

# Meccanica dei continui

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2010/2011



# Indice

<b>1</b>	<b>Approfondimenti sui fluidi perfetti</b>	<b>1</b>
1.1	Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete. . . . .	1
1.2	Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario per un generico corpo continuo. . . . .	13
1.3	Teoremi di Bernoulli, moti piani. . . . .	24
1.4	Teorema del trasporto della circolazione per un generico corpo continuo e applicazione ad un fluido perfetto. . . . .	30
<b>2</b>	<b>Fluidi viscosi classici</b>	<b>39</b>
2.1	Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici. . . . .	39
2.2	Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica. . . . .	46
2.3	Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile. . . . .	52
2.4	Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili. . . . .	55
<b>3</b>	<b>Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo</b>	<b>63</b>
3.1	Impostazione del problema. . . . .	63
3.2	Risultati preliminari. . . . .	64
3.3	Teorema di unicità. . . . .	67
3.4	Teorema di stabilità. . . . .	75
<b>4</b>	<b>Equazioni di Navier-Stokes in coordinate curvilinee.</b>	<b>79</b>
4.1	Sistemi di coordinate curvilinee. . . . .	79
4.2	Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali. . . . .	92
4.3	Equazioni di Navier-Stokes in diversi sistemi di coordinate curvilinee	100

<b>5</b>	<b>Moti di Poiseuille e di Couette per un fluido newtoniano incomprimibile</b>	<b>111</b>
5.1	Premesse. . . . .	111
5.2	Moto di Poiseuille tra due piani paralleli. . . . .	112
5.3	Moto di Couette tra due piani paralleli. . . . .	120
5.4	Moto di Poiseuille in un cilindro illimitato. . . . .	126
<b>6</b>	<b>Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incomprimibile</b>	<b>139</b>
6.1	Premesse . . . . .	139
6.2	Moto di von Karman. . . . .	143
6.3	Soluzioni non simmetriche . . . . .	157
<b>7</b>	<b>Magnetofluidodinamica</b>	<b>167</b>
7.1	Brevi richiami di elettromagnetismo . . . . .	167
7.2	Elementi di magnetofluidodinamica . . . . .	171
7.3	Moto di Poiseuille tra due piani in un campo magnetico esterno . . . . .	176
7.4	Moto di Couette tra due piani in un campo magnetico esterno. . . . .	186
7.5	Appendice sulle unità di misura. . . . .	194
<b>8</b>	<b>Termomeccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale</b>	<b>197</b>
8.1	Analisi della deformazione per un corpo continuo. . . . .	197
8.2	Condizione di incomprimibilità ed equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale. . . . .	208
8.3	Prima e seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale. . . . .	214
8.4	Equazione e disequazione indefinita conseguenze degli assiomi della termodinamica. . . . .	221
<b>9</b>	<b>Solidi termoelastici e solidi elastici</b>	<b>227</b>
9.1	Classe costitutiva dei solidi termoelastici. . . . .	227
9.2	Proprietà dei solidi termoelastici. . . . .	235
9.3	Solidi elastici. . . . .	238
<b>10</b>	<b>Solidi elastici lineari</b>	<b>247</b>
10.1	Definizione di solido elastico lineare. . . . .	247
10.2	Sottoclassi di solidi elastici lineari. . . . .	256
10.3	Elastostatica lineare. . . . .	264
10.4	Elastodinamica lineare. . . . .	274

---

<b>11 Propagazione ondosa nei solidi elastici lineari</b>	<b>289</b>
11.1 Premesse . . . . .	289
11.2 Tensore acustico di un solido elastico lineare. . . . .	290
11.3 Autovalori ed autovettori di un tensore di ordine due simmetrico. . . . .	292
11.4 Onde piane progressive. . . . .	300
11.5 Onde piane progressive elastiche. . . . .	304



# Capitolo 1

## Approfondimenti sui fluidi perfetti

### 1.1 Alcune proprietà dei fluidi perfetti in quiete.

Richiamiamo dapprima la definizione di fluido propriamente detto.

**Definizione 1.1.** *Un fluido propriamente detto è un corpo continuo caratterizzato dal punto di vista puramente meccanico, in ambito spaziale, dalla seguente relazione sforzo-deformazione:*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}}, \quad (1.1.1)$$

dove

$\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è il tensore degli sforzi di Cauchy;

$p = p(P, t)$  è la pressione del fluido ( $p > 0$  in ogni punto ed in ogni istante);

$\tilde{a}$  è il tensore fondamentale;

$\tilde{\hat{T}}$  è una funzione tensoriale del secondo ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ), tale che

$\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta, P)$ , con  $\tilde{D}$  tensore di velocità di deformazione e  $\vartheta$  temperatura assoluta, soddisfacente alla condizione  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta, P) = \tilde{0}$ .

La funzione  $\tilde{\hat{T}}$ , detta *parte viscosa del tensore degli sforzi*, è fornita dall'esperienza.

Ricordiamo che il tensore di velocità di deformazione ha la seguente espressione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}),$$

dove  $\vec{v}$  è il campo spaziale della velocità.

I fluidi propriamente detti schematizzano il comportamento di molti liquidi e gas reali. In particolare i fluidi incompressibili sono un modello per i liquidi reali.

**Definizione 1.2.** *Un fluido per il quale la parte viscosa del tensore degli sforzi è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, si dice non viscoso.*

Si osservi che per un fluido propriamente detto che sia in quiete o si muova di moto rigido la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla poiché nelle condizioni dette sopra il campo tensoriale  $\tilde{D}$  è identicamente nullo.

Richiamiamo ora la definizione di fluido perfetto.

**Definizione 1.3.** *Un fluido perfetto o fluido ideale è un fluido propriamente detto, caratterizzato, da un punto di vista puramente meccanico, dalla relazione sforzo-deformazione*

$$\tilde{T} = -p\tilde{a}.$$

Dunque un fluido perfetto è un fluido propriamente detto non viscoso. La relazione sforzo-deformazione mostra che in un fluido perfetto il tensore degli sforzi di Cauchy è isotropo; l'isotropia di  $\tilde{T}$  traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che i liquidi e i gas reali schematizzabili con il modello di fluido perfetto (ad esempio l'aria e l'acqua) hanno proprietà meccaniche indipendenti dalla direzione.

Può essere interessante vedere che forma assume in un fluido perfetto lo sforzo specifico in un punto  $P$  all'istante  $t$  coordinato alla direzione orientata di versore arbitrario  $\vec{u}$ , ossia  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$ . Per il teorema di Cauchy sugli sforzi si ha:

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u} = -p(P, t)\tilde{a} \cdot \vec{u},$$

da cui discende:

$$T_i(P, t, \vec{u}) = T_{ij}(P, t) u_j = -p(P, t) a_{ij} u_j = -p(P, t) \delta_{ij} u_j = -p(P, t) u_i,$$

e quindi

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = -p(P, t) \vec{u}.$$

Allora deduciamo che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale, e questo è tradotto dal fatto che  $\vec{T}(\vec{u}) \parallel \vec{u}$ , ed inoltre ha carattere di pressione, e questo è tradotto dal fatto che essendo  $p > 0$ ,  $\vec{T}(\vec{u})$  e  $\vec{u}$  hanno verso opposto, qualunque sia  $\vec{u}$ .



Richiamiamo ora la forma che assume dal punto di vista spaziale la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}$$

dove

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v}' + \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v};$$

$\rho$  = densità di massa;

$\vec{F}$  = densità delle forze esterne di massa.

Se si utilizza la relazione sforzo-deformazione, la I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui per un fluido perfetto assume la forma seguente:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \quad (1.1.2)$$

Infatti la componente  $i$ -esima della  $\operatorname{div} \tilde{T}$  è data da:

$$[\operatorname{div} \tilde{T}]_i = T_{ij,j} = -p_{,j} \delta_{ij} = -p_{,i} = -[\operatorname{grad} p]_i.$$

La (1.1.2) è nota come **equazione fondamentale della dinamica dei fluidi perfetti** o anche come **equazione di Eulero**.

Supponiamo di avere un fluido perfetto in quiete nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti si riduce a

$$\vec{0} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \quad (1.1.3)$$

nota come **equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti**.

In tale equazione possiamo riguardare  $\rho$ ,  $\vec{F}$ ,  $p$  indipendenti dal tempo ossia  $\rho = \rho(P)$ ,  $\vec{F} = \vec{F}(P)$ ,  $p = p(P)$ .

Supponiamo  $\vec{F} \in \mathcal{C}(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ , dove  $S$  è la regione occupata dal fluido.

