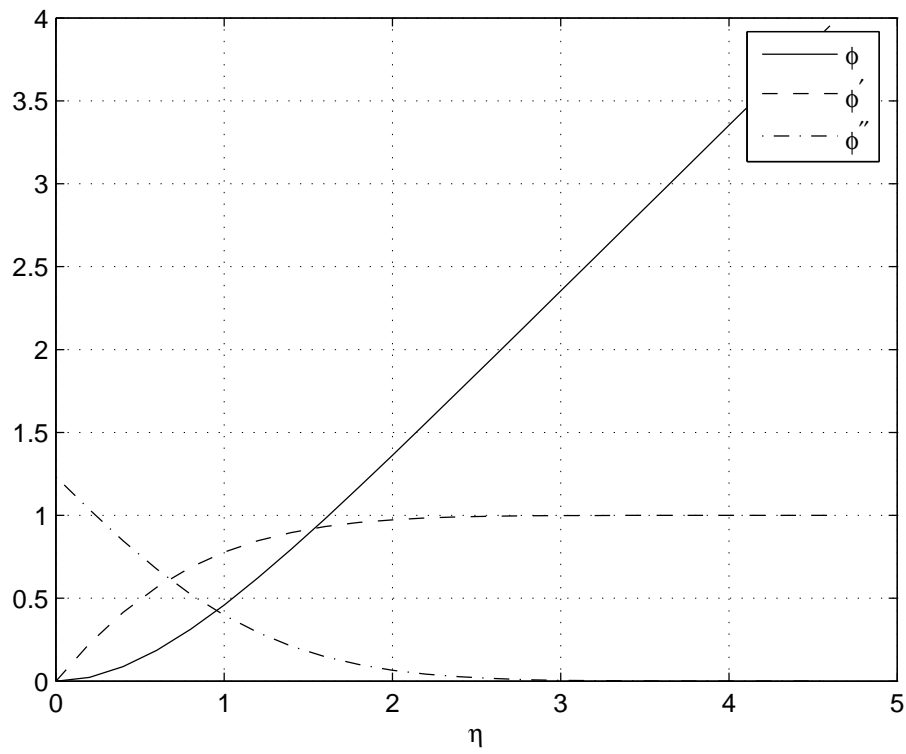


Figura 14.4: Moto di Hiemenz

Tabella 14.1: Valori numerici di alcune grandezze significative in corrispondenza di $\beta = -5, 0, \alpha, 2\alpha, 5$

| $\beta - \alpha$ | $\gamma'(0)$ | C | $\frac{x_p}{x_s}$ | $\frac{m_s}{m_i}$ | $\bar{\eta}_\gamma$ |
|------------------|--------------|--------|-------------------|-------------------|---------------------|
| -5.6479 | 7.5693 | 0.7490 | 0.9197 | 3.7501 | 3.0 |
| -0.6479 | 1.4065 | 0.7493 | 0.5678 | 3.7489 | 3.2 |
| 0 | 0.6080 | 0.7494 | 0 | 3.7483 | 3.2 |
| 0.6479 | -0.1906 | 0.7494 | 4.1899 | 3.7483 | 3.4 |
| 4.3521 | -4.7562 | 0.7496 | 1.1279 | 3.7471 | 3.6 |

Per $\eta = 2.4$, si ha $\phi' = 0.99$ e, se $\eta > 2.4$, allora $\phi = \eta - 0.6479$, con $\alpha = 0.6479$. Dall'integrazione numerica otteniamo $\phi''(0) = 1.2326$.

Per quanto riguarda $\gamma'(0)$, mostriamo in Tabella 14.1 i valori ottenuti per tale parametro in corrispondenza di diversi valori di β ($\beta = -5, 0, \alpha, 2\alpha, 5$). Notiamo che la costante C , data dalla (14.7.8), contiene $\alpha, \phi''(0), \gamma'(0)$, che non sono assegnati, ma i loro valori sono stati determinati mediante l'integrazione numerica del problema (14.7.9). La Tabella 14.1 mostra che C ha sempre lo stesso valore, $\simeq 0.749$.

In Tabella 14.1, elenchiamo anche i valori calcolati numericamente di η (denotati con $\bar{\eta}_\gamma$) in cui $\gamma' = 0.99$ (se $\beta - \alpha \geq 0$), o $\gamma' = 1.01$ (se $\beta - \alpha < 0$); cosicchè quando $\eta > \bar{\eta}_\gamma$, allora $\gamma = \eta - \beta$. Si noti che $\bar{\eta}_\gamma$ è maggiore di 2.4. Dunque l'influenza della viscosità appare solo in uno strato vicino alla parete il cui spessore è $\bar{\eta}_\gamma$. Osserviamo che lo strato in cui si manifesta la viscosità è proporzionale a $\sqrt{\frac{\nu}{a}}$ e il suo spessore è maggiore di quello che si ha per il moto ortogonale, che è $2.4 \sqrt{\frac{\nu}{a}}$.

Osservando ancora la Tabella 14.1, notiamo che x_s (dato da (14.7.11)) ha il segno di b se $\beta - \alpha > 0$ e il segno di $-b$ se $\beta - \alpha \leq 0$. Inoltre, se b è positivo (negativo) x_s aumenta (diminuisce) all'aumentare di $\beta - \alpha$. Per quanto riguarda $|x_s|$, se $\beta - \alpha$ aumenta da un valore negativo fino a zero, $|x_s|$ diminuisce e così x_s si avvicina all'origine, se $\beta - \alpha$ aumenta da zero fino a un valore positivo, $|x_s|$ aumenta e così x_s si allontana dall'origine.

Le Figure 14.5, 14.6 mostrano i grafici di $\gamma(\eta), \gamma'(\eta)$, per alcuni valori di $\beta - \alpha$, cioè $\beta - \alpha = -5 - \alpha, -\alpha, 0, \alpha, 5 - \alpha$.

Le Figure 14.7, 14.8, 14.9 mostrano le linee di flusso nel piano $O\xi\eta$ e i punti

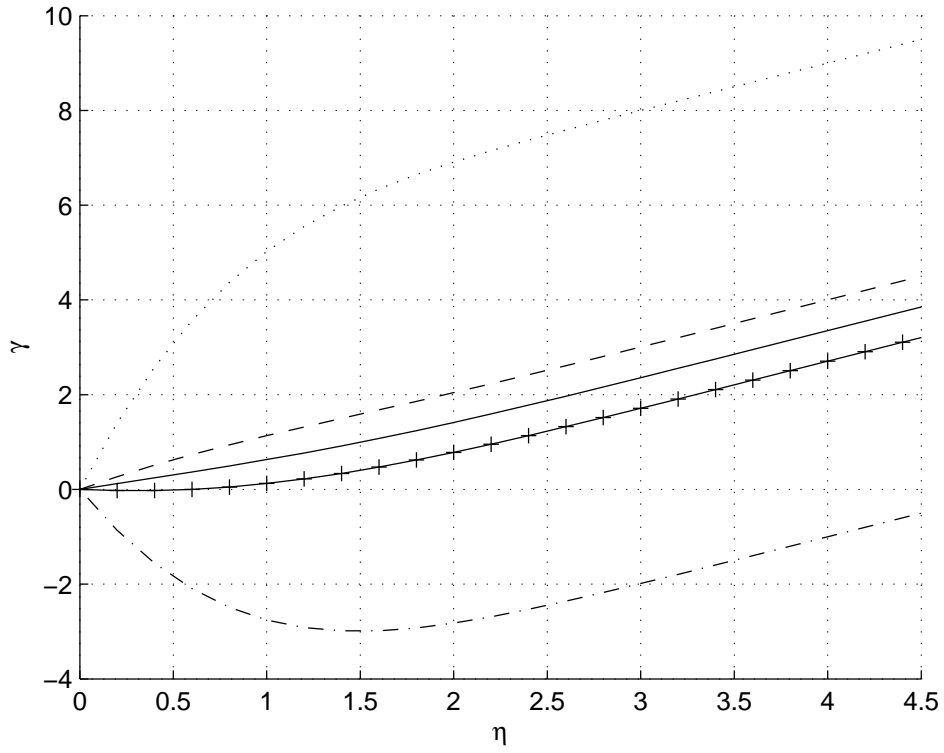


Figura 14.5: grafico di $\gamma(\eta)$ per $\beta - \alpha = -5 - \alpha, -\alpha, 0, \alpha, 5 - \alpha$. a partire da sopra.

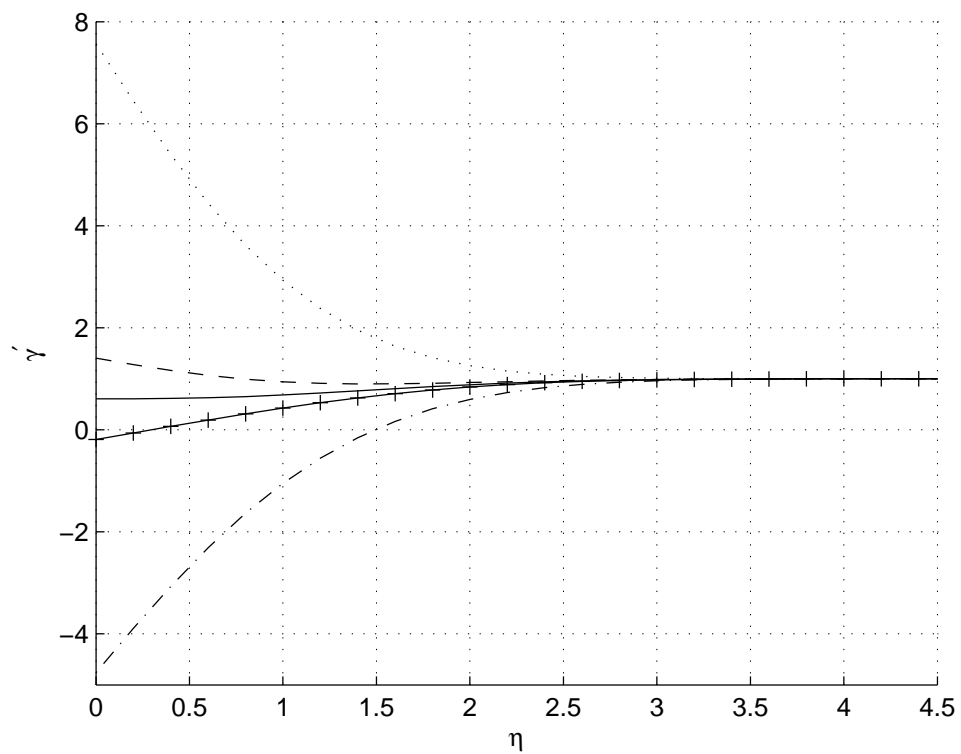


Figura 14.6: grafico di $\gamma'(\eta)$, per $\beta - \alpha = -5 - \alpha, -\alpha, 0, \alpha, 5 - \alpha$. a partire da sopra.

di coordinate

$$\xi_p = \sqrt{\frac{\nu}{a}} x_p, \quad \xi_s = \sqrt{\frac{\nu}{a}} x_s \quad (14.8.1)$$

per $\frac{b}{a} = 1$ e $\beta - \alpha = -\alpha, 0, \alpha$ rispettivamente.