Osserviamo che la (1.1.3) governa anche la statica di ogni fluido propriamente detto, poiché, come rilevato precedentemente, in condizioni di quiete, per un tale fluido la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy è nulla. Perciò quanto nel seguito dedurremo per la statica dei fluidi perfetti si estende anche a qualsiasi fluido propriamente detto.

Dalla (1.1.3) discende immediatamente il seguente

**Teorema 1.1.** *Condizione necessaria affinché un fluido perfetto sia in quiete è che  $\rho \vec{F}$  provenga da un potenziale scalare, ossia che esista un campo scalare  $U \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che in  $S$*

$$\rho \vec{F} = \operatorname{grad} U.$$

Dunque l'equazione fondamentale della statica si riduce a :

$$\text{grad}(U - p) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui deduciamo che la pressione e il potenziale da cui proviene  $\rho \vec{F}$  differiscono per una costante ossia

$$p = U + c \quad \text{in } S \quad \text{con } c = \text{costante.} \quad (1.1.4)$$

Abbiamo perciò ottenuto la seguente

**Proposizione 1.1.** *Per un fluido perfetto in quiete gli insiemi di livello della pressione, detti superfici isobariche, coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene il campo vettoriale  $\rho \vec{F}$  con  $\vec{F}$  densità delle forze esterne di massa ossia le superfici isobariche sono anche superfici equipotenziiali.*

Consideriamo un fluido perfetto incomprimibile che schematizzi un liquido reale (ad esempio acqua) contenuto in un recipiente rigido aperto. Indicata con  $S$  la regione occupata dal fluido, avremo:

$$\partial S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

con  $\Sigma_1$  costituita dalle pareti materiali rigide del recipiente e  $\Sigma_2$  superficie di separazione tra il fluido e l'aria, detta *superficie libera*. E' evidente che  $\Sigma_2$  è una superficie isobarica poiché i suoi punti sono soggetti alla pressione atmosferica che si può riguardare costante in regioni limitate dello spazio.

Potremmo anche assumere che il recipiente sia immerso nel vuoto oppure che il recipiente sia chiuso e che il liquido in esso contenuto non ne raggiunga il coperchio e sia sotto vuoto. In tal caso la superficie libera  $\Sigma_2$  è ancora una superficie isobarica poiché tutti i suoi punti sono soggetti a pressione nulla.

Supponiamo inoltre che il fluido perfetto incomprimibile sia omogeneo, pesante e in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

Ci proponiamo di determinarne la superficie libera e di stabilire la cosiddetta **Legge di Stevino per la pressione**.

Osserviamo in primo luogo che se il fluido incomprimibile è omogeneo, la sua densità di massa è costante tanto in condizioni di quiete che di moto.

Infatti per l'ipotesi di incomprimibilità si ha

$$\dot{\rho} = 0,$$

mentre l'ipotesi di omogeneità implica :

$$\text{grad}\rho = \vec{0}.$$

D'altra parte

$$\dot{\rho} = \rho' + \text{grad}\rho,$$

da cui

$$\rho' = 0 \quad \implies \quad \rho = \text{costante positiva.}$$

Fatte queste premesse, vediamo ora di determinare la superficie libera del fluido considerato, avendo introdotto il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ , fisso rispetto ad un osservatore terrestre, con l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente. Poiché le uniche forze esterne di massa agenti sono le forze peso, abbiamo:

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3,$$

dove con  $g$  denotiamo l'accelerazione di gravità.

Essendo la densità di massa costante, si ha che  $\rho \vec{F}$  proviene da un potenziale dato da

$$U = -\rho g x_3$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero.

D'altra parte, le superfici isobariche sono anche superfici equipotenziali, ossia insiemi di livello per il potenziale, e dunque sono porzioni di piani orizzontali di equazione  $x_3 = \text{costante}$ . In particolare, anche  $\Sigma_2$ , essendo una superficie isobarica, è una porzione di piano orizzontale.

Vediamo ora di stabilire la Legge di Stevino sempre per lo stesso fluido. Dalla (1.1.4) deduciamo:

$$p = -\rho g x_3 + c \quad \text{con } c = \text{costante} . \quad (1.1.5)$$

Per determinare il valore della costante  $c$ , prendiamo l'origine  $O$  dell'asse  $Ox_3$  sulla base del recipiente nel quale il liquido è contenuto. I punti di  $\Sigma_2$  abbiano quota  $h$  e indichiamo con  $p_a$  la pressione atmosferica, ossia la pressione su  $\Sigma_2$ . Nei punti di  $\Sigma_2$  abbiamo quindi:

$$p_a = -\rho g h + c$$

da cui

$$c = p_a + \rho g h.$$

Sostituendo nella (1.1.5), deduciamo:

$$p = \rho g(h - x_3) + p_a.$$

Tale relazione è detta **Legge di Stevino** e stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un fluido perfetto incompressibile, omogeneo, pesante,

contenuto in un recipiente aperto, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ovviamente se la superficie libera del fluido è a contatto col vuoto  $p_a = 0$ .

Vediamo ora di determinare la superficie libera per un fluido perfetto incomprimibile, omogeneo, pesante, contenuto in un recipiente aperto, che sia in quiete rispetto ad un osservatore solidale con il recipiente stesso nell'ipotesi che quest'ultimo sia in moto rispetto ad un osservatore terrestre.

Limitiamoci a considerare due casi.

### Caso 1

Il recipiente si muove rispetto all'osservatore terrestre di moto traslatorio rettilineo con accelerazione costante orizzontale  $\vec{a}_0$ .

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre il riferimento con l'asse  $Ox_3$  diretto come la verticale ascendente e l'asse  $Ox_2$  parallelo e concorde con  $\vec{a}_0$ . Poiché il moto del recipiente rispetto all'osservatore terrestre (riguardato come un osservatore inerziale) non è traslatorio rettilineo uniforme, l'osservatore solidale con il recipiente, rispetto al quale il fluido è in quiete, non è inerziale e perciò nell'esaminare le forze esterne di massa agenti sul fluido, dobbiamo tener conto, oltre che delle forze peso, anche delle forze apparenti. Tuttavia queste si riducono alle sole forze di trascinamento perché le forze di Coriolis sono nulle, essendo il fluido in quiete rispetto all'osservatore non inerziale. Essendo poi il moto di questo osservatore traslatorio rispetto a quello terrestre, l'accelerazione di trascinamento delle particelle del fluido è coincidente con  $\vec{a}_0$ . Dunque

$$\rho \vec{F} = -\rho g \vec{e}_3 - \rho a_0 \vec{e}_2.$$

Poiché  $\rho = \text{costante}$ , deduciamo che  $\rho \vec{F}$  proviene dal potenziale  $U$  dato da

$$U = -\rho g x_3 - \rho a_0 x_2, \quad (1.1.6)$$

a meno di una costante additiva arbitraria che possiamo prendere uguale a zero. Allora per determinare la forma della superficie libera  $\Sigma_2$ , che, essendo una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale, è sufficiente determinare le superfici di livello del potenziale  $U$ . Dalla (1.1.6) vediamo che tali superfici sono il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$\rho g x_3 + \rho a_0 x_2 = c,$$

ossia tali che

$$g x_3 + a_0 x_2 = c,$$

dove abbiamo indicato ancora con  $c$  la costante  $\frac{c}{\rho}$ .

Le superfici equipotenziali sono perciò il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali

che

$$x_3 = -\frac{a_0}{g}x_2 + c,$$

cioè porzioni di piani paralleli all'asse  $Ox_1$ .

Se consideriamo l'intersezione di uno di tali piani con il piano  $Ox_2x_3$ , di equazione  $x_1 = 0$ , questa risulta la retta giacente nel piano  $Ox_2x_3$  di equazione

$$x_3 = -\frac{a_0}{g}x_2 + c,$$

avente pendenza  $m = -\frac{a_0}{g}$ .

Allora le superfici isobariche, e quindi anche la superficie libera, sono porzioni di piani inclinati sull'orizzontale.

### Caso 2

Il recipiente si muove di moto rotatorio uniforme con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno ad un asse verticale fisso rispetto ad un osservatore terrestre.

Scegliamo il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore terrestre in modo che l'asse  $Ox_3$  coincida con l'asse di rotazione e sia orientato come la verticale ascendente. Il fluido è in quiete rispetto all'osservatore solidale con il recipiente, osservatore che non è inerziale poichè si muove di moto rotatorio uniforme rispetto a quello terrestre. Dovremo dunque tener conto delle forze apparenti che si riducono alle sole forze centrifughe dal momento che le forze di Coriolis non danno alcun contributo nel caso di quiete.