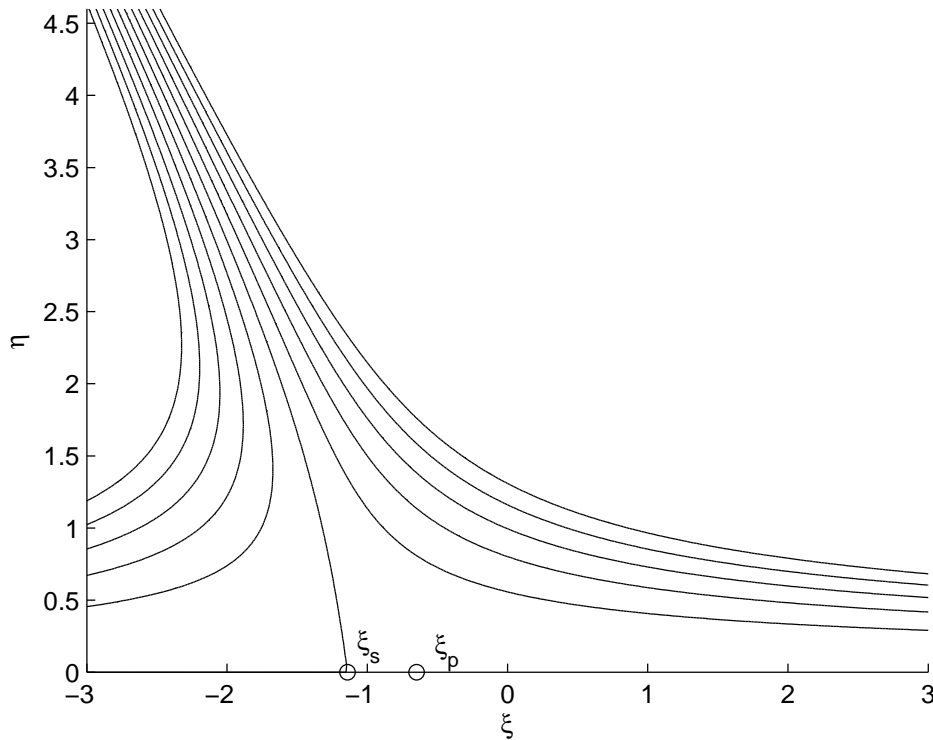


Figura 14.7: linee di flusso per $\beta - \alpha = -\alpha$

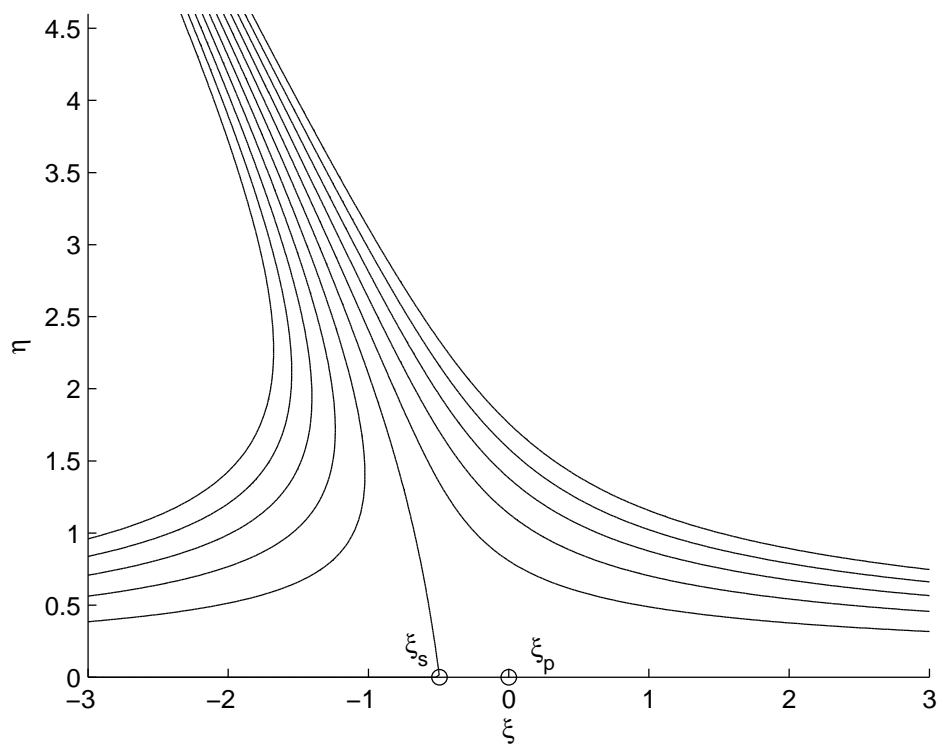


Figura 14.8: linee di flusso per $\beta - \alpha = 0$

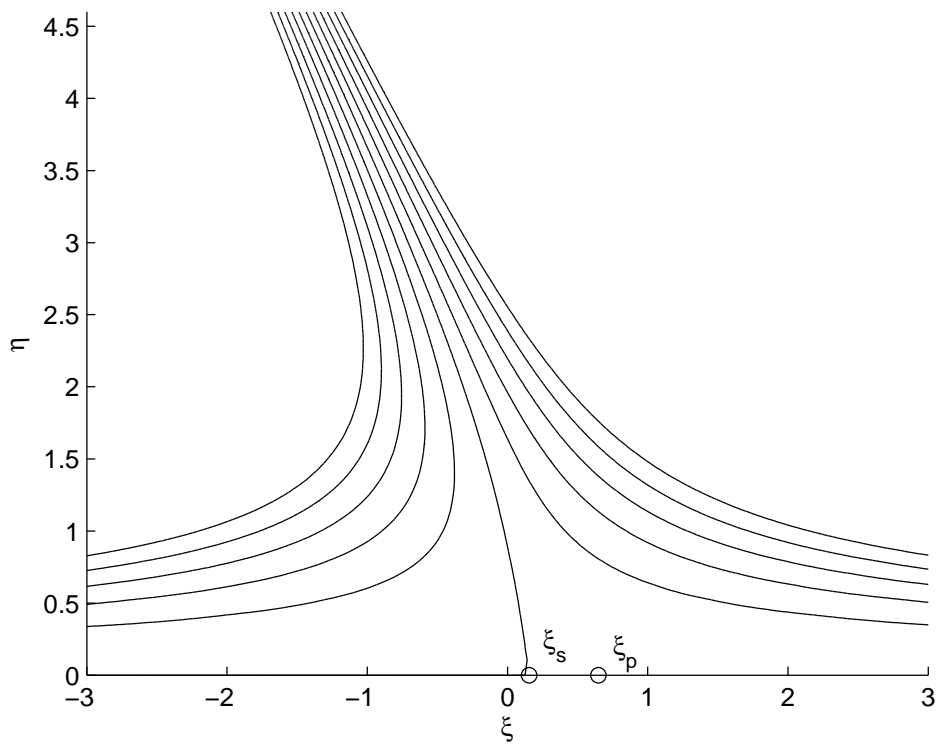


Figura 14.9: linee di flusso per $\beta - \alpha = \alpha$

Capitolo 15

Magnetofluidodinamica

15.1 Brevi richiami di elettromagnetismo

Nell'elettromagnetismo dei corpi continui svolgono un ruolo fondamentale i seguenti campi, che in genere dipendono da P e da t :

- \vec{E} campo elettrico;
- \vec{H} campo magnetico;
- \vec{D} induzione elettrica o vettore spostamento;
- \vec{B} induzione magnetica;
- ρ_e densità di volume delle cariche elettriche;
- \vec{J} densità di corrente elettrica.

Definizione 15.1. *Diremo che una regione dello spazio è sede di fenomeni elettromagnetici in un certo intervallo di tempo se in ogni punto di tale regione e ad ogni istante sono definiti i campi introdotti precedentemente.*

I campi che intervengono nell'elettromagnetismo, nell'ipotesi che siano sufficientemente regolari, sono legati tra loro dalle quattro equazioni di Maxwell che, scritte in un opportuno sistema di misura, precisamente nel Sistema Inter-

nazionale (SI), hanno la forma:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (15.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (15.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e. \quad (15.1.4)$$

Tali equazioni sono soddisfatte in ogni punto della regione S sede di fenomeni elettromagnetici ed ad ogni istante dell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ in cui i fenomeni stessi sono osservati.

Le equazioni di Maxwell esprimono in forma locale le quattro leggi, dedotte sperimentalmente, che sono alla base dell'elettromagnetismo e che sono espresse in forma globale. Precisamente la (15.1.1) è conseguenza della legge di Oersted-Ampère, la (15.1.2) della legge di Faraday-Neumann, le (15.1.3) e (15.1.4) delle leggi di Gauss per l'induzione magnetica e l'induzione elettrica rispettivamente. Per brevità, non richiamiamo tali leggi.

Si osservi che se supponiamo $\vec{H}, \vec{D} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$ e $\vec{J}, \rho_e \in \mathcal{C}^1(S \times [t_0, t_1])$, da (15.1.1) e (15.1.4) si deduce l'equazione:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1]. \quad (15.1.5)$$

Infatti basta applicare l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (15.1.1), tenere presente che $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ e sostituire a $\operatorname{div} \vec{D}$ la densità delle cariche elettriche ρ_e come conseguenza della (15.1.4).

La (15.1.5) si potrebbe ottenere anche partendo dalla relazione globale che esprime il principio di conservazione della carica elettrica. Per tale motivo la (15.1.5) è nota come **equazione di continuità dell'elettromagnetismo**.

Per quanto riguarda la densità di corrente \vec{J} , si distingue tra *corrente di conduzione* e *corrente di convezione*.

La prima è dovuta al moto di cariche elettriche senza trasporto di materia e caratterizza i conduttori, mentre la seconda è dovuta al moto di cariche elettriche con trasporto di materia ed è presente nelle soluzioni elettrolitiche.

Le equazioni (15.1.1), (15.1.2), (15.1.3), (15.1.4) e (15.1.5) esprimono quelle proprietà fondamentali che sussistono per tutti i continui che sono sede di fenomeni

elettromagnetici.

A tali equazioni dobbiamo quindi associare le relazioni che caratterizzano dal punto di vista fisico il comportamento elettromagnetico del mezzo reale che si studia, cioè le **equazioni costitutive elettromagnetiche**, che si presentano nella forma:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}(\vec{H}) \\ \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}) \\ \vec{J} &= \vec{J}(\vec{E})\end{aligned}\tag{15.1.6}$$

dove l'ultima equazione sussiste per un conduttore rigido in quiete.

Se le proprietà elettriche e magnetiche del mezzo reale preso in esame sono indipendenti dalla direzione, le (15.1.6)₁ e (15.1.6)₂ si presentano nel modo seguente:

$$\vec{B} = \mu_e \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}\tag{15.1.7}$$

dove μ_e ed ϵ sono campi scalari dipendenti da P che si ottengono sperimentalmente, detti rispettivamente *permeabilità magnetica* e *permeabilità elettrica*. Se il mezzo è omogeneo, μ_e e ϵ sono delle costanti ed, in particolare, ϵ è detta *costante dielettrica*.

Più in generale, in luogo delle (15.1.7) potremmo avere relazioni lineari della forma

$$\vec{D} = \tilde{\mu}_e \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

con $\tilde{\mu}_e$ ed $\tilde{\epsilon}$ campi tensoriali del secondo ordine.

Per quanto riguarda la densità della corrente di conduzione in un conduttore rigido in quiete, la relazione più semplice tra \vec{J} ed \vec{E} è la seguente

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}\tag{15.1.8}$$

con σ_e campo scalare dipendente da P detto *coefficiente di conducibilità elettrica*. Se per un conduttore elettrico sussiste la (15.1.8), si dice che questo è isotropo. Si noti che il campo di variazione dei valori di σ_e è enorme. Ad esempio, la conduttività del rame è 10^7 volte maggiore di quella dell'acqua di mare che è considerata un buon conduttore e 10^{19} volte maggiore di quella del vetro comune.

Anche per \vec{J} , in luogo delle (15.1.8), possiamo avere una relazione lineare più complessa della forma:

$$\vec{J} = \tilde{\sigma}_e \cdot \vec{E}$$

con $\tilde{\sigma}_e$ campo tensoriale del secondo ordine.

Note le equazioni costitutive (15.1.6), i campi incogniti scalari si riducono a 7 (E_i, H_i, ρ_e con $i = 1, 2, 3$). Tali campi soddisfano alle quattro equazioni di Maxwell equivalenti ad otto equazioni scalari.

Ma, come si verifica facilmente, se supponiamo $\vec{B}, \vec{E} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$, la (15.1.3) non è indipendente dalla (15.1.2).

Infatti se applichiamo l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (15.1.2), tenendo presente che $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0$, deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1].$$

Dunque il campo scalare $\operatorname{div} \vec{B}$ risulta indipendente dal tempo. Se assumiamo che all'istante iniziale t_0 $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ in S , otteniamo $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ in $S \times [t_0, t_1]$, ossia la (15.1.3).

Per impostare il problema in maniera completa dobbiamo poi associare alle equazioni di Maxwell ed alle equazioni costitutive opportune condizioni iniziali ed al contorno.

Le condizioni iniziali consistono nell'assegnare all'istante iniziale t_0 il campo elettrico ed il campo magnetico

$$\vec{E}(P, t_0) = \vec{E}_0(P), \quad \vec{H}(P, t_0) = \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S.$$

Per quanto riguarda le **condizioni al contorno**, queste dipendono dal problema fisico che si studia e devono comunque tenere conto delle condizioni di passaggio. Consideriamo nella regione in cui si studiano i fenomeni elettromagnetici, due corpi continui, separati da una superficie Σ e sia \vec{n} il versore della normale a Σ rivolto ad esempio verso il secondo corpo.

Si dimostra che, come conseguenze delle leggi fisiche alla base dell'elettromagnetismo, i campi vettoriali $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ devono soddisfare alle seguenti **condizioni di passaggio**:

- $\vec{n} \times \vec{E}$ è continuo attraverso Σ , cioè è continua attraverso Σ la componente di \vec{E} nel piano tangente a Σ ;
- $\vec{n} \times \vec{H}$ è continuo attraverso Σ , cioè è continua attraverso Σ la componente di \vec{H} nel piano tangente a Σ ;
- $\vec{n} \cdot \vec{B}$ è continuo attraverso Σ , cioè è continua la componente normale di \vec{B} attraverso Σ ;

- La componente normale di \vec{D} subisce una discontinuità attraverso Σ :

$$(\vec{n} \cdot \vec{D})_2 - (\vec{n} \cdot \vec{D})_1 = \omega_e$$

dove ω_e è la densità superficiale di cariche elettriche presenti su Σ .

15.2 Elementi di magnetofluidodinamica

La magnetofluidodinamica studia le interazioni macroscopiche tra liquidi o gas conduttori di elettricità ed i campi elettromagnetici.

I fenomeni che si studiano nella magnetofluidodinamica si presentano quando si ha a che fare con metalli liquidi (ad esempio mercurio e sodio liquidi), con liquidi biologici (come ad esempio il sangue), con soluzioni elettrolitiche e con gas a temperature molto elevate che subiscono un processo di ionizzazione.

Un gas ionizzato in assenza di un campo magnetico esterno si comporta come un gas classico, ossia non conduttore; se invece viene immerso in un campo magnetico esterno compaiono fenomeni che normalmente non si osservano in fluidi non conduttori. Lo studio di un gas ionizzato è comunque molto complesso in quanto compaiono diversi tipi di particelle.

Per lo studio dell'interazione tra un fluido conduttore di elettricità e campi elettromagnetici, possiamo adottare due modelli:

1. MAGNETOFLUIDODINAMICA CLASSICA

Il fluido conduttore di elettricità viene visto come un corpo continuo. Tale modello, nel caso di gas ionizzati, è utilizzato solo nei casi particolari di un campo magnetico esterno debole o di una scarsa ionizzazione del gas.

2. FISICA DEI PLASMI

E' basata su considerazioni di tipo statistico che portano alle equazioni di Boltzmann ed alla teoria cinetica. Tale modello è utilizzato soprattutto nel caso di gas altamente ionizzati.

Il nostro scopo è rimanere nell'ambito della magnetofluidodinamica, o meglio della magnetoidrodinamica, nella quale si considerano fluidi incomprimibili atti a rappresentare liquidi reali.

La magnetoidrodinamica, la magnetogasdinamica e la fisica dei plasmi intervengono notevolmente in natura: basti pensare agli oceani, alle aurore boreali, ai lampi, ai fulmini ed alle tempeste solari.

Nell'industria i plasmi ed i gas ad alte temperature vengono utilizzati per studiare il comportamento dei materiali quando vengono sottoposti ad alte temperature. Gas ad alte temperature vengono anche impiegati nelle centrali nucleari e, più in generale, nei generatori di energia.

Le soluzioni elettrolitiche sono di primaria importanza nell'industria chimica. La magnetofluidodinamica interviene anche in biomedicina poichè i fluidi biologici sono influenzati dall'applicazione di un campo magnetico esterno, come avviene ad esempio nella risonanza magnetica.

Ricordiamo infine che la ionosfera che consente le comunicazioni radio è un plasma e che la magnetogasdinamica è in generale molto sfruttata nell'industria aeronautica.

Noi ci limitiamo solo allo studio del moto di un fluido incomprimibile, conduttore di elettricità immerso in un campo magnetico esterno o, eventualmente, anche in un campo elettrico esterno.

E' evidente che le equazioni che utilizzeremo per affrontare un tale problema saranno una combinazione delle equazioni che governano il moto di un fluido (perfetto, newtoniano o anche di natura più generale) in assenza di un campo elettromagnetico, opportunamente modificate, e delle equazioni di Maxwell.

Consideriamo un fluido viscoso classico, incomprimibile, conduttore di elettricità. Supponiamo che il fluido sia omogeneo, ossia $\rho = \text{costante} > 0$ e che sia newtoniano con $\mu = \text{costante} > 0$.

Se il fluido è immerso in un campo elettromagnetico, oltre a $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ e a $p(P, t)$, dobbiamo introdurre i quattro campi vettoriali che intervengono in Elettromagnetismo:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}(P, t) && \text{(campo magnetico)} \\ \vec{B} &= \vec{B}(P, t) && \text{(campo induzione magnetica)} \\ \vec{E} &= \vec{E}(P, t) && \text{(campo elettrico)} \\ \vec{D} &= \vec{D}(P, t) && \text{(campo spostamento elettrico o induzione elettrica)}.\end{aligned}$$

Inoltre, essendo il fluido conduttore, sarà definito anche il campo della densità della corrente elettrica di conduzione

$$\vec{J} = \vec{J}(P, t).$$

Assumiamo poi che le proprietà elettriche e magnetiche dal fluido siano indipendenti dalla direzione e che si abbia precisamente:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \text{cost} > 0 && \text{(costante dielettrica);} \\ \sigma_e &= \text{cost} > 0 && \text{(coefficiente di conducibilità elettrica);} \\ \mu_e &= \text{cost} > 0 && \text{(permeabilità magnetica)}.\end{aligned}$$

Per semplicità aggiungiamo l'ipotesi che la costante dielettrica ϵ sia sufficientemente piccola da poter considerare trascurabile la *corrente di spostamento*, data

da $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

L'interazione del fluido con il campo magnetico (ed eventualmente con quello elettrico) esterno, in cui è immerso, produce un campo magnetico ed elettrico indotti e questi una corrente elettrica. D'altra parte il campo elettromagnetico così come la corrente elettrica danno origine a forze di massa di natura elettromagnetica (forze di Lorentz) che agiscono sul fluido e che si aggiungono alle forze esterne di natura meccanica.