Si ha perciò:

$$\rho \vec{F}(P) = -\rho g \vec{e}_3 + \rho \omega^2 (P - P^*)$$

dove  $P^*$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse di rotazione, cioè sull'asse  $Ox_3$ . Tenendo presente che  $\rho$  è costante, deduciamo allora che il potenziale ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} U &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{|P - P^*|^2}{2} \\ &= -\rho g x_3 + \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

a meno di una costante additiva arbitraria.

Poichè  $\Sigma_2$  è una superficie isobarica, è anche una superficie equipotenziale e per la (1.1.7) risulta il luogo dei punti  $P(x_1, x_2, x_3) \in S$  tali che

$$\rho g x_3 = \rho \omega^2 \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} + c,$$

ossia tali che

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} (x_1^2 + x_2^2) + c,$$

dove abbiamo indicato ancora con  $c$  la costante  $\frac{c}{\rho g}$ .

La superficie libera in questo secondo caso è dunque una porzione di paraboloido di rotazione attorno all'asse  $Ox_3$ .

Consideriamo ora un fluido perfetto **barotropico**. Richiamiamone la definizione.

**Definizione 1.4.** *Definiamo fluido perfetto barotropico un fluido perfetto comprimibile per il quale sussista la seguente relazione tra pressione e densità di massa:*

$$p = f(\rho), \quad f(0, +\infty) > 0, \quad f \in \mathcal{C}^1((0, +\infty)), \quad \frac{df}{d\rho}(0, +\infty) > 0.$$

Osserviamo che la funzione  $f$ , essendo strettamente crescente, è invertibile ed avremo quindi:

$$p = f(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \rho = f^{-1}(p).$$

Introduciamo ora una nuova definizione.

**Definizione 1.5.** *Dato un fluido perfetto barotropico, è chiamata entalpia la seguente funzione della pressione, definita a meno di una costante additiva arbitraria:*

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{f^{-1}(p)}.$$

In condizioni di quiete la pressione dipende solo da  $P$  e quindi anche l'entalpia viene a dipendere solo da  $P$  tramite la pressione. Otteniamo perciò

$$\text{grad}\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \text{grad}p = \frac{1}{f^{-1}(p)} \text{grad}p = \frac{\text{grad}p}{\rho}.$$

D'altra parte l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti fornisce:

$$\vec{F} = \frac{\text{grad}p}{\rho},$$

da cui, per il precedente risultato, discende:

$$\vec{F} = \text{grad}\mathcal{P}. \tag{1.1.8}$$

Come conseguenza della (1.1.8), si ha il seguente

**Teorema 1.2.** *Dato un fluido perfetto barotropico, condizione necessaria affinché sia in quiete è che la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga da un potenziale, cioè che esista un campo scalare  $U_1 \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che in  $S$*

$$\vec{F} = \text{grad}U_1.$$

**Osservazione 1.1.** Se in luogo di un fluido perfetto barotropico abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo, sussiste lo stesso teorema perché, essendo  $\rho$  costante, l'equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti si può scrivere come:

$$\vec{F} = \text{grad} \frac{p}{\rho}.$$

Grazie alla (1.1.8) ed al teorema 1.2, deduciamo:

$$\text{grad}(U_1 - \mathcal{P}) = \vec{0} \quad \text{in } S,$$

da cui

$$\mathcal{P} = U_1 + c_1 \quad \text{in } S \quad (1.1.9)$$

con  $c_1 = \text{costante}$ .

Poiché le superfici isobariche sono anche insiemi di livello per l'entalpia, otteniamo la seguente

**Proposizione 1.2.** *Per un fluido perfetto barotropico in quiete le superfici isobariche coincidono con gli insiemi di livello del potenziale da cui proviene la densità delle forze esterne di massa e sono quindi anche superfici equipotenziali.*

D'altra parte, per la relazione tra pressione e densità, le superfici nei punti delle quali è costante la densità, dette *superfici isopicnotiche*, sono anche superfici isobariche e perciò sono anch'esse superfici equipotenziali.

## ESEMPI

Determiniamo l'entalpia ed alcuni interessanti risultati relativi alla quiete rispetto ad un osservatore terrestre per due classi di fluidi perfetti barotropici.

### Esempio 1.

Un gas perfetto in condizioni isotermitiche, come si vede immediatamente, si comporta come un fluido barotropico.

Infatti, ricordiamo che un gas perfetto è un fluido perfetto caratterizzato dalla seguente equazione di stato:

$$p = R\vartheta\rho,$$

dove  $R$  è una costante positiva e  $\vartheta$  è la temperatura assoluta.

Se il gas evolve in condizioni isotermitiche nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha

$$\vartheta(P, t) = \vartheta_0 \quad \forall P \in S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

con  $\vartheta_0$  costante positiva.

Sostituendo nell'equazione di stato, deduciamo:

$$p = C \rho,$$

dove si è posto  $C = R\vartheta_0$  (costante positiva).

Dunque

$$p = f(\rho) \quad \text{con} \quad f(\rho) = C \rho.$$

E' immediato verificare che la funzione  $f$  soddisfa alle ipotesi richieste dalla definizione di fluido barotropico.

Procuriamoci l'entalpia, tenendo presente che nel nostro caso  $f^{-1}(p) = \frac{p}{C}$ :

$$\mathcal{P}(p) = C \int \frac{dp}{p} = C \ln p + \text{costante}.$$

Supponiamo allora di avere un gas perfetto in condizioni isotermeche, soggetto solo alle forze peso, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Fissiamo come riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine  $O$  appartenente alla regione occupata dal gas e con l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente. Ci proponiamo di studiare come varia la pressione in tale gas al variare della quota.

Per quanto abbiamo visto relativamente alla quiete di un fluido barotropico, sappiamo che le superfici isobariche sono porzioni di piani orizzontali poiché  $U_1 = -gx_3 + \text{costante}$ . Se teniamo presente la (1.1.9) e l'espressione dedotta prima per l'entalpia, otteniamo:

$$C \ln p = -gx_3 + c_1, \tag{1.1.10}$$

dove in  $c_1$  abbiamo conglobato la costante inessenziale che compare nell'espressione di  $\mathcal{P}$ . Vediamo di determinare la costante  $c_1$ .

A tal fine indichiamo con  $p_0$  il valore che la pressione assume nei punti del gas che sono a quota  $x_3 = 0$ . Ponendo in (1.1.10)  $x_3 = 0$ , deduciamo:

$$c_1 = C \ln p_0.$$

Sostituendo nella (1.1.10), abbiamo

$$C (\ln p - \ln p_0) = -gx_3$$

da cui

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{C} x_3. \tag{1.1.11}$$



D'altra parte per  $x_3 = 0$  anche la densità di massa assume un valore costante  $\rho_0$  e dunque per  $x_3 = 0$  si ha

$$p_0 = C \rho_0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Inserendo nella (1.1.11) l'espressione ottenuta per  $c$ , otteniamo

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3,$$

da cui deduciamo

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{\rho_0}{p_0} g x_3 \right\}, \quad (1.1.12)$$

nota come **legge barometrica**.

Tale legge stabilisce come varia la pressione al variare della quota in un gas perfetto in condizioni isotermeche, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

In particolare la legge barometrica si applica alla pressione atmosferica quando siamo in condizioni isotermeche.

### Esempio 2.

Consideriamo ora un gas perfetto in condizioni isentropiche (ossia ad entropia costante) per il quale uno dei due calori specifici sia costante. Per una proprietà dei gas perfetti risulta costante anche l'altro calore specifico.

Si può dimostrare che in tali ipotesi la pressione ha la seguente forma:

$$p = C_0 \rho^\gamma \quad (1.1.13)$$

con  $C_0 =$  costante positiva,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} =$  costante  $> 1$ ,  $C_p$  e  $C_v$  calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante rispettivamente.

Dunque il gas perfetto in condizioni isentropiche si comporta come un fluido perfetto barotropico con  $f(\rho) = C_0 \rho^\gamma$ .