Se si suppone che nel fluido non siano distribuite cariche elettriche libere, la densità delle forze di Lorentz è data da

$$\vec{F}_{em} = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Dunque, preso un sottocorpo arbitrario \mathcal{C}^* del fluido occupante all'istante t la regione $\mathcal{S}^*(t)$, il risultante ed il momento risultante delle forze esterne agenti su \mathcal{C}^* sono dati da

$$\begin{aligned} \vec{R}^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[\rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B} \right] dS + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma \\ \vec{\Omega}_o^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[(P - O) \times (\rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B}) \right] dS + \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \left[(P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) \right] d\Sigma, \end{aligned} \quad (15.2.1)$$

dove O è un punto dello spazio geometrico, fisso rispetto all'osservatore.

La presenza del termine aggiuntivo $\vec{J} \times \vec{B}$ modifica la prima equazione indefinita della meccanica che, sfruttando le relazioni sforzo-deformazione e l'incompressibilità del fluido, assume la forma

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B}.$$

Non viene invece modificata la seconda equazione indefinita della meccanica che porta sempre alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Scriviamo le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano omogeneo, incompressibile, conduttore di elettricità in presenza di un campo elettromagnetico.

1. Prima equazione indefinita della meccanica, avendo sfruttato la relazione sforzo-deformazione:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (15.2.2)$$

2. **Condizione d'incomprimibilità:**

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (15.2.3)$$

3. **Equazioni di Maxwell, avendo trascurato la corrente di spostamento e supposto che non ci siano cariche elettriche libere:**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (15.2.4)$$

4. **Equazioni costitutive per \vec{B} , \vec{D} , \vec{J} :**

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_e \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (15.2.5)$$

La presenza del termine $\sigma_e(\vec{v} \times \vec{B})$ nell'equazione (15.2.5)₃ è dovuta al fatto che abbiamo un fluido in moto. Nel caso di un gas debolmente ionizzato in un campo magnetico esterno intenso, l'equazione costitutiva per \vec{J} sarebbe più complicata a causa della comparsa di ulteriori fenomeni come l'effetto Hall e l'effetto ion-slip, che noi non prendiamo in considerazione.

Utilizzando le (15.2.5), riscriviamo le equazioni di Maxwell (15.2.4) nella forma

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \mu_e \vec{H}) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (15.2.6)$$

Analogamente la prima equazione indefinita si può scrivere nel modo seguente:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}.$$

Se supponiamo \vec{H} di classe \mathcal{C}^2 , sfruttando le (15.2.6)_{1,2} possiamo eliminare il campo elettrico \vec{E} dalle equazioni che governano il moto del fluido.

Infatti applicando ad entrambi i membri della (15.2.6)₁ l'operatore rotore deduciamo:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \sigma_e \text{rot} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

da cui, essendo $\text{rot } \vec{E} = -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, si ha:

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Poichè $\vec{H} \in C^2$, per la (15.2.6)₃, otteniamo

$$\Delta \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \text{rot rot } \vec{H} = -\text{rot rot } \vec{H}.$$

Perciò:

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Se poniamo $\eta_e = \frac{1}{\sigma_e \mu_e}$, detta *resistività*, si ha:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Dunque le equazioni che governano la magnetoidrodinamica di un fluido newtoniano, omogeneo, incomprimibile, conduttore di elettricità si riducono a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\mu_e}{\rho} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} \quad (15.2.7) \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Le incognite scalari sono 7 : v_i , p , H_i con $i = 1, 2, 3$.

Per enunciare il problema ai limiti in maniera completa, dobbiamo associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Se $t_0 = 0$ le condizioni iniziali sono:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \\ \vec{H}(P, 0) &= \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S(0). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che la frontiera $\partial S(t)$ sia formata da pareti materiali rigide, il cui atto di moto è dato da:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t)$$

e che le pareti $\partial S(t)$ non siano conduttrici di elettricità.

Allora, $\forall t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{\partial S(t)} &= \vec{V} \\ \vec{H}_\tau|_{\partial S(t)} &= \vec{H}_{e\tau}|_{\partial S(t)} \end{aligned}$$

dove il pedice τ è stato utilizzato per denotare la componente di \vec{H} e del campo magnetico esterno \vec{H}_e nel piano tangente a $\partial S(t)$.

Osserviamo che la condizione al contorno per \vec{H} è conseguenza delle condizioni di passaggio enunciate nel paragrafo precedente.

Concludiamo con l'osservazione che si potrebbero scrivere facilmente anche le equazioni che governano il moto di un fluido conduttore di elettricità perfetto, omogeneo ed incompressibile oppure di altra natura, purchè omogeneo ed incompressibile, immerso in un campo elettromagnetico.

Si scrivono le equazioni che ne governano il moto in assenza del campo elettromagnetico modificando soltanto la prima equazione indefinita con l'inserimento del termine:

$$\mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H},$$

dovuto alle forze di Lorentz e si aggiungono le equazioni di Maxwell.

Nei due paragrafi successivi studiamo i moti di Poiseuille e di Couette tra due piani paralleli per un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, già studiati nel Capitolo 7, assumendo che il fluido sia conduttore di elettricità e che sia applicato un campo magnetico esterno costante normale ai due piani.

15.3 Moto di Poiseuille tra due piani in un campo magnetico esterno

Consideriamo un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, conduttore di elettricità, in assenza di forze di massa meccaniche ($\vec{F} \equiv \vec{0}$) che si muova di moto stazionario tra due piani Π_1 e Π_2 , paralleli, rigidi, fissi rispetto all'osservatore.

Supponiamo inoltre che il fluido sia immerso in un campo magnetico esterno

costante, \vec{H}_0 , diretto perpendicolarmente ai due piani ed orientato da Π_1 verso Π_2 .

Fissiamo il riferimento $Ox_1x_2x_3$ come nel Capitolo 7, per cui:

$$\Pi_\alpha = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h\}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h]\},$$

essendo $2h$ la distanza tra i due piani.

Poichè siamo in condizioni stazionarie:

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{H} = \vec{H}(P).$$

Per le ipotesi in cui ci siamo posti, le equazioni che governano il moto del fluido preso in esame in S si riducono a:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \eta_e \Delta \vec{H} &= \operatorname{rot} (\vec{H} \times \vec{v}) \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{15.3.1}$$

A tali equazioni associamo le condizioni al contorno

$$\vec{v}|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_{\Pi_2} = \vec{0} \tag{15.3.2}$$

$$\vec{H}_\tau|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{H}_\tau|_{\Pi_2} = \vec{0}. \tag{15.3.3}$$

Le (15.3.2) sono le usuali condizioni di aderenza.

Le (15.3.3) sono conseguenze della continuità della componente tangenziale del campo magnetico attraverso i due piani Π_1, Π_2 e del fatto che il campo magnetico esterno è $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$, per cui $\vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_1} = \vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_2} = \vec{0}$.

Risolvere il problema (15.3.1), (15.3.2), (15.3.3), significa trovare le terne (\vec{v}, p, \vec{H}) con $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$, $p \in \mathcal{C}^1(S)$, $\vec{H} \in \mathcal{C}^2(S)$ tali che (\vec{v}, p, \vec{H}) soddisfa in S alle equazioni (15.3.1) e \vec{v}, \vec{H} verificano le (15.3.2), (15.3.3).

A questo punto assumiamo che al di fuori della regione occupata dal fluido, dove il campo magnetico è quello esterno, cioè \vec{H}_0 , ci sia il vuoto e che il fluido abbia la stessa permeabilità magnetica del vuoto. Questa condizione non è restrittiva perchè è soddisfatta nella realtà da molti metalli liquidi, come ad esempio il mercurio.

In base a tale ipotesi, per le condizioni di passaggio dell'elettromagnetismo, risulta continua attraverso i due piani Π_1 e Π_2 anche la componente normale del campo magnetico.

Un moto di Poiseuille per il fluido preso in esame, immerso nel campo magnetico $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$ è costituito da una terna (\vec{v}, p, \vec{H}) che sia soluzione del problema (15.3.1), (15.3.2), (15.3.3), con \vec{v}, \vec{H} soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- i) $\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1$ in $\xi(S)$
- ii) $\vec{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1 + H_0 \vec{e}_2$ in $\xi(S)$

dove $\vec{H} = \hat{H} \vec{e}_1$ è il campo magnetico indotto.

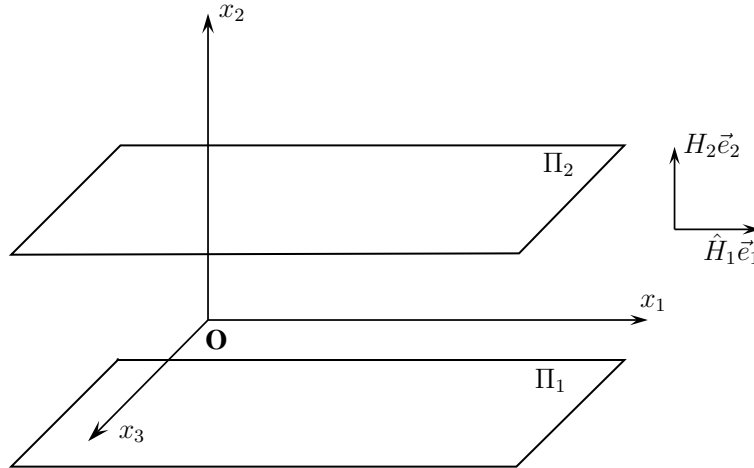


Figura 15.1: Geometria del problema in presenza del campo magnetico.

Osservazione 15.1. Se la permeabilità magnetica μ_e del fluido è diversa da quella del vuoto μ_0 , si richiede che il campo magnetico abbia la seguente rappresentazione analitica:

$$\vec{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1 + \frac{\mu_0}{\mu_e} H_0 \vec{e}_2 \quad \text{in } \xi(S)$$

per assicurare la continuità attraverso i due piani Π_1, Π_2 della componente normale del vettore di induzione magnetica.

Grazie all'equazione $\text{div } \vec{v} = 0$ si ha $v_1 = v_1(x_2)$, $x_2 \in [-h, h]$.

Analogamente per \vec{H} :

$$\text{div } \vec{H} = \text{div } \widehat{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{H} = \widehat{H}(x_2), \quad x_2 \in [-h, h].$$

Vediamo ora di scrivere in componenti la prima e la terza equazione di (15.3.1).

Iniziamo col procurarci $\text{rot } \vec{H}$:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \widehat{H} = -\frac{d\widehat{H}}{dx_2} \vec{e}_3$$

da cui

$$\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} = -\frac{d\widehat{H}}{dx_2} \vec{e}_3 \times (H_0 \vec{e}_2 + \widehat{H} \vec{e}_1) = H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{d\widehat{H}}{dx_2} \widehat{H} \vec{e}_2 = H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{1}{2} \frac{d\widehat{H}^2}{dx_2} \vec{e}_2.$$

Consideriamo poi

$$\vec{H} \times \vec{v} = (H_0 \vec{e}_2 + \widehat{H} \vec{e}_1) \times v_1 \vec{e}_1 = -H_0 v_1 \vec{e}_3$$

e quindi

$$\text{rot } (\vec{H} \times \vec{v}) = -H_0 \text{rot } (v_1 \vec{e}_3) = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2} \vec{e}_1.$$

Andiamo ora a proiettare sugli assi coordinati la prima e la terza equazione di (15.3.1).

Ricordando che $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, come abbiamo visto nel Capitolo 7, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\mu_e \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\widehat{H}^2}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2} + p \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2) \\ \eta_e \frac{d^2 \widehat{H}}{dx_2^2} &= -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \end{aligned} \tag{15.3.4}$$

Dalle (15.3.4)₂, (15.3.4)₃ deduciamo che $\mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2} + p$ dipende solo da x_1 .

Poichè \widehat{H} dipende solo da x_2 , abbiamo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \left[p + \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2} \right].$$

E' conveniente porre

$$p^* = p + \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2}$$

e definire p^* *pressione modificata*.

Con tale definizione, sostituendo nella (15.3.4)₁, otteniamo:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2}(x_2). \quad (15.3.5)$$

Vediamo allora che il primo membro della (15.3.5) è funzione solo di x_1 , mentre il secondo membro è funzione solo di x_2 . Poichè x_1 e x_2 sono variabili indipendenti e la relazione (15.3.5) deve sussistere $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in [-h, h]$, concludiamo che necessariamente entrambi i membri della (15.3.5) devono essere uguali ad una stessa costante che denotiamo con $-C$.

Dunque la (15.3.5) dà luogo alle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad (15.3.6)$$

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2}(x_2) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \quad (15.3.7)$$

Se integriamo la (15.3.6) otteniamo:

$$p^* = -Cx_1 + p_0^* \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

con p_0^* = costante arbitraria e C salto della pressione modificata p^* nella direzione Ox_1 .

Tenendo presente la definizione di p^* , per la pressione effettiva p deduciamo la forma seguente:

$$p = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^*.$$

La pressione ha un'espressione differente rispetto al moto di Poiseuille in assenza di campo magnetico, essendo presente il termine \widehat{H} dipendente anche da x_2 .

All'equazione (15.3.7)

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\widehat{H}}{dx_2}(x_2) = -C$$

aggiungiamo l'equazione

$$\eta_e \frac{d^2 \widehat{H}}{dx_2^2} = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \quad (15.3.8)$$

Per determinare i moti cercati, siamo così condotti a risolvere il problema differenziale, che si ottiene associando al sistema di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (15.3.7), (15.3.8) nelle due funzioni incognite $v_1 = v_1(x_2)$, $\widehat{H} = \widehat{H}(x_2)$ le **condizioni al contorno**:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0 \quad (15.3.9)$$

$$\widehat{H}(-h) = \widehat{H}(h) = 0. \quad (15.3.10)$$

In primo luogo determiniamo la soluzione generale del sistema lineare (15.3.7), (15.3.8)

Integrando la (15.3.8) otteniamo:

$$\eta_e \frac{d\widehat{H}}{dx_2} = -H_0 v_1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\widehat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e}, \quad (15.3.11)$$

con $C_1 =$ costante arbitraria.

Sostituendo nella (15.3.7) deduciamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \left(-\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e} \right) = -C$$

da cui

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - \frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{\mu_e H_0 C_1}{\eta_e \mu}.$$

Poniamo

$$\frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} = \frac{\sigma_e \mu_e^2}{\mu} H_0^2 = A^2$$

per cui l'equazione precedente risulta:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - A^2 v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{A^2 C_1}{H_0}.$$

Otteniamo così un'equazione del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea nella sola funzione incognita $v_1(x_2)$.

La soluzione generale dell'equazione precedente è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'omogenea si può scrivere nella forma:

$$C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2), \quad (15.3.12)$$

con C_2, C_3 costanti arbitrarie, mentre una soluzione particolare della completa è una costante a tale che:

$$A^2 a = \frac{C}{\mu} + \frac{A^2 C_1}{H_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (15.3.13)$$

La soluzione generale dell'equazione completa è perciò:

$$v_1(x_2) = C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (15.3.14)$$

Sostituendo nella (15.3.11) si ha

$$\frac{d\hat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} \left[C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} \right],$$

equazione, che integrata, fornisce:

$$\hat{H}(x_2) = -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh(Ax_2) + C_3 \cosh(Ax_2)] - \frac{H_0 C x_2}{\eta_e \mu A^2} + C_4, \quad (15.3.15)$$

$C_4 =$ costante arbitraria.

La soluzione generale del sistema (15.3.7), (15.3.8) è rappresentata dalla coppia (v_1, \hat{H}) , dove v_1 e \hat{H} sono date dalle (15.3.14) e (15.3.15) in cui compaiono le 4 costanti arbitrarie C_1, C_2, C_3, C_4 .

Per determinare le costanti, imponiamo le condizioni al contorno.

Quelle relative a v_1 forniscono:

$$\begin{aligned} (v_1(-h) = 0) \quad & C_2 \cosh(Ah) - C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \\ (v_1(h) = 0) \quad & C_2 \cosh(Ah) + C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \end{aligned}$$

Introduciamo ora il seguente parametro adimensionale, noto come *numero di Hartmann*:

$$M = Ah,$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$M = Ah = \sqrt{\frac{\mu_e}{\mu \eta_e}} H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \mu_e H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} B_0 h.$$

Le condizioni al contorno relative ad \hat{H} danno

$$(\hat{H}(-h) = 0) \quad -\frac{H_0}{\eta_e A} [-C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] + \frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0$$

$$(\widehat{H}(h) = 0) \quad - \frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] - \frac{H_0 P h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0.$$

Dalle prime due equazioni deduciamo immediatamente che $C_3 = 0$; analogamente dalle ultime due equazioni segue $C_4 = 0$.

Dalla terza equazione possiamo ricavare C_2 :

$$C_2 \frac{H_0}{\eta_e A} \sinh M = - \frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} \implies C_2 = - \frac{C h}{\mu A} \frac{1}{\sinh M};$$

dalla prima si ottiene invece C_1 , o meglio $\frac{C_1}{H_0}$:

$$\frac{C_1}{H_0} = -C_2 \cosh M - \frac{C}{\mu A^2} = - \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M}.$$

Andando poi a sostituire nelle espressioni (15.3.14) e (15.3.15) di v_1 e \widehat{H} , deduciamo

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= - \frac{C h \cosh \left(M \frac{x_2}{h} \right)}{\mu A \sinh M} + \frac{C}{\mu A^2} - \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M} = \\ &= \frac{C h^2 \cosh M - \cosh \left(M \frac{x_2}{h} \right)}{\mu M \sinh M}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{H}(x_2) &= \frac{H_0 C h \sinh \left(M \frac{x_2}{h} \right)}{\eta_e A \mu A \sinh M} - \frac{H_0 C h x_2}{\mu \eta_e A^2 h} = \\ &= \frac{C h H_0 \sinh \left(M \frac{x_2}{h} \right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{\mu \eta_e A^2 \sinh M}, \end{aligned}$$

dove $x_2 \in [-h, h]$.

Scriviamo ora in maniera differente il coefficiente che compare nell'espressione di \widehat{H} :

$$\frac{C h H_0}{\mu \eta_e A^2} = \frac{C h H_0}{\mu \eta_e} \frac{\mu \eta_e}{\mu_e H_0^2} = \frac{C h}{B_0}.$$

Perciò:

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{C h}{B_0} \frac{\sinh \left(M \frac{x_2}{h} \right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{\sinh M}. \quad (15.3.16)$$

Osservazione 15.2. Se $C = 0$, ossia se la pressione modificata è costante, allora $v_1(x_2) = 0$, $\widehat{H}(x_2) = 0$, $\forall x_2 \in [-h, h]$.

Osservazione 15.3. Fissati tutti gli altri parametri fisici del problema, in corrispondenza di ogni valore C del salto della pressione modificata si ha uno ed un solo moto della forma cercata.

Il moto di Poiseuille tra due piani fissi di un fluido newtoniano immerso in un campo magnetico esterno costante, perpendicolare ai due piani Π_1 e Π_2 , è anche noto come *moto di Hartmann*.

Possiamo sintetizzare i risultati trovati nel seguente:

Teorema 15.1. *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, conduttore di elettricità, occupante la regione S tra due piani paralleli, rigidi e fissi, immerso in un campo magnetico esterno \vec{H}_0 costante, normale ai due piani, un moto di Hartmann è possibile solo se la pressione modificata p^* presenta un salto $C \neq 0$ nella direzione Ox_1 parallela ai due piani, e precisamente si ha:*

$$p(x_1, x_2) = -Cx_1 - \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^* \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1 \quad \vec{H} = \hat{H}(x_2)\vec{e}_1 + H_0\vec{e}_2$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\hat{H}(x_2) = \frac{Ch}{B_0} \frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M)\frac{x_2}{h}}{\sinh M} \quad x_2 \in [-h, h].$$

Supponiamo ora $M \ll 1$ e nell'espressione di v_1 sviluppiamo in serie di Taylor, con punto iniziale 0, $\cosh M$, $\cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)$ e $\sinh M$.

Se trascuriamo i termini che contengono potenze di M di grado superiore al secondo, otteniamo per v_1 la seguente espressione approssimata:

$$v_1(x_2) \cong \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2}\left(\frac{x_2}{h}\right)^2}{M} = \frac{Ch^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right]$$

che è l'espressione che abbiamo trovato per il moto di Poiseuille nel caso di un fluido non conduttore.

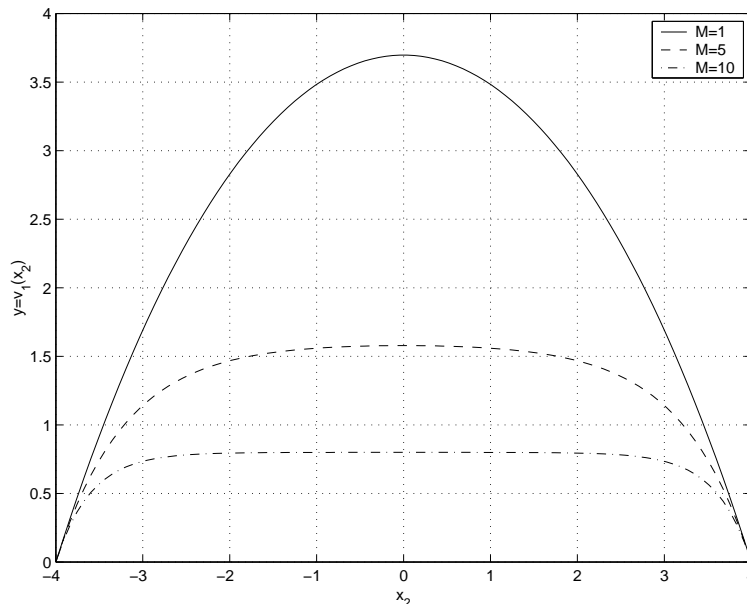


Figura 15.2: Grafico di $v_1(x_2)$ per $M = 1, 5, 10$.

Per quanto riguarda \widehat{H} , procedendo nello stesso modo, deduciamo:

$$\widehat{H}(x_2) \cong \frac{Ch}{B_0} \frac{M \frac{x_2}{h} - M \frac{x_2}{h}}{M} = 0.$$

E' ora opportuno fornire i grafici di $v_1(x_2)$ e $\widehat{H}(x_2)$, attribuendo ai parametri che compaiono in tali espressioni dei valori numerici fisicamente significativi. Riferiamoci sempre al mercurio liquido a temperatura ambiente, per il quale i valori numerici sono i seguenti:

$$\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_e = 10^6 \text{ S m}^{-1}, \quad \mu_e = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}.$$

Per semplicità limitiamoci a considerare solo il caso $C > 0$.

Per mettere in rilievo l'influenza del campo magnetico esterno sul moto, supponiamo che C abbia lo stesso valore (> 0) del Capitolo 7 nel moto di Poiseuille, mentre per M assumiamo tre valori possibili:

$$M = 1, \quad M = 5, \quad M = 10.$$

Come possiamo vedere esaminando la Figura 15.2 e confrontandola con la 7.2, deduciamo che in presenza di \vec{H}_0 , il grafico della velocità giace al di sotto di quello relativo al caso $\vec{H}_0 = \vec{0}$. Otteniamo inoltre che per $M = 1$ l'andamento

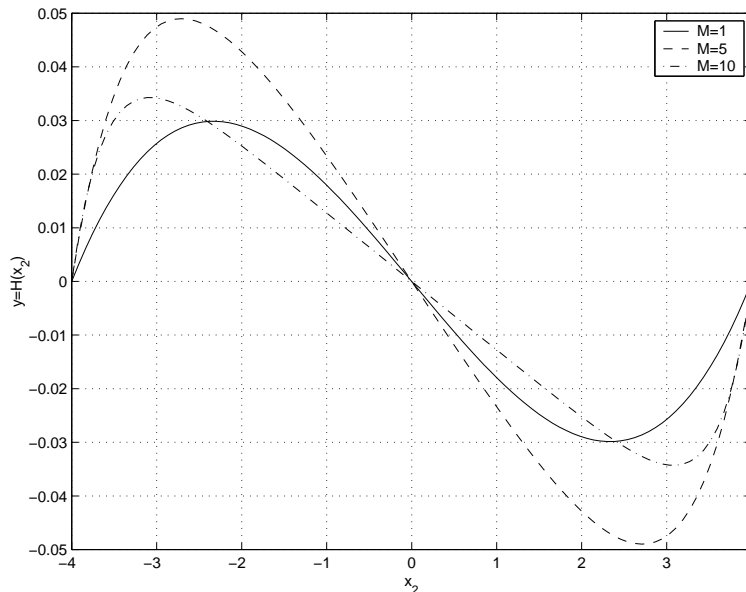


Figura 15.3: Grafico di $\hat{H}(x_2)$ per $M = 1, 5, 10$.

di $v_1(x_2)$ non è molto dissimile dal caso $\vec{H}_0 = \vec{0}$, mentre all'aumentare di M la velocità risulta costante su un intervallo la cui ampiezza cresce al crescere di M . Dunque a contatto con i due piani Π_1 e Π_2 , si forma un boundary layer o strato al contorno, nei punti del quale la velocità aumenta rapidamente all'aumentare di x_2 per poi assumere un valore costante.

Nella Figura 15.3 è riportato l'andamento del campo magnetico indotto. Vediamo che il grafico è simmetrico rispetto all'origine e che \hat{H} presenta un massimo ed un minimo. Per $M = 5$ il massimo è elevato ed il minimo assume un valore molto basso, mentre per $M = 10$, il massimo ed il minimo hanno valori vicini a quelli che riscontriamo per $M = 1$. Inoltre, in tutti e tre i casi, per $x_2 = 0$ il campo magnetico indotto risulta uguale a zero.

15.4 Moto di Couette tra due piani in un campo magnetico esterno.

Consideriamo ora un problema analogo a quello di Couette per un fluido newtoniano considerato nel Capitolo 7.

Supponiamo che il fluido soddisfi alle stesse ipotesi del paragrafo precedente e che si muova di moto stazionario tra due piani Π_1 e Π_2 rigidi, tra loro paralleli, di cui Π_1 è fisso rispetto all'osservatore, mentre Π_2 si muove di moto traslatorio

rettilineo ed uniforme, con velocità \vec{V} parallela al piano stesso.

Fissiamo il riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$ con Ox_1 punto equidistante dai due piani, l'asse Ox_1 parallelo ai due piani con direzione e verso di \vec{V} , l'asse Ox_2 normale ai due piani e l'asse Ox_3 di conseguenza.

Come nel paragrafo precedente, supponiamo che il campo magnetico esterno \vec{H}_0 , in cui il fluido è immerso, sia costante, normale ai due piani ed orientato da Π_1 verso Π_2 per cui

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$$

con H_0 costante positiva.

Anche in tal caso assumiamo che al di fuori della regione occupata dal fluido, dove il campo magnetico è quello esterno, cioè \vec{H}_0 , ci sia il vuoto e che il fluido abbia la stessa permeabilità magnetica del vuoto.

Le equazioni che governano il moto del fluido sono le stesse del paragrafo precedente.

Inoltre, come per il moto di Hartmann, supponiamo

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1,$$

per cui, grazie alla condizione sulla divergenza

$$\vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1.$$

Anche nel nuovo problema esaminato cerchiamo il campo magnetico della forma:

$$\vec{\widehat{H}} = \widehat{H} + H_0 \vec{e}_2$$

con $\vec{\widehat{H}} = \widehat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1$ campo magnetico indotto.

Grazie all'equazione $\text{div } \vec{\widehat{H}} = 0$ deduciamo:

$$\vec{\widehat{H}} = \widehat{H}(x_2) \vec{e}_1.$$

Rispetto al paragrafo precedente variano solo le condizioni al contorno per la velocità:

$$\vec{v}|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1 \quad (V = \text{cost} > 0).$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto visto per il moto di Poiseuille in presenza del campo magnetico esterno \vec{H}_0 , si arriva a stabilire per la pressione l'espressione

$$p = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^*$$

con p_0^* costante arbitraria.

Inoltre $(v_1(x_2), \widehat{H}(x_2))$ è soluzione del sistema delle due equazioni differenziali

ordinarie, visto nel paragrafo precedente. La sua soluzione generale, ottenuta in precedenza, è data da:

$$v_1(x_2) = C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} \quad (15.4.1)$$

$$\widehat{H}(x_2) = -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh(Ax_2) + C_3 \cosh(Ax_2)] - \frac{CH_0 x_2}{\eta_e \mu A^2} + C_4 \quad (15.4.2)$$

dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti arbitrarie da determinarsi mediante le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v_1(-h) &= 0 & v_1(h) &= V \\ \widehat{H}(-h) &= 0 & \widehat{H}(h) &= 0. \end{aligned}$$

Le prime due condizioni danno luogo alle due equazioni

$$C_2 \cosh M - C_3 \sinh M + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \quad (15.4.3)$$

$$C_2 \cosh M + C_3 \sinh M + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = V \quad (15.4.4)$$

con $M = Ah$, numero di Hartmann.