Grazie alla (1.1.13), si ottiene che la densità di massa è data da

$$\rho = \left( \frac{p}{C_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

A questo punto procuriamoci l'entalpia:

$$\mathcal{P}(p) = C_0^{\frac{1}{\gamma}} \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = C_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \text{costante}. \quad (1.1.14)$$

Supponiamo ora che il gas perfetto in condizioni isentropiche sia pesante ed in quiete rispetto ad un osservatore terrestre. Ci proponiamo di stabilire come varia la pressione al variare della quota, avendo fissato come riferimento associato all'osservatore un riferimento cartesiano ortonormale avente l'origine  $O$  appartenente alla regione occupata dal gas e l'asse  $Ox_3$  verticale ascendente. Se teniamo conto delle (1.1.9), (1.1.14), abbiamo:

$$C_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -gx_3 + c_2. \quad (1.1.15)$$

Ponendo nella (1.1.15)  $x_3 = 0$  e denotando con  $p_0$  il valore della pressione nei punti a quota zero, otteniamo:

$$c_2 = C_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Sostituiamo il valore trovato per  $c_2$  nella (1.1.15) e dividiamo entrambi i membri della relazione ottenuta per  $C_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1}$ . Deduciamo allora:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{1}{C_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (1.1.16)$$

D'altra parte, se indichiamo con  $\rho_0$  la densità di massa (costante) per  $x_3 = 0$ , abbiamo

$$p_0 = C_0 \rho_0^\gamma \quad \Longrightarrow \quad C_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

La sostituzione di  $C_0$  nella (1.1.16) porta alla relazione

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g x_3 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

che si può scrivere nella forma:

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[ -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right],$$

da cui infine

$$p = p_0 \left[ -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g x_3 + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1.1.17)$$

La (1.1.17) esprime la legge con cui varia la pressione al variare della quota per un gas perfetto in condizioni isentropiche, pesante, in quiete rispetto ad un osservatore terrestre.

In particolare tale legge si applica alla pressione atmosferica quando siamo in condizioni isentropiche.

## 1.2 Traiettorie, linee di flusso, moto stazionario per un generico corpo continuo.

Sia dato un corpo continuo in moto rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . All'osservatore sia associato il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$  e denotiamo con  $S_0$  la regione occupata dal corpo nella configurazione di riferimento.

Per brevità poniamo  $\mathcal{S}_0 = S_0 \times [t_0, t_1]$  e  $\xi(\mathcal{S}_0) = \xi(S_0) \times [t_0, t_1]$ , dove ricordiamo che  $\xi$  è l'applicazione dallo spazio geometrico  $\mathcal{E}$  a  $\mathbb{R}^3$  che associa ad ogni punto  $P \in \mathcal{E}$  la terna  $(x_1, x_2, x_3)$  delle sue coordinate cartesiane.

Dal punto di vista materiale il moto del corpo continuo può essere descritto in uno dei tre modi seguenti:

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.2.1)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (1.2.2)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (1.2.3)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

Nel seguito supporremo sempre che il moto del corpo continuo sia *regolare*, cioè che siano soddisfatte le due seguenti condizioni:

- 1)  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  o equivalentemente  $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$   $i = 1, 2, 3$  ;
- 2)  $J(P_0, t) = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) > 0 \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ .

Consideriamo la particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ . Fissata tale particella, l'applicazione

$$\begin{aligned} x(P_0, \cdot) : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathcal{E} \\ t &\mapsto P = x(P_0, t) \end{aligned}$$

è la curva che ne descrive il moto.

**Definizione 1.6.** *Il sostegno della curva  $x(P_0, \cdot)$  è detta traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ .*

Se  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate di  $P_0$ , allora le (1.2.3) sono le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $t$  della traiettoria della particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ .

Se il moto del corpo continuo è descritto dal punto di vista materiale le traiettorie delle particelle sono dunque note.

Supponiamo ora che il moto sia descritto dal punto di vista spaziale. Indichiamo con  $S(t)$  la regione occupata dal continuo all'istante  $t$  con  $t \in [t_0, t_1]$  e per brevità poniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} : P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\}, \\ \xi(\mathcal{S}) &= \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S(t)), t \in [t_0, t_1]\}. \end{aligned}$$

Dal punto di vista spaziale il moto è descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{v}(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S} \quad (1.2.4)$$

che ci fornisce il campo spaziale della velocità, cioè ci dice qual è la velocità all'istante  $t$  della particella che in tale istante occupa la posizione  $P$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}) \quad (1.2.5)$$

che ci dà la rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità;

- mediante le tre equazioni scalari

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \xi(\mathcal{S}) \quad (1.2.6)$$

che ci forniscono le componenti della rappresentazione analitica del campo spaziale della velocità.

Per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale.

Prendiamo come configurazione di riferimento quella iniziale, cioè prendiamo  $\varphi_0 = \varphi_{t_0}$ .

Rivolgiamo la nostra attenzione alla particella che all'istante  $t_0$  si trova in  $P_0$  e denotiamo con  $P(t)$  la posizione che tale particella occupa all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  per cui  $P(t) = x(P_0, t)$  e  $P(t_0) = P_0$ .

Essendo il moto descritto dal punto di vista spaziale, è noto il campo spaziale della velocità. Se allora la particella all'istante  $t$  si trova in  $P$ , la sua velocità, data da  $\frac{dP}{dt}$ , è uguale a  $\vec{v}(P, t)$ .

Deduciamo perciò che la curva  $P(t)$  che descrive il moto della particella è la curva soluzione del problema di Cauchy in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t) \\ P(t_0) = P_0, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

che è equivalente al seguente problema di Cauchy in forma scalare

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ x_i(t_0) = x_{0i} & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Il sistema è in forma normale e supponiamo che i secondi membri delle tre equazioni soddisfino alle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy relativo all'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora per risolvere il problema di Cauchy (1.2.8) ci procuriamo dapprima la soluzione generale del sistema che, come è noto, è una terna di funzioni che dipende da tre costanti arbitrarie  $C_1, C_2, C_3$ :

$$x_i = \hat{x}_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Determiniamo poi i valori che devono essere attribuiti alle tre costanti in modo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali; ovviamente tali valori dipendono dai dati iniziali  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ . Se nella soluzione generale sostituiamo alle tre costanti i valori trovati, otteniamo la soluzione cercata che risulta dipendere oltre che da  $t$  anche da  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$ :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.2.9)$$

Le (1.2.9) sono le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale  $t_0$  occupa la posizione  $P_0$  avente come terna delle sue coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  e quindi rappresentano anche le equazioni parametriche con

parametro  $t$  della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\xi(S_0)$ , determiniamo le traiettorie di tutte le particelle.

Introduciamo ora una nuova definizione.

**Definizione 1.7.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare rispetto ad un dato osservatore nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  ed il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale.*

*Fissato  $t$  in  $[t_0, t_1]$ , chiamiamo linea di flusso all'istante  $t$  il sostegno di ogni curva  $P(\lambda)$  che sia soluzione massimale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t). \quad (1.2.10)$$

E' importante osservare che nell'equazione differenziale (1.2.10) la variabile indipendente è  $\lambda$ , mentre  $t$  assume un valore fissato.

Sia  $\gamma_t$  una linea di flusso all'istante  $t$ ; ovviamente  $\gamma_t \subset S(t)$ . Sia poi  $P \in \gamma_t$  per cui  $P = P(\lambda)$  per un dato valore di  $\lambda$ . Per definizione di linea di flusso:

$$\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) = \vec{v}(P(\lambda), t). \quad (1.2.11)$$

Supponiamo  $\vec{v}(P(\lambda), t) \neq \vec{0}$  per cui anche  $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) \neq \vec{0}$ .

Come è ben noto,  $\frac{dP}{d\lambda}(\lambda)$  è un vettore direttore per la retta tangente a  $\gamma_t$  in  $P(\lambda)$ . Deduciamo allora che in tutti quei punti di  $\gamma_t$  in corrispondenza dei quali il campo della velocità all'istante  $t$  non è nullo la retta tangente è parallela al campo stesso.

Osserviamo che ovviamente traiettorie e linee di flusso in generale non sono coincidenti, poiché le traiettorie sono relative all'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , mentre le linee di flusso sono relative a singoli istanti e variano in generale da istante a istante.

Vediamo un esempio.

### Esempio 3.

Determiniamo traiettorie e linee di flusso per un corpo continuo, occupante tutto lo spazio, in moto nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty)$ , le cui equazioni di moto dal

punto di vista spaziale siano le seguenti:

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{x_2}{\tau} \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$$

dove  $V$  e  $\tau$  sono costanti.

Occupiamoci dapprima delle traiettorie.

Come abbiamo visto, per determinare le traiettorie delle particelle dobbiamo passare dalle equazioni di moto dal punto di vista spaziale a quelle dal punto di vista materiale prendendo come configurazione di riferimento quella iniziale, ossia quella assunta dal corpo continuo all'istante  $t = 0$ .

Consideriamo dunque la particella che all'istante  $t = 0$  si trova in  $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  e troviamo le equazioni cartesiane del suo moto.

A tal fine dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (1.2.8) che nel nostro caso si presenta nella forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_i(0) = x_{0i} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Come si vede immediatamente, il sistema differenziale è costituito da tre equazioni disaccoppiate e perciò possiamo risolvere separatamente i tre problemi di Cauchy che si ottengono associando ad ogni equazione la relativa condizione iniziale.

Consideriamo dapprima il problema differenziale con incognita  $x_1$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ x_1(0) = x_{01}. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

L'equazione differenziale del problema (1.2.12) è del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea e possiamo scriverla nella forma

$$\frac{dx_1}{dt} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}.$$

Per un noto risultato di Analisi, la sua soluzione generale è data dalla somma della soluzione generale  $\hat{x}_1$  dell'omogenea associata e di una soluzione particolare

$x_1^*$  dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da:

$$\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}},$$

dove  $C_1$  è una costante arbitraria.

Per determinare  $x_1^*$ , teniamo presente che il termine a secondo membro dell'equazione completa è un polinomio di I grado in  $t$ ; siamo allora ricondotti a cercare  $x_1^*$  della forma:

$$x_1^* = At + B,$$

dove  $A, B$  sono costanti da determinarsi imponendo che  $x_1^*$  sia soluzione dell'equazione.

Poiché  $\frac{dx_1^*}{dt} = A$ , sostituendo nell'equazione completa, otteniamo:

$$A - \frac{At + B}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \quad \forall t > 0, \quad (1.2.13)$$

ossia

$$-At + A\tau - B = -Vt. \quad (1.2.14)$$

Dalla (1.2.14) si deduce

$$A = \frac{B}{\tau}, \quad A = V \quad \Longrightarrow \quad B = V\tau.$$

Otteniamo perciò che la soluzione generale dell'equazione del problema (1.2.12) ha la seguente forma:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Per determinare la costante  $C_1$  imponiamo la condizione iniziale:

$$x_{01} = C_1 + V\tau,$$

da cui si ottiene

$$C_1 = x_{01} - V\tau.$$

Perciò la soluzione del problema (1.2.12) è

$$x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau).$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy relativo a  $x_2$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{\tau} \\ x_2(0) = x_{02}. \end{cases} \quad (1.2.15)$$



L'equazione del problema è lineare, a coefficienti costanti ed omogenea. La sua soluzione generale è

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove  $C_2$  è una costante arbitraria che si determina imponendo la condizione iniziale e precisamente si ha

$$C_2 = x_{02}.$$

Dunque la soluzione del problema (1.2.15) è

$$x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Infine il problema di Cauchy relativo a  $x_3$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = 0 \\ x_3(0) = x_{03} \end{cases}$$

ha la soluzione

$$x_3 = x_{03}.$$

Otteniamo dunque che le equazioni cartesiane del moto della particella che all'istante iniziale occupa la posizione  $P_0$  di coordinate  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  sono

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) e^{\frac{t}{\tau}} + V(t + \tau) \\ x_2 = x_{02} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ x_3 = x_{03}. \end{cases} \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (1.2.16)$$

Tali equazioni sono anche le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $t$  della traiettoria della medesima particella.

Se facciamo variare  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  in  $\mathbb{R}^3$ , le (1.2.16) rappresentano le equazioni del moto del corpo continuo dal punto di vista spaziale ed anche le equazioni cartesiane parametriche delle traiettorie delle particelle con parametro  $t$ .

In primo luogo osserviamo che le traiettorie sono cammini piani che giacciono su piani  $x_3 = \text{costante}$ .

Se consideriamo una qualsiasi particella che all'istante  $t = 0$  occupa la posizione  $P_0$  avente  $x_{02} = 0$ , dalla seconda equazione delle (1.2.16) vediamo che la posizione da essa occupata ha nulla la seconda coordinata ad ogni istante  $t > 0$ . Dunque ogni particella di tale tipo ha come traiettoria un cammino rettilineo parallelo all'asse  $Ox_1$ .

Consideriamo ora quelle particelle per le quali si abbia  $x_{02} \neq 0$ . Sempre dalla seconda delle (1.2.16) vediamo che per tali particelle la coordinata  $x_2 \neq 0$  per ogni istante  $t > 0$  ed ha sempre lo stesso segno di  $x_{02}$ . In tal caso è possibile eliminare il parametro  $t$  dalle equazioni (1.2.16). Infatti dalla seconda deduciamo

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{x_2}{x_{02}} \implies e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{x_{02}}{x_2} \implies t = \tau \ln \frac{x_{02}}{x_2}.$$

Se sostituiamo nella prima equazione delle (1.2.16) otteniamo le equazioni cartesiane della traiettoria della particella che all'istante  $t = 0$  si trova nella posizione  $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  con  $x_{02} \neq 0$ :

$$\begin{cases} x_1 = (x_{01} - V\tau) \frac{x_{02}}{x_2} + V\tau(1 + \ln \frac{x_{02}}{x_2}) \\ x_3 = x_{03}. \end{cases}$$

Vediamo ora di determinare le linee di flusso ad un istante fissato  $t \in [0, +\infty)$ . In primo luogo dobbiamo procurarci le curve  $P(\lambda)$  che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che è equivalente al sistema differenziale di tre equazioni scalari:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

le cui incognite sono le tre funzioni:  $x_1 = x_1(\lambda)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda)$ ,  $x_3 = x_3(\lambda)$ .

Non abbiamo un problema differenziale di Cauchy poiché al sistema non sono associate condizioni iniziali.

Nel nostro caso il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{x_1 - Vt}{\tau} \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -\frac{x_2}{\tau} \\ \frac{dx_3}{d\lambda} = 0, \end{cases}$$

dove ricordiamo che  $t$  è un istante fissato e la variabile indipendente è  $\lambda$ .

Il sistema (1.2.17) è costituito da tre equazioni disaccoppiate che possiamo risolvere separatamente.

Occupiamoci dapprima dell'equazione nell'incognita  $x_1(\lambda)$  che scriviamo come

$$\frac{dx_1}{d\lambda} - \frac{x_1}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau}. \quad (1.2.17)$$

Si tratta di un'equazione differenziale del I ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, con secondo membro costante ( $t$  è un valore fissato).

La soluzione generale dell'omogenea associata è  $\hat{x}_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}}$  con  $C_1$  costante arbitraria, mentre possiamo prendere come soluzione particolare dell'equazione completa:  $x_1^* = A$  con  $A$  costante da determinarsi imponendo che  $x_1^*$  sia soluzione dell'equazione. Si ottiene:

$$-\frac{A}{\tau} = -\frac{Vt}{\tau} \implies A = Vt.$$

La soluzione generale della (1.2.17) è perciò:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \quad \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Per quanto riguarda la seconda equazione delle (1.2.17), la sua soluzione generale è data da

$$x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \quad \text{con } C_2 = \text{costante arbitraria, } \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Infine la soluzione generale dell'ultima delle (1.2.17) è

$$x_3 = C_3 \quad \text{con } C_3 = \text{costante arbitraria.}$$

In conclusione le equazioni cartesiane parametriche con parametro  $\lambda$  delle linee di flusso all'istante  $t$  fissato sono

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\frac{\lambda}{\tau}} + Vt \\ x_2 = C_2 e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \\ x_3 = C_3. \end{cases} \quad \forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

In corrispondenza di ogni terna  $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$  otteniamo una singola linea di flusso.

Osserviamo che le linee di flusso ad ogni istante sono cammini piani.

Inoltre, come si vede dalla seconda delle (1.2.18), le linee di flusso corrispondenti a  $C_2 = 0$  e  $C_1 \neq 0$  sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_1$ . Se poi è nullo anche  $C_1$  la linea di flusso degenera in un singolo punto.

Se  $C_2 \neq 0$  e  $C_1 = 0$ , le linee di flusso sono cammini rettilinei paralleli all'asse  $Ox_2$ .

Infine nel caso  $C_1, C_2 \neq 0$  possiamo eliminare dalle (1.2.18) il parametro  $\lambda$  utilizzando la seconda equazione parametrica:

$$e^{\frac{\lambda}{\tau}} = \frac{C_2}{x_2}.$$

Sostituendo nella prima, deduciamo:

$$x_1 - Vt = C_1 \frac{C_2}{x_2} \quad \implies (x_1 - Vt) x_2 = \text{costante}.$$

Se poi teniamo presente che  $x_3 = C_3$ , concludiamo che le linee di flusso ad ogni istante  $t$  fissato corrispondenti a  $C_1, C_2 \neq 0$  sono iperboli che giacciono su piani  $x_3 = \text{costante}$ , la cui posizione varia al variare di  $t$ .

Introduciamo ora altre definizioni.