Le condizioni al contorno per \widehat{H} forniscono

$$-\frac{H_0}{\eta_e A} [-C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] + \frac{CH_0 h}{\eta_e \mu A^2} + C_4 = 0 \quad (15.4.5)$$

$$-\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] - \frac{CH_0 h}{\eta_e \mu A^2} + C_4 = 0. \quad (15.4.6)$$

Sottraendo la (15.4.3) da (15.4.4), membro a membro, otteniamo:

$$2C_3 \sinh M = V \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{V}{2} \frac{1}{\sinh M}.$$

Sommando membro a membro (15.4.5) e (15.4.6) ed utilizzando l'espressione di C_3 , deduciamo

$$\frac{2H_0 V \cosh M}{\eta_e A 2 \sinh M} = 2C_4$$

da cui

$$C_4 = \frac{H_0 V \cosh M}{2\eta_e A \sinh M}$$

Dall'equazione (15.4.5) possiamo ricavare C_2 . Infatti

$$\frac{H_0 C_2}{\eta_e A} \sinh M = -\frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2}$$

che fornisce

$$C_2 = -\frac{C h}{\mu A} \frac{1}{\sinh M}.$$

Dall'equazione (15.4.3) ricaviamo C_1 , o meglio $\frac{C_1}{H_0}$. Infatti

$$\frac{C_1}{H_0} = -\frac{C}{\mu A^2} - C_2 \cosh M + C_3 \sinh M = -\frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M} + \frac{V}{2}.$$

In definitiva, la soluzione del problema differenziale è data da

$$v_1(x_2) = \frac{C h^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} + \frac{V}{2} \frac{\sinh M + \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2} \left[\frac{\sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \right] + \frac{H_0 V \cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{2 \eta_e A \sinh M} \quad x_2 \in [-h, h].$$

Possiamo scrivere in maniera differente il primo coefficiente, sostituendo ad A^2 la sua espressione. Infatti otteniamo

$$\frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2} = \frac{C h}{\mu_e H_0} = \frac{C h}{B_0}.$$

In maniera analoga per il secondo coefficiente abbiamo

$$\frac{H_0 V}{2 \eta_e A} = \frac{H_0 V \mu_e \sigma_e}{2 \sqrt{\sigma_e \mu_e} H_0} = \frac{V \sqrt{\mu \sigma_e}}{2}.$$

L'espressione finale di \widehat{H} è quindi:

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{C h}{B_0} \left[\frac{\sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \right] + \frac{V \sqrt{\mu \sigma_e}}{2} \frac{\cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h].$$

Facciamo ora alcune osservazioni analoghe a quelle fatte per il moto di Hartmann.

Osservazione 15.4. Se $C = 0$, ossia se la pressione modificata è costante, allora

$$v_1(x_2) = \frac{V}{2} \frac{\sinh M + \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{V\sqrt{\mu\sigma_e}}{2} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h].$$

Osservazione 15.5. Se $V = 0$ si ritrovano le espressioni di v_1 e di \widehat{H} ottenute per il moto di Hartmann.

Osservazione 15.6. Per valori fissati di tutti gli altri parametri fisici del problema, in corrispondenza di ogni salto C della pressione modificata, si ha uno ed un solo moto di Couette, in presenza del campo magnetico esterno \vec{H}_0 .

I risultati trovati si possono sintetizzare nel seguente:

Teorema 15.2. *Sia dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, conduttore di elettricità, occupante la regione S tra due piani paralleli Π_1 e Π_2 , con Π_1 fisso e Π_2 dotato di un moto traslatorio rettilineo uniforme in direzione parallela al piano stesso. Se il fluido è immerso in un campo magnetico esterno \vec{H}_0 , normale ai due piani, un moto di Couette è possibile solo se la pressione modificata p^* presenta un salto $C \neq 0$ nella direzione Ox_1 della velocità di traslazione \vec{V} di Π_2 e precisamente si ha*

$$p(x_1, x_2) = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2(x_2)}{2} + p_0^* \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1, \quad \vec{H} = \widehat{H}(x_2)\vec{e}_1 + H_0\vec{e}_2, \quad x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} + \frac{V \sinh M + \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{2 \sinh M},$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{Ch}{B_0} \left[\frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M)\frac{x_2}{h}}{\sinh M} \right] + \frac{V\sqrt{\mu\sigma_e}}{2} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}.$$

Vediamo ora di rappresentare i grafici di $v_1(x_2)$ e $\widehat{H}(x_2)$ assegnando opportuni valori numerici ai parametri che compaiono nella loro espressione.

Come per i precedenti grafici, consideriamo il mercurio liquido a temperatura ambiente, per cui:

$$\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg } m^{-1} s^{-1}, \quad \sigma_e = 10^6 \text{ S } m^{-1}, \quad \mu_e = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H } m^{-1}.$$

Limitiamoci a considerare $C > 0$ ed assumiamo per h , C ($C > 0$), V gli stessi valori presi in considerazione per il moto di Couette in assenza del campo

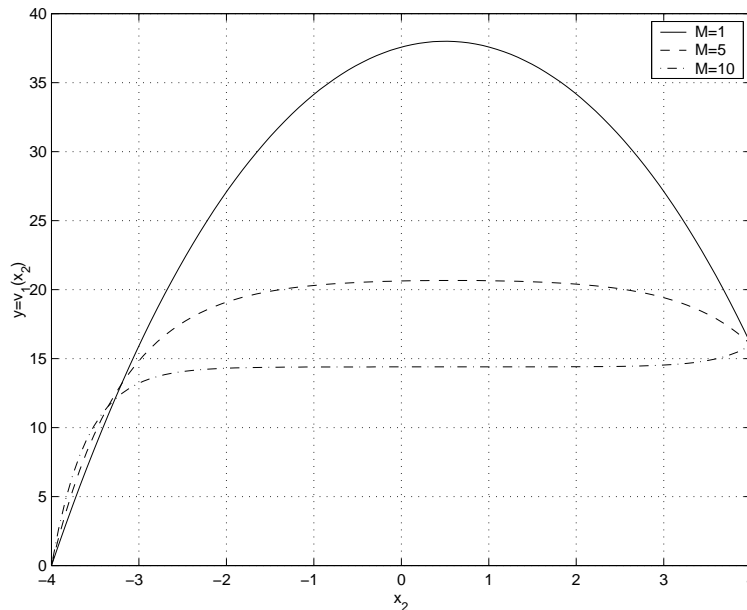


Figura 15.4: Grafico di $v_1(x_2)$, caso 1

magnetico attribuendo a M i valori 1, 5, 10.

Nelle Figure 15.4, 15.5 rappresentiamo i grafici di v_1 e nelle Figure 15.6, 15.7 quelli di \hat{H} nei due casi:

$$C = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}, \text{ (caso 1)} \quad C = 0.32 \cdot 10^{-3} \text{Kg m}^{-2} \text{s}^{-2} \text{ (caso 2)}.$$

Osservando le Figure 15.4, 15.5 vediamo che, come nel moto di Hartmann, per $M = 1$ l'andamento di v_1 non è molto dissimile dal caso in assenza del campo magnetico, mentre all'aumentare di M la velocità resta costante in un intervallo la cui ampiezza aumenta al crescere di M . Infine dalle Figure 15.6, 15.7 notiamo che in tal caso l'andamento di \hat{H} è diverso dal caso del moto di Hartmann. Infatti vediamo che per $M = 1$ ha un andamento quasi parabolico, mentre all'aumentare di M , \hat{H} tende ad essere costante su un intervallo la cui ampiezza aumenta all'aumentare di M . Questo andamento è conforme al fatto che, per i valori numerici scelti, prevale in maniera rilevante il secondo termine legato al moto traslatorio del piano Π_2 .

Come nel paragrafo precedente, vediamo quale espressione assumono $v_1(x_2)$ e $\hat{H}(x_2)$ se $M \ll 1$, ossia, a parità di tutti gli altri parametri fisici, se il campo magnetico esterno è di debole intensità.

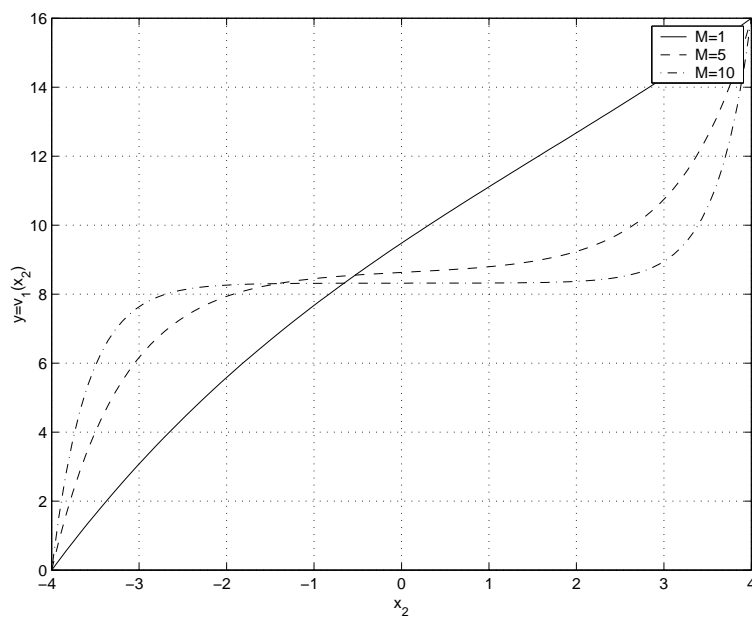
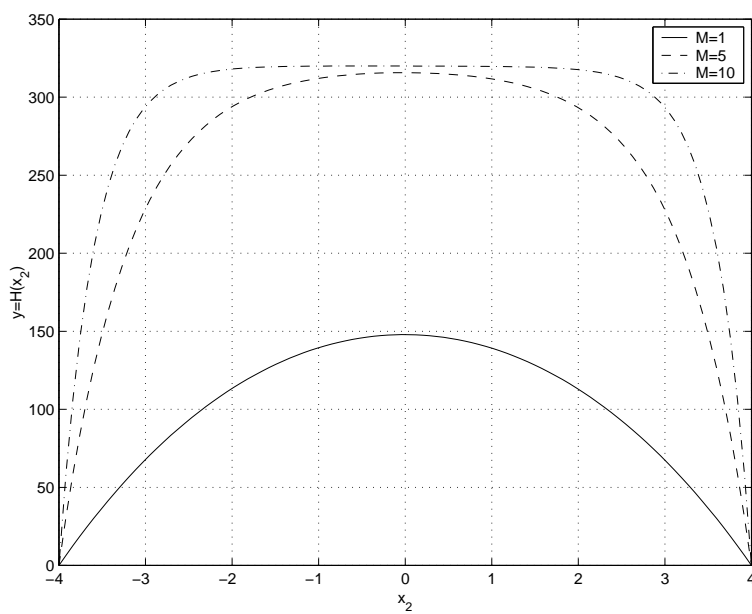
Figura 15.5: Grafico di $v_1(x_2)$, caso 2

Figura 15.6: grafico del campo magnetico indotto, caso 1

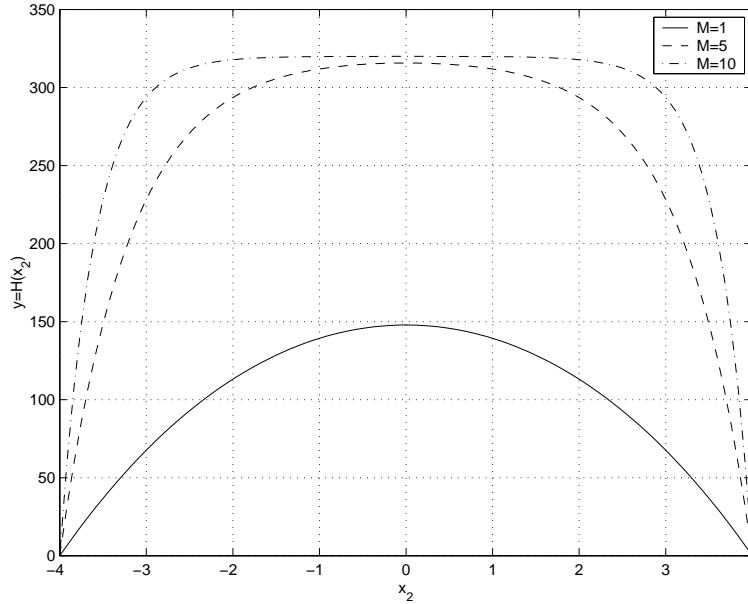


Figura 15.7: grafico del campo magnetico indotto, caso 2

Per quanto riguarda l'espressione di v_1 , abbiamo

$$\frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong \frac{M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right], \quad \frac{\sinh M + \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong 1 + \frac{x_2}{h}.$$

Dunque, per $v_1(x_2)$ otteniamo l'espressione approssimata

$$v_1(x_2) \cong \frac{C h^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right] + \frac{V}{2} \left(1 + \frac{x_2}{h}\right), \quad x_2 \in [-h, h].$$

Il secondo membro della relazione scritta sopra è quanto avevamo ottenuto nel moto di Couette in assenza del campo magnetico esterno.

Mostriamo ora che se $M \ll 1$, $\hat{H}(x_2) \cong 0$.

Infatti

$$\frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \cong 0, \quad \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong \frac{M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right]$$

$$\hat{H}(x_2) \cong \frac{V\sqrt{\mu\sigma_e} M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right] \cong 0,$$

essendo M molto piccolo.

15.5 Appendice sulle unità di misura.

Unità fondamentali nel Sistema Internazionale (SI)

| Grandezza fisica | Simbolo grandezza | Nome unità | Simbolo unità |
|-----------------------|-------------------|-------------|---------------|
| lunghezza | l | metro | m |
| massa | M | chilogrammo | kg |
| intervallo di tempo | t | secondo | s |
| intensità di corrente | I, i | ampere | A |
| temperatura assoluta | T | kelvin | K |
| quantità di sostanza | n | mole | mol |
| intensità luminosa | I_V | candela | cd |

Dimensioni fisiche di grandezze elettromagnetiche

- Intensità del campo elettrico

$$[E] = l M t^{-3} I^{-1}$$

- Intensità del campo di induzione elettrica

$$[D] = l^{-2} t I$$

- Intensità del campo magnetico

$$[H] = l^{-1} I$$

- Intensità del campo di induzione magnetica

$$[B] = M t^{-2} I^{-1}$$

- Permeabilità elettrica

$$[\epsilon] = l^{-3} M^{-1} t^4 I^2$$

- Coefficiente di conducibilità elettrica

$$[\sigma_e] = l^{-3} M^{-1} t^3 I^2$$

- Permeabilità magnetica

$$[\mu_e] = l M t^{-2} I^{-2}.$$

Unità di misura di grandezze elettromagnetiche nel Sistema Internazionale

- Intensità del campo elettrico = volt/metro = $V m^{-1} = m kg s^{-3} A^{-1}$
- Intensità del campo di induzione elettrica = ampere·secondo/metro quadrato = $A s m^{-2}$
- Intensità del campo magnetico = ampere/metro = $A m^{-1}$
- Intensità del campo di induzione magnetica = tesla = $T = kg s^{-2} A^{-1}$
- Permeabilità elettrica = farad/metro = $F m^{-1} = m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
- Coefficiente di conducibilità elettrica = siemens/metro = $S m^{-1} = m^{-3} kg^{-1} s^3 A^2$
- Permeabilità magnetica = henry/metro = $H m^{-1} = m kg s^{-2} A^{-2}$.

Capitolo 16

Propagazione ondosa nei solidi elastici lineari

16.1 Premesse

Riguardo al termine "onda" se ne possono dare due definizioni, una più restrittiva ed una più generale.

Vediamo dapprima la definizione più restrittiva.