**Definizione 1.8.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e il suo moto sia descritto dal punto di vista spaziale. Diremo che il moto del corpo continuo è stazionario in  $[t_0, t_1]$  dal punto di vista cinematico se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- 1)  $S(t) = S \quad \forall t \in [t_0, t_1]$  con  $S = \text{regione fissa di } \mathcal{E}$ ;
- 2)  $\vec{v} = \vec{v}(P)$ , ossia il campo spaziale della velocità è indipendente da  $t$ .

Ci proponiamo di dimostrare la seguente

**Proposizione 1.3.** *Se in un dato intervallo di tempo il moto di un corpo continuo è stazionario, traiettorie e linee di flusso coincidono.*

Dimostrazione

Ricordiamo che le traiettorie sono il sostegno delle curve  $P(t)$  soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P, t).$$

Ma, per definizione di moto stazionario, il campo della velocità è indipendente da  $t$ , per cui l'equazione scritta sopra assume la forma:

$$\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P). \quad (1.2.18)$$

D'altra parte, le linee di flusso ad un dato istante  $t$  sono il sostegno delle curve  $P(\lambda)$  soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P, t),$$

che, essendo il moto stazionario, si riduce a:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}(P). \quad (1.2.19)$$

Allora in primo luogo otteniamo che le linee di flusso, nel caso di moto stazionario, non variano al trascorrere del tempo.

Inoltre è immediato notare che le equazioni (1.2.18) e (1.2.19) sono della stessa forma con l'unica differenza che nella prima la variabile indipendente è  $t$ , mentre nella seconda è  $\lambda$ . Otteniamo allora che traiettorie e linee di flusso coincidono, come ci proponevamo di dimostrare.

Dunque se il moto è stazionario ogni traiettoria è linea di flusso e viceversa.

**Definizione 1.9.** *Dato un corpo continuo il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, diremo che un campo spaziale (scalare, vettoriale o tensoriale) legato al moto del continuo è stazionario se non dipende dal tempo.*

Ad esempio un campo scalare spaziale, legato al moto del corpo continuo, stazionario è della forma  $f = f(P)$ .

Si osservi che la derivata locale rispetto al tempo di un campo stazionario è nulla in ogni punto ed in ogni istante.

Dimostriamo il seguente

**Teorema 1.3.** *Sia dato un corpo continuo in moto stazionario dal punto di vista cinematico e sia  $f$  un campo scalare stazionario di classe  $\mathcal{C}^1(S)$ . Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- 1)  $\dot{f} = 0$  in  $S$
- 2)  $f$  è costante lungo ogni linea di flusso
- 3)  $\text{grad } f \cdot \vec{v} = 0$  in  $S$ .

Dimostrazione

$$1) \implies 2).$$

Se  $\dot{f} = 0$  in  $S$ , tenendo presente la definizione di derivata materiale rispetto al tempo di un campo spaziale, concludiamo che  $f$  è costante per ogni particella che seguiamo nel suo moto e dunque  $f$  è costante lungo ogni traiettoria. Ma, essendo il moto stazionario, ogni traiettoria è anche linea di flusso e quindi  $f$  è costante lungo ogni linea di flusso.

$$2) \implies 1).$$

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

1)  $\implies$  3).

Per ipotesi

$$\dot{f} = f' + \text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Ma, essendo  $f$  un campo stazionario, abbiamo  $f' = 0$  in  $S$  per cui la relazione precedente si riduce a

$$\text{grad } f \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

3)  $\implies$  1).

L'implicazione si dimostra procedendo in senso inverso a quanto abbiamo fatto prima.

Le restanti implicazioni sono conseguenza di quelle dimostrate.

### 1.3 Teoremi di Bernoulli, moti piani.

Introduciamo dapprima la seguente definizione

**Definizione 1.10.** *Diciamo che un corpo continuo, il cui moto sia descritto dal punto di vista spaziale, si muove di moto stazionario dal punto di vista meccanico se il suo moto è stazionario dal punto di vista cinematico ed ogni campo coinvolto nella descrizione del moto è stazionario.*

Stabiliamo il **I teorema di Bernoulli**

**Teorema 1.4.** *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico, in moto stazionario dal punto di vista meccanico. Se la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  proviene da un potenziale scalare  $U_1$ , allora lungo ogni linea di flusso si ha*

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante}$$

se il fluido è barotropico.

Dimostrazione

Osserviamo in primo luogo che, essendo il moto stazionario,  $\vec{v}' = \vec{0}$  in  $S$  per cui:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (1.3.1)$$

D'altra parte, si può dimostrare che

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{C}^1(S) : \quad \text{grad } \vec{u} \cdot \vec{u} = \text{rot } \vec{u} \times \vec{u} + \text{grad } \frac{\vec{u}^2}{2}. \quad (1.3.2)$$

Grazie alla (1.3.2), la (1.3.1) si scrive come:

$$\dot{\vec{v}} = \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

Allora l'equazione fondamentale dei fluidi perfetti (1.1.2) assume la forma

$$\rho (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}) = \rho \vec{F} - \text{grad } p. \quad (1.3.3)$$

Supponiamo dapprima che il fluido perfetto sia incomprimibile ed omogeneo per cui  $\rho$  è costante. Dividendo entrambi i membri della (1.3.3) per  $\rho$  e tenendo presente che  $\vec{F} = \text{grad } U_1$ , otteniamo:

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \vec{0}. \quad (1.3.4)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (1.3.4) per  $\vec{v}$  deduciamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, per il teorema 1.3, sfruttando l'implicazione 3)  $\implies$  2), si ottiene la prima parte della tesi.

Assumiamo ora che il fluido perfetto sia barotropico. Dividendo entrambi i membri della (1.3.3) per  $\rho$  e tenendo presente che  $\text{grad } \frac{p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}$ , si ha:

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \vec{0}. \quad (1.3.5)$$

Se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (1.3.5) per  $\vec{v}$  deduciamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = 0,$$

da cui, ancora per il teorema 1.3, si ottiene anche la seconda parte della tesi.

Vediamo ora di stabilire un risultato conseguenza del I teorema di Bernoulli, ossia il **Teorema delle tre altezze**.

**Teorema 1.5.** *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico rispetto ad un osservatore terrestre e soggetto soltanto alle forze peso. Allora, se l'asse verticale  $Ox_3$  è orientato come la verticale ascendente, lungo ogni linea di flusso si ha:*

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{costante}, \quad (1.3.6)$$

dove  $\frac{\overrightarrow{v}^2}{2g}$  è detta altezza cinematica,  $\frac{p}{\rho g}$  è detta altezza barometrica,  $x_3$  è detta altezza geometrica.

#### Dimostrazione

Per ipotesi abbiamo un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. Possiamo allora applicare il I teorema di Bernoulli, tenendo presente che, se ha l'asse  $Ox_3$  è diretto come la verticale ascendente,  $\vec{F} = -g \vec{e}_3$  e dunque  $\vec{F}$  proviene dal potenziale scalare  $U_1 = -g x_3 + c$ . Per il I teorema di Bernoulli abbiamo che lungo ogni linea di flusso:

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g x_3 = \text{costante},$$

da cui, dividendo per  $g$ , otteniamo la (1.3.6).

Spieghiamo perchè i tre termini che compaiono nella (1.3.6) sono chiamati altezza cinematica, altezza barometrica, altezza geometrica rispettivamente.

$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2g}$  rappresenta la quota da cui dovremmo lasciar cadere nel vuoto un punto materiale pesante per fargli acquistare una velocità di modulo  $v$ .

$\frac{p}{\rho g}$  rappresenta l'altezza che dovrebbe avere una colonna del fluido considerato, in quiete rispetto all'osservatore terrestre, con la superficie libera a pressione nulla, per esercitare sulla base della colonna una pressione pari a  $p$  (legge di Stevino).

$x_3$  rappresenta la quota della particella di fluido che stiamo considerando.

#### Stabiliamo ora il **II Teorema di Bernoulli**

**Teorema 1.6.** *Si consideri un fluido perfetto che sia incomprimibile ed omogeneo o barotropico. Se  $\vec{F}$  proviene da un potenziale  $U_1$  ed anche il campo della velocità proviene da un potenziale cinetico  $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$ , allora in  $\mathcal{S}$  si ha:*

$$\psi' + \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = C(t)$$



se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = C(t)$$

se il fluido è barotropico, con  $C(t)$  funzione del tempo.

Inoltre se il moto è stazionario dal punto di vista meccanico si ha:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 = \text{costante in } S$$

se il fluido è barotropico.

#### Dimostrazione

Considerata l'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi perfetti, dividiamone entrambi i membri per  $\rho$ :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (1.3.7)$$

Ma per la (1.3.2)

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v}' + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

D'altra parte

$$\vec{v} = \text{grad } \psi \implies \text{rot } \vec{v} = \vec{0}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} \\ &= \frac{\partial \text{grad } \psi}{\partial t} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} \\ &= \text{grad } \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} \\ &= \text{grad } \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (1.3.7) e tenendo presente che  $\vec{F} = \text{grad } U_1$ , otteniamo

$$\text{grad } \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \text{grad } U_1 - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (1.3.8)$$

D'altra parte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

per cui la (1.3.8) fornisce:

$$\text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P},$$

per cui dalla (1.3.8) si deduce:

$$\text{grad} \left( \psi' + \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} - U_1 \right) = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Dall'annullarsi dei due gradienti otteniamo allora la tesi della prima parte del teorema.

Se poi supponiamo che il moto del fluido sia stazionario dal punto di vista meccanico, ne discende che  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  per cui  $\psi' = 0$  in  $\mathcal{S}$ . Inoltre anche tutti gli altri campi non dipendono dal tempo e quindi  $C(t)$  si riduce ad una costante.

**Osservazione 1.2.** Osserviamo che la II parte del II teorema di Bernoulli continua a sussistere se al campo  $\vec{v}$  imponiamo soltanto la condizione di irrotazionalità, cioè la condizione  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ .

Introduciamo una nuova definizione.

**Definizione 1.11.** *Dato un corpo continuo, diremo che si muove di moto piano, con piano direttore  $Ox_1x_2$ , se  $\vec{v}(P, t)$  è parallelo a tale piano  $\forall (P, t) \in \mathcal{S}$  e la rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  non dipende da  $x_3$  per cui*

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t) \vec{e}_2.$$

Supponiamo ora di avere un corpo continuo che si muove di moto stazionario piano con piano direttore  $Ox_1x_2$ .

Allora  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2) \vec{e}_2$$

con  $v_1(x_1, x_2)$  e  $v_2(x_1, x_2)$  funzioni definite su un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  che supponiamo essere la chiusura di un aperto.

In particolare assumiamo di avere un corpo continuo incompressibile che si muove di moto stazionario piano.

La condizione di incompressibilità  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  in  $S$  implica

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che il moto sia irrotazionale, ossia  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  in  $S$ . Essendo il moto piano, l'irrotazionalità del moto implica

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \vec{0},$$

da cui

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } D.$$

Nelle ipotesi considerate si ha quindi in  $D$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Facciamo le due seguenti posizioni:

$$\alpha(x_1, x_2) := v_1(x_1, x_2), \quad \beta(x_1, x_2) := -v_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Allora le (1.3.9) assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Le (1.3.10) sono le note **condizioni di Cauchy-Riemann**, che sono condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione

$$g(z) = \alpha(x_1, x_2) + i \beta(x_1, x_2) \quad \text{con } z = x_1 + i x_2, \quad i = \text{unità immaginaria}$$

sia analitica in  $D$ .

Possiamo allora enunciare il seguente

**Teorema 1.7.** *Dato un corpo continuo incompressibile in moto piano, stazionario e irrotazionale, la funzione a valori complessi  $g(z) = v_1(x_1, x_2) - i v_2(x_1, x_2)$ , dove*

$v_1$  e  $v_2$  sono le componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità e  $z = x_1 + i x_2$  è analitica in  $D$ . Viceversa ogni funzione analitica in  $D$  genera una coppia  $(v_1, v_2)$  soluzione in  $D$  delle (1.3.9) e dunque  $v_1$  e  $v_2$  possono essere interpretate come le due componenti della rappresentazione analitica del campo della velocità di un corpo continuo incomprimibile che si muove di moto stazionario piano con velocità irrotazionale.

La funzione  $g(z)$  è detta *velocità complessa*.

Il teorema è applicabile ovviamente al caso in cui il corpo continuo sia un fluido perfetto. Se alle ipotesi del teorema 1.7 aggiungiamo le ulteriori ipotesi che il fluido perfetto sia omogeneo e soggetto a forze di massa nulle, per la seconda parte del II teorema di Bernoulli, si deduce, in aggiunta alle (1.3.9), anche l'equazione:

$$\frac{\overline{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{costante in } D,$$

dove abbiamo utilizzato le rappresentazioni analitiche della velocità e della pressione ed abbiamo tenuto presente che proiettando l'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi perfetti sull'asse  $Ox_3$  si ottiene che la rappresentazione analitica della pressione non dipende da  $x_3$ .

## 1.4 Teorema del trasporto della circolazione per un generico corpo continuo e applicazione ad un fluido perfetto.

Sia dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  rispetto ad un dato osservatore e indichiamo con  $S_0$  la regione occupata nella configurazione di riferimento.

Come sappiamo, il moto, dal punto di vista materiale, può essere descritto mediante l'equazione

$$P = x(P_0, t) \quad \text{con } (P_0, t) \in S_0.$$

Consideriamo una curva  $\psi_0 = \psi_0(\lambda)$  con  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , avente il sostegno  $\gamma_0$  contenuto in  $S_0$ :

$$\begin{aligned} \psi_0 : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S_0 \\ \lambda &\mapsto P_0 = \psi_0(\lambda). \end{aligned}$$

Inoltre siano

$$x_{0i} = x_{0i}^*(\lambda) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad i = 1, 2, 3$$

le equazioni cartesiane parametriche della curva.

Se consideriamo il corpo continuo nella configurazione di riferimento, allora tutti i punti di  $\gamma_0$  sono occupati da particelle del continuo.

Fissiamo un istante  $t \in [t_0, t_1]$  e consideriamo la curva

$$\begin{aligned} \psi_t : [\lambda_1, \lambda_2] &\rightarrow S(t) \\ \lambda &\mapsto P = x(\psi_0(\lambda), t), \end{aligned}$$

dove  $S(t)$  è la regione occupata all'istante  $t$  dal corpo continuo nel suo moto. Se indichiamo con  $\gamma_t$  il sostegno di  $\psi_t$  (ovviamente  $\gamma_t \in S(t)$ ), i punti di  $\gamma_t$  sono occupati all'istante  $t$  da quelle stesse particelle che occupano i punti di  $\gamma_0$  quando il corpo continuo si trova nella configurazione di riferimento.

Al variare di  $t$  nell'intervallo di moto  $[t_0, t_1]$  il sostegno  $\gamma_t$  della curva  $\psi_t$  segue il corpo continuo nel suo moto. Allora la famiglia di curve  $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$  prende il nome di *curva materiale del corpo continuo*.

D'ora poi per ragioni di brevità indicheremo con  $\psi$  la curva materiale  $\{\psi_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$  e chiameremo  $\psi_t$  *posizione della curva materiale  $\psi$  all'istante  $t$* .

E' immediato scrivere le equazioni cartesiane parametriche della curva  $\psi_t$ .

Infatti, poiché

$$\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1],$$

le equazioni sono le seguenti:

$$x_i = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel seguito ci saranno utili le seguenti posizioni

$$\begin{aligned} x_i^*(\lambda, t) &= x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, 2, 3, \\ \vec{r}^{*i}(\lambda, t) &= x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

**Definizione 1.12.** Diremo che la curva materiale  $\psi$  è chiusa se  $\forall t \in [t_0, t_1]$  le curve  $\psi_t$  sono chiuse, ossia se

$$\psi_t(\lambda_1) = \psi_t(\lambda_2) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

E' immediato dimostrare che la curva materiale  $\psi$  è chiusa se lo è  $\psi_0$ .

**Definizione 1.13.** La curva materiale  $\psi$  è regolare se le sue posizioni  $\psi_t$  sono regolari  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .

Richiamiamo la definizione di curva regolare applicata a  $\psi_t$ . Poiché  $\psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$  con  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,  $t$  fissato  $\in [t_0, t_1]$ , avremo che, preso

un punto  $P \in \gamma_t$ , il suo vettore posizione rispetto all'origine del riferimento associato all'osservatore è dato da:

$$P - O = \vec{x}(\psi_0(\lambda), t) = x_i^*(\lambda, t) \vec{e}_i = \vec{r}^*(\lambda, t) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad t \text{ fissato in } [t_0, t_1].$$

Allora la curva  $\psi_t$  è regolare se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \vec{r}^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2])$$

o equivalentemente se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad x_i^*(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1([\lambda_1, \lambda_2]), \quad i = 1, 2, 3$$

ed inoltre se

$$\text{per } t \text{ fissato in } [t_0, t_1] \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\cdot, t) := \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \lambda}(\cdot, t) \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2).$$

Si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 1.4.** *Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva  $\psi_0$  è regolare, allora la curva materiale  $\psi$ , definita a partire da  $\psi_0$ , è regolare.*

Supponiamo di essere nelle ipotesi della proposizione enunciata sopra. Allora sussiste il

**Lemma 1.1.** *Se il moto del corpo continuo è regolare e la curva  $\psi_0$  è regolare, allora*

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t)$$

dove

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial \lambda \partial t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda} := \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial t \partial \lambda}.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}.$$

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che, poiché le componenti di  $\vec{r}^*(\lambda, t)$  sono le funzioni  $x_i^*(\lambda, t)$ , è sufficiente dimostrare che:

$$\forall (\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t), \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3$$

e che tali derivate sono uguali.