Definizione 16.1. *Si definisce onda ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale che sia soluzione dell'equazione delle onde (o di d'Alembert) scalare, vettoriale o tensoriale.*

Ricordiamo che l'equazione delle onde in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ in forma scalare è la seguente:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(P, t) \quad (16.1.1)$$

dove V è una costante positiva e F è un campo scalare assegnato.

Se $F \equiv 0$, l'equazione (16.1.1) è detta omogenea.

Si scrive in maniera analoga l'equazione delle onde vettoriale o tensoriale. In tal caso il campo incognito è vettoriale o tensoriale ed anche il termine noto al secondo membro è un campo vettoriale o tensoriale.

Diamo ora la definizione più generale.

Definizione 16.2. *Definiamo onda una qualsiasi perturbazione, individuata da uno o più campi scalari, vettoriali o tensoriali, che si propaga in un dato mezzo da uno stato perturbato ad uno stato che non lo è.*

Dalla seconda definizione segue che nel mezzo in cui l'onda si propaga c'è una superficie che separa la regione perturbata da quella non perturbata. Tale

superficie è detta **fronte d'onda**.

I campi associati alla perturbazione ed alcune delle loro derivate possono eventualmente presentare delle discontinuità di tipo salto attraverso il fronte d'onda; in tal caso si parla di **onda di discontinuità**.

E' comunque da rilevare che anche nel caso della definizione più restrittiva di onda, a questa è associato un fronte d'onda e la costante V che compare nell'equazione delle onde (che nei vari fenomeni fisici descritti da tale equazione ha le dimensioni fisiche di una velocità) viene a rappresentare la velocità di propagazione del fronte d'onda.

In questo capitolo noi ci occuperemo della propagazione nei solidi elastici lineari delle onde piane progressive, che come vedremo, rientrano nella definizione 1.

16.2 Tensore acustico di un solido elastico lineare.

Come abbiamo osservato nel Capitolo 11, dal punto di vista sperimentale, per i solidi reali che possiamo schematizzare con il modello di solido elastico lineare il tensore elastico risulta definito positivo.

Tuttavia, come vedremo in questo capitolo, nello studio della propagazione ondosa nei solidi elastici lineari, si ottengono dal punto di vista matematico ottimi risultati imponendo al tensore elastico una condizione di segno meno restrittiva, cioè richiedendo che \tilde{c} sia fortemente ellittico. Richiamiamo tale definizione.

Definizione 16.3. *Dato un solido elastico lineare, diciamo che il suo tensore elastico è fortemente ellittico nel punto $P_0 \in S_0$ se*

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c}(P_0) \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (16.2.1)$$

Si dice poi che \tilde{c} è fortemente ellittico in S_0 o (più semplicemente) fortemente ellittico se è fortemente ellittico in tutti i punti di S_0 .

Nel Capitolo 11 abbiamo poi provato i due seguenti risultati.

Teorema 16.1. *Dato un solido elastico lineare ed isotropo, condizione necessaria e sufficiente affinché il suo tensore elastico \tilde{c} sia fortemente ellittico è che i moduli di Lamé soddisfino alle seguenti disuguaglianze:*

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{in } S_0.$$

Proposizione 16.1. *Per il tensore elastico \tilde{c} , la condizione di forte ellitticità è più debole della condizione che \tilde{c} sia definito positivo.*

Introduciamo ora la definizione di tensore acustico.

Definizione 16.4. Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico sia $\tilde{c} = \tilde{c}(P_0)$. Per ogni $P_0 \in S_0$ e per ogni versore \vec{m} , definiamo tensore acustico del solido elastico relativo al punto P_0 ed al versore \vec{m} il tensore del secondo ordine, denotato con $\tilde{A}(P_0, \vec{m})$, le cui componenti in una qualsiasi base ortonormale sono date da:

$$A_{ir}(P_0, \vec{m}) = \frac{1}{\rho_0(P_0)} c_{ijrs}(P_0) m_j m_s,$$

dove $\rho_0 = \rho_0(P_0)$ è la densità di massa del solido elastico nella configurazione di riferimento.

Nel seguito supponiamo di fare riferimento ad un punto P_0 fissato ed ometteremo la dipendenza da P_0 nei vari campi che interverranno nel nostro studio.

Stabiliamo alcune proprietà del tensore acustico correlate a proprietà del tensore elastico.

Teorema 16.2. Dato un solido elastico lineare avente come tensore elastico \tilde{c} , si ha:

(a) $\tilde{A}(\vec{m})$ è simmetrico $\forall \vec{m} \iff \tilde{c}$ gode della simmetria maggiore;

(b) $\tilde{A}(\vec{m})$ è definito positivo $\forall \vec{m} \iff \tilde{c}$ è fortemente ellittico;

(c) \tilde{c} definito positivo $\implies \tilde{A}(\vec{m})$ definito positivo $\forall \vec{m}$.

Dimostrazione

Dimostriamo (a).

Ipotesi: \tilde{c} gode della simmetria maggiore

Tesi: $\tilde{A}(\vec{m})$ è simmetrico $\forall \vec{m}$.

Per definizione di tensore acustico le sue componenti sono date da:

$$A_{ir}(\vec{m}) = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s = \frac{1}{\rho_0} c_{rsij} m_s m_j = A_{ri}(\vec{m}) \quad \forall \vec{m}.$$

Dunque abbiamo ottenuto la tesi.

Ora invertiamo ipotesi e tesi.

Ipotesi: $\tilde{A}(\vec{m})$ è simmetrico $\forall \vec{m}$

Tesi: \tilde{c} gode della simmetria maggiore.

Allora per ipotesi

$$A_{ir}(\vec{m}) = A_{ri}(\vec{m}) \quad \forall \vec{m},$$

da cui $\forall \vec{m}$:

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}. \quad (16.2.2)$$

Tenendo presente la definizione di tensore acustico e moltiplicando entrambi i membri per ρ_0 , la (16.2.2) fornisce

$$c_{ijrs} a_i m_j b_r m_s = c_{ijrs} b_i m_j a_r m_s = c_{rsij} b_r m_s a_i m_j \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{m},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo denotato gli indici saturati i, j con r, s e viceversa gli indici saturati r, s con i, j .

Dalla relazione scritta sopra deduciamo:

$$(c_{ijrs} - c_{rsij}) a_i m_j b_r m_s = 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{m}.$$

Grazie all'arbitrarietà di $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$ ed alle simmetrie minori di cui gode \tilde{c} , possiamo concludere che $c_{ijrs} = c_{rsij}$.

Perciò la (a) è provata.

Dimostriamo (b)

Ipotesi: \tilde{c} è fortemente ellittico

Tesi: $\tilde{A}(\vec{m})$ è definito positivo $\forall \vec{m}$

Per ipotesi si ha

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Noi vogliamo provare che

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} > 0 \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}.$$

Preso il vettore $\vec{a} \neq \vec{0}$, consideriamo:

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = A_{ir}(\vec{m}) a_i a_r = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} a_i m_j a_r m_s.$$

D'altra parte, $a_i m_j$ e $a_r m_s$ sono le componenti di indici i, j e r, s rispettivamente del tensore doppio $\vec{a} \otimes \vec{m}$, per cui otteniamo:

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{\rho_0} (\vec{a} \otimes \vec{m}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{m}) > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Perciò la tesi è dimostrata.

Scambiamo tesi ed ipotesi

Ipotesi: $\tilde{A}(\vec{m})$ è definito positivo $\forall \vec{m}$

Tesi: \tilde{c} è fortemente ellittico.

Siano $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Allora

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = c_{ijrs} a_i b_j a_r b_s = |\vec{b}|^2 \rho_0 \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} a_i \frac{b_j}{|\vec{b}|} a_r \frac{b_s}{|\vec{b}|}.$$

Posto $\vec{m} = \text{vers} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, la relazione precedente assume la forma:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = \rho_0 |\vec{b}|^2 A_{ir}(\vec{m}) a_i a_r = \rho_0 |\vec{b}|^2 \vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} > 0,$$

essendo $\tilde{A}(\vec{m})$ definito positivo. Dunque anche (b) è stata dimostrata.

La dimostrazione di (c) è immediata, poiché se \vec{c} è definito positivo è anche fortemente ellittico e dunque \tilde{A} è definito positivo $\forall \vec{m}$.

Il teorema è dunque dimostrato in maniera completa.

16.3 Autovalori ed autovettori di un tensore di ordine due simmetrico.

Ricordiamo la definizione di autovalori e autovettori di un tensore doppio \tilde{t} ed alcune loro proprietà stabilite nel Capitolo 6.

Definizione 16.5. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore per il tensore doppio \tilde{t} se esiste un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$ tale che

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Il vettore \vec{u} è detto autovettore del tensore \tilde{t} corrispondente all'autovalore λ .

Fissata la base ortonormale (\vec{e}_i) per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$, sia $[t_{ij}]$ la matrice 3×3 delle componenti del tensore \tilde{t} rispetto alla base (\vec{e}_i) .

Ovviamente

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \iff t_{ij} u_j = \lambda u_i.$$

Ne discende la seguente

Proposizione 16.2. Dato il tensore doppio \tilde{t} , λ è un autovalore per \tilde{t} se e solo se è un autovalore per la matrice $[t_{ij}]$ delle componenti del tensore rispetto ad una base ortonormale (\vec{e}_i) e \vec{u} è un autovettore del tensore \tilde{t} corrispondente all'autovalore λ se e solo se la terna (u_1, u_2, u_3) delle componenti di \vec{u} rispetto ad (\vec{e}_i) è un autovettore della matrice $[t_{ij}]$ corrispondente all'autovalore λ .

Dunque la ricerca degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio è ricondotta alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice 3×3 delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale fissata ed è possibile estendere ai tensori doppi tutte le proprietà valide per gli autovalori e gli autovettori delle matrici reali 3×3 .

In particolare, sussistono le seguenti proposizioni.

Proposizione 16.3. *Se \tilde{t} è un tensore doppio cui è associata la matrice $[t_{ij}]$ delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale (\vec{e}_i) , condizione necessaria e sufficiente affinché λ sia un suo autovalore è che sia soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado:*

$$\det[t_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0. \quad (16.3.1)$$

Si noti che l'equazione (16.3.1) implica:

$$\det(\tilde{t} - \lambda \tilde{a}) = 0$$

e viceversa.

Proposizione 16.4. *Se λ è un autovalore del tensore doppio \tilde{t} , l'insieme di tutti gli autovettori di \tilde{t} corrispondenti a λ , incluso il vettore nullo, è un sottospazio di $\vec{\mathcal{E}}$, detto **autospazio di \tilde{t} corrispondente all'autovalore λ** . Se poi il tensore doppio è simmetrico, la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore λ coincide con la molteplicità algebrica di λ come radice dell'equazione (16.3.1).*

Proposizione 16.5. *Gli autovettori di un tensore doppio simmetrico corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Ci proponiamo ora di stabilire un teorema che ci sarà molto utile nel seguito.

Teorema 16.3. Teorema di decomposizione spettrale per un tensore doppio simmetrico.

Sia \tilde{S} un tensore doppio simmetrico. Allora \tilde{S} ammette tre autovalori (reali): $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e in corrispondenza di questi è possibile trovare una base ortonormale (\vec{e}_h) tale che sussistano le due relazioni seguenti:

$$(a) \quad \tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3 \quad (\text{non c'è somma sull'indice } h)$$

$$(b) \quad \tilde{S} = \sum_{h=1}^3 \lambda_h \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h.$$

La (b) è detta decomposizione spettrale per il tensore \tilde{S} .

Viceversa se il tensore simmetrico \tilde{S} ammette la decomposizione (b) e (\vec{e}_h) è una base ortonormale, allora $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono i tre autovalori di \tilde{S} e il versore \vec{e}_h è autovettore di \tilde{S} corrispondente all'autovalore λ_h , per $h = 1, 2, 3$.

Inoltre

1) *Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, allora l'autospazio associato a ciascun autovalore ha dimensione 1.*

2) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, allora si ha

$$(c) \tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 (\tilde{a} - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)$$

dove \vec{e}_1 è un versore autovettore di \tilde{S} corrispondente all'autovalore λ_1 . Viceversa, se il tensore simmetrico \tilde{S} ammette la decomposizione (c) e (\vec{e}_1) è un versore, allora \tilde{S} ha gli autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ e \vec{e}_1 è autovettore di \tilde{S} corrispondente all'autovalore λ_1 .

Inoltre la dimensione dell'autospazio associato a λ_1 è 1, mentre la dimensione dell'autospazio associato a $\lambda_2 = \lambda_3$ è 2 e tale autospazio è il complemento ortogonale dell'autospazio associato a λ_1 .

3) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, allora si ha

$$(d) \tilde{S} = \lambda_1 \tilde{a}.$$

Viceversa, se \tilde{S} è esprimibile nella forma (d), allora ammette tre autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e l'autospazio associato è lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$.

Dimostrazione Dimostriamo dapprima (a) e (b).

Osserviamo in primo luogo che, essendo \tilde{S} simmetrico, fissata una base ortonormale (\vec{e}_i) , la matrice $[S_{ij}]$ delle sue componenti è reale e simmetrica e quindi ammette tre autovalori reali: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Perciò, grazie alla relazione tra tensori doppi e matrici, anche \tilde{S} possiede gli stessi autovalori.

Inoltre, per noti risultati di algebra lineare, è possibile trovare una base ortonormale $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ di \mathbb{R}^3 tale che \bar{E}_h è autovettore della matrice $[S_{ij}]$ corrispondente all'autovalore λ_h per $h = 1, 2, 3$.

Se denotiamo con \mathbb{A} la matrice di passaggio dalla base canonica (E_1, E_2, E_3) alla base $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$, ossia la matrice delle componenti canoniche dei tre versori della base $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$, si ha che la matrice

$$[\bar{S}_{hk}] = \mathbb{A}^{-1} [S_{ij}] \mathbb{A}$$

è diagonale e gli elementi della sua diagonale principale coincidono con i tre autovalori della matrice $[S_{ij}]$.

Dunque

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

Se ora prendiamo in considerazione il tensore \tilde{S} e consideriamo in $\vec{\mathcal{E}}$, accanto alla base ortonormale (\vec{e}_i) , la base (\vec{e}_h) avente \mathbb{A} come matrice rispetto alla base (\vec{e}_i) , tale base risulta ortonormale poiché la matrice \mathbb{A} è ortogonale.

Inoltre, per la proposizione 16.2, il versore \vec{e}_h è autovettore di \tilde{S} corrispondente all'autovalore λ_h per $h = 1, 2, 3$ e dunque sussiste la (a):

$$\tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Per provare che \tilde{S} ammette la decomposizione (b), cominciamo con osservare che la matrice diagonale $[\bar{S}_{hk}]$ è la matrice delle componenti di \tilde{S} rispetto alla base (\vec{e}_h) , come si vede subito tenendo presente come muta al variare della base ortonormale di $\vec{\mathcal{E}}$ la matrice delle componenti di un tensore doppio. Dunque le componenti di \tilde{S} rispetto alla base (\vec{e}_h) sono date da:

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

D'altra parte, poiché (\vec{e}_h) è una base per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$, a tale base è associata la base $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$ per lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$, cioè per lo spazio vettoriale dei tensori doppi. Perciò potremo decomporre \tilde{S} rispetto a tale base e, per definizione di componenti di un tensore doppio rispetto ad una base ortonormale di $\vec{\mathcal{E}}$, la successione (\bar{S}_{hk}) rappresenta proprio la successione delle componenti di \tilde{S} rispetto alla base $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$.

Avremo allora:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \sum_{h,k=1}^3 \bar{S}_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k \\ &= \sum_{h,k=1}^3 \lambda_h \delta_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k \\ &= \sum_{h=1}^3 \lambda_h \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h, \end{aligned}$$

che è appunto la decomposizione spettrale (b).

Dimostriamo ora il viceversa. Per ipotesi, il tensore doppio simmetrico \tilde{S} ammette la decomposizione (b) dove (\vec{e}_h) è una base ortonormale per $\vec{\mathcal{E}}$. Dobbiamo provare che $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono i tre autovalori del tensore e che il versore \vec{e}_h è un autovettore di \tilde{S} corrispondente all'autovalore λ_h per $h = 1, 2, 3$, ossia dobbiamo dimostrare che sussistono le (a).

Per quanto osservato nella prima parte della dimostrazione, da (b) discende che le componenti \bar{S}_{hk} di \tilde{S} rispetto alla base (\vec{e}_h) sono date da

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

Ora scriviamo la k -esima componente rispetto alla base (\vec{e}_h) del primo membro

delle (a):

$$(\tilde{S} \cdot \vec{e}_h)_k = \sum_{l=1}^3 \bar{S}_{kl} \delta_{hl}$$

dove abbiamo tenuto presente che la componente l -esima del vettore \vec{e}_h rispetto alla base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, cioè $\vec{e}_h \cdot \vec{e}_l$, è data da δ_{hl} .

Allora al secondo membro della relazione scritta sopra, la somma su l si riduce al solo termine in cui $l = h$ e perciò otteniamo=

$$(\tilde{S} \cdot \vec{e}_h)_k = \bar{S}_{kh} = \bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} = \lambda_h \vec{e}_h \cdot \vec{e}_k.$$

Dunque i due vettori $\tilde{S} \cdot \vec{e}_h$ e $\lambda_h \vec{e}_h$ hanno uguali le componenti rispetto alla base (\vec{e}_h) e quindi sono uguali.

Dimostriamo ora la 1). E' un'immediata conseguenza della proposizione 16.4. Infatti, se i tre autovalori di \tilde{S} sono distinti, ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1 e dunque l'autospazio associato ha dimensione 1. Si noti che il vettore \vec{e}_h facente parte della base ortonormale che compare nella decomposizione spettrale è una base per l'autospazio associato all'autovalore λ_h per $h = 1, 2, 3$.

Proviamo il punto 2).

Supponiamo dapprima che dei tre autovalori di \tilde{S} , due siano coincidenti, ossia si abbia:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3.$$

Facciamo vedere che \tilde{S} ammette la decomposizione (c).

A tal fine scriviamo la (b), tenendo presente l'ipotesi sugli autovalori:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) \\ &= \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1). \end{aligned}$$

D'altra parte, se teniamo presente che il tensore fondamentale rispetto alla base (\vec{e}_h) ha come componenti i simboli di Kronecker δ_{hk} , è evidente che se decomponiamo \tilde{a} rispetto alla base $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$, otteniamo

$$\tilde{a} = \sum_{h,k=1}^3 \delta_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k = \sum_{h=1}^3 \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h.$$

Allora possiamo scrivere

$$\tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 (\tilde{a} - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)$$

che è appunto la decomposizione (c).

Viceversa ora supponiamo che il tensore \tilde{S} sia esprimibile mediante la relazione (c) dove \vec{e}_1 è un versore. Possiamo sempre trovare una base ortonormale (\vec{e}_h) di $\vec{\mathcal{E}}$ avente come primo versore \vec{e}_1 . Andiamo a decomporre \tilde{a} rispetto a tale base e sostituiamo nella (c) tale decomposizione. Otteniamo allora:

$$\tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 \left(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right).$$

Ma allora \tilde{S} ammette la decomposizione spettrale (b) con $\lambda_2 = \lambda_3$. Dunque \tilde{S} ha i suoi tre autovalori dati da $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ e il versore \vec{e}_1 è un autovettore corrispondente all'autovalore λ_1 .

Inoltre, poichè λ_1 ha molteplicità algebrica 1, l'autospazio associato ha dimensione 1, mentre all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3$ che ha molteplicità algebrica pari a 2, è associato un autospazio di dimensione 2. Tale autospazio è il complemento ortogonale di quello associato a λ_1 perchè i vettori appartenenti a tale sottospazio sono tutti ortogonali ad ogni vettore dell'altro autospazio.

Infine dimostriamo il punto 3).

Supponiamo dapprima che i tre autovalori di \tilde{S} siano coincidenti, ossia si abbia:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Facciamo vedere che \tilde{S} ha la forma (d).

A tal fine scriviamo la (b), tenendo presente l'ipotesi sugli autovalori:

$$\tilde{S} = \lambda_1 \left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right) = \lambda_1 \tilde{a}$$

che è appunto la (d).

Viceversa, se vale la (d), presa una qualsiasi base ortonormale (\vec{e}_h) , possiamo scrivere:

$$\tilde{S} = \sum_{h=1}^3 \lambda_1 \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h$$

e dunque \tilde{S} ammette la decomposizione spettrale (b) con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ per cui ha tre autovalori coincidenti. Infine, poichè i tre autovalori di \tilde{S} sono coincidenti, λ_1 ha molteplicità 3 e quindi l'autospazio associato ha dimensione 3. Ma allora l'autospazio è $\vec{\mathcal{E}}$, poichè l'unico sottospazio di $\vec{\mathcal{E}}$ che ha dimensione 3 è lo spazio vettoriale stesso.

Il teorema di decomposizione spettrale è stato provato in maniera completa.

Dimostriamo ora una proposizione che ci sarà utile nel seguito.

Proposizione 16.6. *Sia \tilde{S} un tensore doppio simmetrico e definito positivo. Allora i suoi tre autovalori sono positivi.*

Dimostrazione

Sia λ un autovalore del tensore doppio simmetrico e definito positivo \tilde{S} e sia \vec{u} un autovettore corrispondente per cui:

$$\tilde{S} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Poiché, per definizione di autovettore, $\vec{u} \neq \vec{0}$, e per ipotesi il tensore è definito positivo, avremo:

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} > 0.$$

D'altra parte:

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} = \lambda |\vec{u}|^2 \implies \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} > 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Concludiamo il paragrafo stabilendo un importante risultato per il tensore acustico di un solido elastico lineare ed isotropo conseguenza del teorema di decomposizione spettrale.

Sia dato un solido elastico lineare ed isotropo. Come abbiamo visto, il suo tensore elastico ha le componenti della forma:

$$c_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}).$$

Allora \forall versore \vec{m} il tensore acustico $\tilde{A}(\vec{m})$ ha le componenti date da:

$$\begin{aligned} A_{ir}(\vec{m}) &= \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s = \frac{1}{\rho_0} [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})] m_j m_s \\ &= \frac{1}{\rho_0} [\lambda m_i m_r + \mu (m_j m_j \delta_{ir} + m_i m_r)] \\ &= \frac{1}{\rho_0} [(\lambda + \mu) m_i m_r + \mu \delta_{ir}]. \end{aligned}$$

Dunque per un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé λ e μ , il tensore acustico relativo al versore \vec{m} è dato da:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} \tilde{a} \quad \forall \text{ versore } \vec{m}. \quad (16.3.2)$$

Ora osserviamo che il tensore acustico $\tilde{A}(\vec{m})$ risulta simmetrico \forall versore \vec{m} , come si vede dalla (16.3.2) e come d'altronde deve essere perché \tilde{c} nel caso di un

solido isotropo gode della simmetria maggiore.

Se al secondo membro della (16.3.2) aggiungiamo e togliamo il termine:

$$\frac{\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m},$$

questa assume la forma:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} (\vec{a} - \vec{m} \otimes \vec{m}) \quad \forall \text{ versore } \vec{m}. \quad (16.3.3)$$

Ma la (16.3.3) rappresenta la decomposizione spettrale del tensore doppio simmetrico $\tilde{A}(\vec{m})$.

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione

Proposizione 16.7. *Dato un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé λ e μ , il suo tensore acustico ammette la decomposizione spettrale (16.3.3) \forall versore \vec{m} . Allora se $\lambda \neq -\mu$, $\tilde{A}(\vec{m}) \forall$ versore \vec{m} ammette due autovalori: $\lambda_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ che è autovalore semplice e $\lambda_2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ che è autovalore doppio. L'autospazio associato a λ_1 , di dimensione 1, ha come base il versore \vec{m} e l'autospazio associato a λ_2 , di dimensione 2, è il complemento ortogonale di quello associato a λ_1 .*

Osservazione 16.1. Se per un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé λ e μ , si ha $\lambda = -\mu$, il tensore acustico per ogni versore \vec{m} ammette un unico autovalore triplo dato da $\frac{\mu}{\rho_0}$ e il corrispondente autospazio è $\vec{\mathcal{E}}$.

16.4 Onde piane progressive.

Prima di tutto diamo la definizione di onda piana progressiva.

Definizione 16.6. *Chiamiamo onda piana progressiva un campo vettoriale \vec{u} definito in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ nel modo seguente:*

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$$

dove $\psi = \psi(s)$ è una funzione a valori reali definita su \mathbb{R} di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $\frac{d^2\psi}{ds^2}$ non sia identicamente nulla, \vec{m} e \vec{a} sono due versori, O è un punto fissato dello spazio geometrico, V è una costante positiva.

La direzione orientata di versore \vec{m} è detta direzione di propagazione dell'onda, la direzione orientata di versore \vec{a} è detta direzione di moto dell'onda e la costante positiva V è la velocità di propagazione dell'onda.

Diamo ora la definizione di onda piana progressiva longitudinale e trasversale.

Definizione 16.7. *Data l'onda piana progressiva*

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a},$$

diciamo che è un'onda longitudinale se i due versori \vec{m} e \vec{a} sono paralleli, ossia se $\vec{m} = \vec{a}$ o $\vec{m} = -\vec{a}$.

Diciamo che è un'onda trasversale se i due versori \vec{m} e \vec{a} sono ortogonali, ossia se $\vec{m} \cdot \vec{a} = 0$.

Ci proponiamo ora di dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 16.8. *Ogni onda piana progressiva con velocità di propagazione V è soluzione in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ dell'equazione vettoriale delle onde omogenea:*

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \Delta \vec{u} = \vec{0}. \quad (16.4.1)$$

Dimostrazione

Data l'onda piana progressiva

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a},$$

consideriamone le componenti della rappresentazione analitica nel riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$:

$$u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \psi \left(\sum_{h=1}^3 x_{0h} m_h - V t \right) a_i$$

dove (x_{01}, x_{02}, x_{03}) è la terna delle coordinate cartesiane di un generico punto P_0 .

Osserviamo che, essendo $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, il campo $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{E} \times \mathbb{R})$.

Se deriviamo \vec{u} rispetto al tempo, otteniamo

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(P_0, t) = -V \frac{d}{ds} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a}$$

che, avendo posto:

$$\psi'(P_0, t) = \frac{d\psi}{ds} \Big|_{s=(P_0-O) \cdot \vec{m} - V t} = \frac{d}{ds} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t),$$

si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(P_0, t) = -V \psi'(P_0, t) \vec{a}. \quad (16.4.2)$$

Derivando ulteriormente rispetto al tempo e ponendo:

$$\psi''(P_0, t) = \frac{d^2 \psi}{d s^2} \Big|_{s=(P_0-O) \cdot \vec{m} - V t} = \frac{d^2}{d s^2} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t),$$

dalla (16.4.2) deduciamo

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(P_0, t) = V^2 \psi''(P_0, t) \vec{a}. \quad (16.4.3)$$

Procuriamoci ora le componenti di $\text{grad}_0 \vec{u}$:

$$u_{i,j}(P_0, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \frac{d}{d s} \psi \left(\sum_{h=1}^3 x_{0h} m_h - V t \right) m_j a_i.$$

Con la posizione fatta sopra, tale relazione si può scrivere nella forma

$$u_{i,j}(P_0, t) = \psi'(P_0, t) a_i m_j. \quad (16.4.4)$$

Notiamo che dall'espressione (16.4.4) delle componenti del gradiente, si deduce:

$$\text{grad}_0 \vec{u}(P_0, t) = \psi'(P_0, t) \vec{a} \otimes \vec{m} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

D'altra parte

$$\Delta u_i(P_0, t) = u_{i,j,j}(P_0, t) = \psi''(P_0, t) a_i m_j m_j = \psi''(P_0, t) a_i,$$

da cui

$$\Delta \vec{u}(P_0, t) = \psi''(P_0, t) \vec{a}. \quad (16.4.5)$$

Se sostituiamo la (16.4.3) e la (16.4.5) al primo membro della (16.4.1), otteniamo

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \Delta \vec{u} = \frac{1}{V^2} V^2 \psi'' \vec{a} - \psi'' \vec{a} = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R},$$

come volevamo dimostrare.

Dunque un'onda piana progressiva è un'onda nella sua accezione più restrittiva.

Stabiliamo ora la condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia longitudinale o trasversale.

Teorema 16.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia longitudinale è che sia irrotazionale in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$, ossia che*

$$\text{rot}_0 \vec{u}(P_0, t) = \vec{0} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia trasversale è che sia solenoidale in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$, ossia che

$$\text{div}_0 \vec{u}(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Consideriamo l'onda piana progressiva

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a}.$$

Dimostriamo la prima parte del teorema relativa alle onde longitudinali.

A tal fine procuriamoci le componenti del rotore del campo vettoriale \vec{u} sfruttando le (16.4.4):

$$(\text{rot}_0 \vec{u})_i = \vartheta_{ijr} u_{r,j} = \psi' \vartheta_{ijr} m_j a_r = \psi' (\vec{m} \times \vec{a})_i$$

da cui in forma vettoriale

$$\text{rot}_0 \vec{u} = \psi' \vec{m} \times \vec{a}. \quad (16.4.6)$$

Se teniamo presente che $\frac{d\psi}{ds}$ e quindi ψ' non è identicamente nulla poiché per ipotesi non lo è $\frac{d^2\psi}{ds^2}$, dalla (16.4.6), concludiamo che \vec{u} è un'onda longitudinale se e solo se

$$\text{rot}_0 \vec{u} = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, procuriamoci la divergenza di \vec{u} , sempre sfruttando le (16.4.4):

$$\text{div}_0 \vec{u} = u_{i,i} = \psi' a_i m_i = \psi' \vec{a} \cdot \vec{m}. \quad (16.4.7)$$

Per l'osservazione precedente relativa a ψ' , dalla (16.4.7), concludiamo che \vec{u} è un'onda trasversale se e solo se

$$\text{div}_0 \vec{u} = 0 \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

A questo punto vediamo di spiegare il motivo per cui l'onda da noi considerata

è detta "piana progressiva".

Fissato l'istante t , ed il numero reale α , consideriamo il piano

$$\Pi_t = \{P_0 \in \mathcal{E} : (P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t = \alpha\}.$$

Come è facile verificare, Π_t è il piano normale al vettore \vec{m} passante per il punto $P_{0,t}^*$ tale che $P_{0,t}^* - O = (V t + \alpha)\vec{m}$.

Infatti si vede subito che $P_{0,t}^* \in \Pi_t$ e dunque potremo scrivere:

$$\Pi_t = \{P_0 \in \mathcal{E} : (P_0 - P_{0,t}^*) \cdot \vec{m} = 0\}.$$

Data l'onda piana

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a},$$

se all'istante t fissato ne consideriamo la restrizione al piano Π_t , abbiamo:

$$\vec{u}(\cdot, t)|_{\Pi_t} = \psi(\alpha) \vec{a}$$

cioè \vec{u} all'istante t è costante nei punti di Π_t .

Se facciamo variare t in $(-\infty, +\infty)$, otteniamo la famiglia di piani paralleli

$$\{\Pi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

e istante per istante \vec{u} assume lo stesso valore $\psi(\alpha) \vec{a}$ nei punti del piano appartenente alla famiglia relativo a tale istante.

Ciò spiega perchè \vec{u} è detto onda "piana".

D'altra parte, al variare di t in \mathbb{R} , la famiglia di piani $\{\Pi_t\}$ può essere riguardata come un unico piano rigido che si muove nello spazio; Π_t viene allora a rappresentare la posizione occupata da tale piano all'istante t .

Si può vedere facilmente che il piano si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di \vec{m} con velocità di modulo V .

Infatti, fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale $Ox_1x_2x_3$ con l'asse Ox_3 parallelo al vettore \vec{m} e con lo stesso verso. All'istante t l'equazione cartesiana del piano Π_t è allora:

$$x_{03} = V t + \alpha.$$

Consideriamo un qualsiasi punto \bar{P}_0 rigidamente solidale al piano e denotiamo con $(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03})$ la terna delle sue coordinate cartesiane. Al variare di t , mentre le prime sue due coordinate assumono sempre lo stesso valore, la terza varia con la seguente legge temporale:

$$\bar{x}_{03}(t) = V t + \alpha.$$

Dunque ogni punto solidale al piano si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione e nel verso dell'asse Ox_3 , ossia di \vec{m} , con velocità di modulo V . Perciò il piano si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di \vec{m} con velocità di modulo V .

Allora \vec{u} è detto onda piana progressiva perché assume valore costante nei punti dei piani normali a \vec{m} che si muovono di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di \vec{m} con velocità di modulo V .

16.5 Onde piane progressive elastiche.

Consideriamo un solido elastico lineare ed omogeneo: perciò la sua densità di massa ρ_0 nella configurazione naturale, presa come configurazione di riferimento, è una costante positiva ed analogamente il suo tensore elastico \tilde{c} è costante. Assumiamo che tale solido occupi tutto lo spazio.

Definizione 16.8. *Un'onda piana progressiva $\vec{u} = \vec{u}(P_0, t)$ è detta elastica per il solido elastico considerato se \vec{u} soddisfa in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ l'equazione dell'elastodinamica lineare, espressa in termini di solo spostamento, per il solido in assenza di forze di massa, ossia se*

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \text{div}_0 (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \quad (16.5.1)$$

dove ρ_0 e \tilde{c} sono costanti.

Se \vec{u} è un'onda piana progressiva elastica per un solido elastico lineare soddisfacente le ipotesi prima enunciate, diremo anche che \vec{u} è un'onda piana progressiva elastica che si propaga nel solido.

Ci proponiamo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva si propaghi in un solido elastico lineare.

A tal fine scriviamo in componenti la (16.5.1):

$$\rho_0 \ddot{u}_i = c_{ijrs} u_{r,sj}. \quad (16.5.2)$$

Sia data l'onda piana progressiva:

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a}.$$

Per quanto visto in precedenza, abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= -V \psi' a_i \implies \ddot{u}_i = V^2 \psi'' a_i \\ u_{r,s} &= \psi' a_r m_s \implies u_{r,sj} = \psi'' a_r m_s m_j. \end{aligned} \quad (16.5.3)$$

Per definizione di onda elastica, l'onda piana progressiva considerata è elastica per il solido elastico se e solo se le sue componenti soddisfano le (16.5.2) in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Sostituendo le (16.5.3) in (16.5.2) e dividendo entrambi i membri per ρ_0 , deduciamo:

$$V^2 \psi'' a_i = \frac{1}{\rho_0} \psi'' c_{ijrs} m_j m_s a_r \iff V^2 a_i = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s a_r, \quad (16.5.4)$$

dove abbiamo sfruttato l'ipotesi $\frac{d^2 \psi}{ds^2}$ non identicamente nulla.

D'altra parte, per definizione di tensore acustico, le (16.5.4) forniscono:

$$A_{ir}(\vec{m}) a_r = V^2 a_i \implies \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = V^2 \vec{a}.$$

Abbiamo così ottenuto il seguente teorema

Teorema 16.5. *Dato un solido elastico lineare ed omogeneo, condizione necessaria e sufficiente affinché l'onda piana progressiva:*

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a}$$

sia elastica per tale solido è che sia soddisfatta la condizione:

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = V^2 \vec{a}, \quad (16.5.5)$$

detta condizione di Fresnel-Hadamard.

La condizione di Fresnel-Hadamard ci dice che un'onda piana progressiva avente velocità di propagazione V , direzione di propagazione di versore \vec{m} e direzione di moto di versore \vec{a} può propagarsi in un solido elastico lineare ed omogeneo se e solo se V^2 è un autovalore del tensore acustico del solido relativo al versore \vec{m} e \vec{a} è un autovettore ad esso corrispondente.

Grazie alla condizione di Fresnel-Hadamard, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 16.6. *Sia dato un solido elastico lineare ed omogeneo il cui tensore elastico soddisfi alle due condizioni seguenti:*

1) gode della simmetria maggiore

2) è fortemente ellittico.

Allora, fissato ad arbitrio il versore \vec{m} , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche che possono propagarsi nel solido aventi direzione di propagazione di versore \vec{m} .

Dimostrazione

Per le proprietà di cui gode \tilde{c} , qualunque sia \vec{m} , il tensore acustico $\tilde{A}(\vec{m})$ è simmetrico e definito positivo e quindi ammette tre autovalori reali che sono positivi. Per il teorema di decomposizione spettrale, in corrispondenza dei tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, è possibile trovare una base ortonormale $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ costituita da autovettori. Dunque, fissato ad arbitrio \vec{m} , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche, precisamente le tre onde progressive aventi direzione di propagazione di versore \vec{m} , direzione di moto rispettivamente di versore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ e velocità di propagazione rispettivamente $V_1 = \sqrt{\lambda_1}, V_2 = \sqrt{\lambda_2}, V_3 = \sqrt{\lambda_3}$.

Supponiamo ora di avere un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo. In tal caso il tensore elastico gode della simmetria maggiore. Aggiungiamo l'ipotesi che \tilde{c} sia fortemente ellittico per cui le costanti di Lamè λ e μ soddisfano alle due disuguaglianze:

$$\lambda + 2\mu > 0 \quad \mu > 0.$$

Dimostriamo la seguente proposizione

Proposizione 16.9. *Dato un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo tale che*

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \lambda \neq -\mu,$$

un'onda piana progressiva con velocità di propagazione V , qualunque sia la sua direzione di propagazione, è elastica per il solido se e solo se $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ e l'onda è longitudinale oppure $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ e l'onda è trasversale.

Dimostrazione

Come abbiamo visto, qualunque sia il versore \vec{m} , il tensore acustico ammette la seguente decomposizione:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} (\tilde{a} - \vec{m} \otimes \vec{m}).$$

Nell'ipotesi della proposizione, qualunque sia il versore \vec{m} , $\tilde{A}(\vec{m})$ ha due autovalori distinti e positivi: $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ che ha molteplicità 1 e $\frac{\mu}{\rho_0}$ che ha molteplicità 2. L'autospazio associato al primo autovalore ha dimensione 1 ed ha come base \vec{m} , mentre l'autospazio associato al secondo ha molteplicità 2 ed è il complemento ortogonale dell'altro autospazio, per cui ogni autovettore corrispondente a $\frac{\mu}{\rho_0}$ è ortogonale a \vec{m} .

Sia data un'onda piana progressiva elastica con direzione di propagazione di versore \vec{m} ; per la condizione di Fresnel-Hadamard tale onda dovrà necessariamente avere $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ o $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$.

Nel primo caso, sempre per la condizione di Fresnel-Hadamard, il versore \vec{a} della direzione di moto è un autovettore di $\tilde{A}(\vec{m})$ corrispondente all'autovalore $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ e dunque $\vec{a} = \vec{m}$ o $-\vec{m}$. L'onda elastica è perciò longitudinale.

Nel secondo caso, cioè $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$, il versore \vec{a} della direzione di moto è un autovettore del tensore acustico $\tilde{A}(\vec{m})$ corrispondente a tale autovalore e dunque è ortogonale a \vec{m} . L'onda elastica è perciò in questo caso trasversale.

Viceversa, un'onda piana progressiva con direzione di propagazione di versore \vec{m} che ha $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ ed ha come versore della sua direzione di moto \vec{m} o $-\vec{m}$ è elastica poiché soddisfa alla condizione di Fresnel-Hadamard ed è chiaramente longitudinale. Analogamente un'onda piana progressiva con direzione di propagazione di versore \vec{m} che ha $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ ed ha come versore \vec{a} della sua direzione di moto un versore ortogonale a \vec{m} è elastica poiché soddisfa alla condizione di Fresnel-Hadamard ed è chiaramente trasversale.

La proposizione è così dimostrata.

Osserviamo, come conseguenza della proposizione 16.5, che le onde piane progressive che si propagano in un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo con \tilde{c} fortemente ellittico e $\lambda \neq -\mu$ sono solo o longitudinali o trasversali.

A questo punto è naturale chiedersi se in un solido elastico lineare non isotropo si possono propagare onde piane progressive longitudinali e trasversali. La risposta è affermativa e ci viene data dal teorema di Fedorov-Stippes.

Teorema 16.7. Teorema di Fedorov-Stippes. *In un solido elastico lineare ed omogeneo, non isotropo, il cui tensore elastico \tilde{c} gode della simmetria maggiore ed è fortemente ellittico, si possono propagare onde piane progressive elastiche longitudinali e trasversali.*

Dimostrazione

Come sappiamo, in un solido elastico lineare ed omogeneo soddisfacente alle ipotesi del teorema, fissato il versore \vec{m} , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche che si possono propagare nel solido.

D'altra parte condizione sufficiente affinché esista un'onda piana progressiva longitudinale nel solido, per la condizione di Fresnel-Hadamard, è che esista un versore \vec{m} che sia un autovettore del tensore acustico relativo allo stesso versore

\vec{m} , cioè tale che

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} = \lambda \vec{m} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (16.5.6)$$

Infatti l'onda piana progressiva che ha come direzione di propagazione di versore \vec{m} , velocità di propgazione tale che $V^2 = \lambda$ e il versore \vec{a} della direzione di moto coincidente con il versore \vec{m} o con $-\vec{m}$ è elastica ed è longitudinale.

Il nostro scopo è di far vedere che esiste almeno un versore \vec{m} per il quale vale la (16.5.6).

Poiché \tilde{c} è fortemente ellittico, il tensore acustico $\tilde{A}(\vec{m})$ è definito positivo qualunque sia il versore \vec{m} , cioè

$$\forall \vec{b} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{b} > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Dunque

$$\vec{m} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Ma allora ne discende:

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} \neq \vec{0} \quad \forall \vec{m}.$$

Ora osserviamo che lo spazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}$, essendo normato, è anche uno spazio metrico. Se allora consideriamo il sottoinsieme di $\vec{\mathcal{E}}$ costituito dai vettori unitari, cioè i versori, questo viene a rappresentare la superficie sferica di $\vec{\mathcal{E}}$ che ha centro nel vettore nullo e raggio unitario:

$$\{\vec{m} \in \vec{\mathcal{E}} : |\vec{m}| = 1\} = \Sigma_1(\vec{0}).$$

Introduciamo l'applicazione

$$\vec{l} : \Sigma_1(\vec{0}) \longrightarrow \Sigma_1(\vec{0})$$

tale che

$$\forall \vec{m} \in \Sigma_1(\vec{0}) \quad \vec{l}(\vec{m}) = \frac{\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}}{|\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}|}.$$

L'applicazione \vec{l} è continua, poiché $\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} \neq 0 \quad \forall \vec{m}$.

Inoltre non esiste alcun versore \vec{m} tale che: $\vec{l}(\vec{m}) = -\vec{m}$.

Infatti se esistesse un tale versore, dovremmo avere:

$$\vec{m} \cdot \vec{l}(\vec{m}) = -\vec{m} \cdot \vec{m} = -1,$$

il che è assurdo poiché

$$\vec{m} \cdot \vec{l}(\vec{m}) = \vec{m} \cdot \frac{\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}}{|\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}|} > 0,$$

essendo $\tilde{A}(\vec{m})$ definito positivo.

Dunque l'applicazione $\vec{l} : \Sigma_1(\vec{0}) \longrightarrow \Sigma_1(\vec{0})$ è continua e non trasforma alcun punto della sfera unitaria nel suo antipodo. Allora ad \vec{l} è possibile applicare un teorema del punto fisso che ci consente di asserire che esiste un versore \vec{m}_1 che è un punto fisso per \vec{l} , cioè è tale che $\vec{l}(\vec{m}_1) = \vec{m}_1$. Dunque esiste un versore \vec{m}_1 tale che:

$$\frac{\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1}{|\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1|} = \vec{m}_1. \quad (16.5.7)$$

Se poniamo:

$$\lambda_1 = |\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1|,$$

la (16.5.7) si scrive nella forma:

$$\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1 = \lambda_1 \vec{m}_1.$$

Perciò esiste un versore \vec{m}_1 che è un autovettore del tensore acustico relativo al versore stesso.

Quindi, se si considera l'onda piana progressiva che ha velocità di propagazione V_1 tale che $V_1^2 = \lambda_1$, direzione di propagazione di versore \vec{m}_1 e direzione di moto di versore \vec{m}_1 o $-\vec{m}_1$, questa è un'onda elastica ed anche longitudinale.

Per quanto riguarda l'esistenza di onde trasversali, teniamo presente che $\tilde{A}(\vec{m}_1)$, essendo simmetrico e definito positivo, ammette tre autovalori positivi: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e che in corrispondenza di questi è possibile trovare una base ortonormale $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ con $\vec{a}_1 = \vec{m}_1$ e \vec{a}_2, \vec{a}_3 autovettori corrispondenti agli autovalori λ_2, λ_3 . Se consideriamo le due onde piane progressive che hanno direzione di propagazione di versore \vec{m}_1 , velocità di propagazione V_2, V_3 tali che $V_2^2 = \lambda_2, V_3^2 = \lambda_3$ e direzioni di moto di versori \vec{a}_2, \vec{a}_3 rispettivamente, queste, per la condizione di Fresnel-Hadamard, sono onde piane progressive elastiche ed anche trasversali.

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.