D'altra parte

$$x_i^*(\lambda, t) = x_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque le  $x_i^*$  sono funzioni composte.

Osserviamo che le funzioni  $x_i \in \mathcal{C}^2$  perché il moto è regolare e le  $x_{0i}^* \in \mathcal{C}^1$  perché la curva  $\psi_0$  è regolare. Allora per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo che  $\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$  :

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t) \frac{dx_{0j}^*}{d\lambda}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

(Ovviamente nella relazione precedente abbiamo fatto uso della convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Dal momento che le funzioni  $x_i \in \mathcal{C}^2$ , vediamo che le funzioni scritte sopra si possono derivare ancora rispetto a  $t$  e le funzioni che così si ottengono sono continue. Dunque

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) \quad e \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo anche che  $\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]$ :

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\lambda, t) = \dot{x}_i(x_{01}^*(\lambda), x_{02}^*(\lambda), x_{03}^*(\lambda), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Sempre per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per le proprietà di regolarità delle funzioni  $x_i$  e delle funzioni  $x_{0i}^*$ , deduciamo che le funzioni scritte sopra sono derivabili rispetto a  $\lambda$  e che le derivate che così si ottengono sono continue. Dunque:

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \exists \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) \quad e \quad \in \mathcal{C}([\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1]) \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Infine, grazie al teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione, possiamo concludere che

$$\forall(\lambda, t) \in [\lambda_1, \lambda_2] \times [t_0, t_1] \quad \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Il lemma è così dimostrato.

Dal lemma e dalla sua dimostrazione discende anche che:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda}(\lambda, t) = \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t).$$

**Definizione 1.14.** Dato un corpo continuo in moto regolare, siano  $\psi$  una curva materiale regolare e  $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$  un campo vettoriale (spaziale) tale che  $\vec{u} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ . Definiamo circolazione all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  del campo vettoriale  $\vec{u}$  lungo la curva materiale  $\psi$  l'integrale, denotato con  $\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP$ , dato da :

$$\int_{\psi_t} \vec{u}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{u}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

In particolare la circolazione del campo della velocità  $\vec{v}(P, t)$  lungo una curva materiale  $\psi$  verrà chiamata semplicemente circolazione lungo  $\psi$ .

Stabiliamo ora il **Teorema del trasporto della circolazione**

**Teorema 1.8.** Dato un corpo continuo in moto regolare e presa una qualsiasi curva materiale  $\psi$  definita a partire dalla curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.4.1)$$

Dimostrazione

Poiché  $\psi$  è definita a partire dalla curva  $\psi_0$  chiusa e regolare ed il moto è regolare, risulta anch'essa chiusa e regolare.

Fissiamo un istante  $t \in [t_0, t_1]$  e consideriamo la circolazione in tale istante lungo la curva materiale  $\psi$

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{v}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \quad (1.4.2)$$

Vediamo di scrivere in altro modo  $\vec{v}(\psi_t(\lambda), t)$  che compare sotto integrale a secondo membro della (1.4.2).

Osserviamo che se  $P = x(P_0, t)$  è la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento sta in  $P_0$ , allora

$$\vec{v}(P, t) = \dot{\vec{x}}(P_0, t).$$

Ma nel nostro caso

$$P = \psi_t(\lambda) = x(\psi_0(\lambda), t)$$

per cui

$$\vec{v}(\psi_t(\lambda), t) = \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t).$$



Allora la (1.4.2) si può scrivere come:

$$\int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda.$$

Se deriviamo rispetto al tempo la relazione scritta sopra e teniamo presente che possiamo derivare sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \ddot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial t}(\lambda, t) d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{v}}(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{\vec{x}}(\psi_0(\lambda), t) \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \dot{\vec{x}}^2}{\partial \lambda}(\psi_0(\lambda), t) d\lambda \\ &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP + \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_2), t) - \dot{\vec{x}}^2(\psi_0(\lambda_1), t) \right]. \end{aligned}$$

Ma, essendo la curva  $\psi_0$  chiusa, si ha  $\psi_0(\lambda_1) = \psi_0(\lambda_2)$ , per cui il termine in parentesi quadra nell'ultimo membro della serie di uguaglianze scritte sopra è nullo. Dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) dP \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

che rappresenta la tesi del teorema.

**Definizione 1.15.** *Dato un corpo continuo in moto regolare, diremo che si conserva la circolazione durante il moto se, presa una qualsiasi curva materiale  $\psi$ , definita a partire da una curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, si ha :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Enunciamo e proviamo il **Teorema di Kelvin**

**Teorema 1.9.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare in un dato intervallo di tempo. Se l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare, allora si conserva la circolazione durante il moto.*

Dimostrazione

Per ipotesi  $\vec{v}$  proviene da un potenziale scalare, cioè  $\exists \alpha = \alpha(P, t)$  tale che  $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$  e

$$\vec{v}(P, t) = \text{grad } \alpha(P, t) \quad \forall (P, t) \in \mathcal{S}.$$

Preso una qualsiasi curva materiale  $\psi$ , definita a partire da una curva  $\psi_0$  chiusa e regolare, per il teorema del trasporto della circolazione,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\psi_t} \dot{\vec{v}}(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\psi_t} \text{grad } \alpha(P, t) \cdot dP \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

A questo punto teniamo presente che

$$\alpha(\psi_t(\lambda), t) = \alpha(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t)$$

da cui per il teorema di derivazione delle funzioni composte discende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x_1^*(\lambda, t), x_2^*(\lambda, t), x_3^*(\lambda, t), t) \frac{\partial x_i^*}{\partial \lambda}(\lambda, t) \\ &= \text{grad } \alpha(\psi_t(\lambda), t) \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Sostituendo il risultato (1.4.4) nella (1.4.3),  $\forall t \in [t_0, t_1]$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\psi_t} \vec{v}(P, t) \cdot dP &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(\psi_t(\lambda), t) d\lambda \\ &= \alpha(\psi_t(\lambda_2), t) - \alpha(\psi_t(\lambda_1), t) = 0. \end{aligned}$$

Il teorema di Kelvin risulta così dimostrato.

Stabiliamo ora il seguente

**Teorema 1.10.** *Sia dato un fluido perfetto incomprimibile ed omogeneo o un fluido perfetto barotropico, in moto regolare. Allora durante il moto la circolazione si conserva, purché la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare.*

Dimostrazione

Se dividiamo per  $\rho$  entrambi i membri dell'equazione fondamentale della meccanica dei fluidi perfetti e teniamo presente che  $\vec{F} = \text{grad } U_1$ , abbiamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad } U_1 - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (1.4.5)$$

D'altra parte, come abbiamo già ripetuto varie volte, se il fluido è incomprimibile ed omogeneo:

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

mentre se il fluido è barotropico

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } \mathcal{P}.$$

Se andiamo a sostituire nella (1.4.5), otteniamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right)$$

se il fluido è incomprimibile ed omogeneo,

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} (U_1 - \mathcal{P})$$

se il fluido è barotropico.

Perciò in entrambi i casi l'accelerazione spaziale proviene da un potenziale scalare e basta applicare il teorema di Kelvin per ottenere la tesi.



# Capitolo 2

## Fluidi viscosi classici

### 2.1 Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici.

Abbiamo visto che in un fluido perfetto, tanto in condizioni di quiete quanto in condizioni di moto, lo sforzo specifico è normale ed ha carattere di pressione. Diversi liquidi e gas reali sono schematizzabili con i fluidi perfetti (ad esempio l'acqua e l'aria).

D'altra parte, l'esperienza mostra che ci sono molti altri liquidi e gas per i quali, quando non sono in quiete o in moto rigido, lo sforzo non è puramente normale, ma possiede anche una componente di taglio. Gli sforzi di taglio tra l'altro rallentano il moto delle particelle le une rispetto alle altre.

In un certo senso una misura del moto relativo delle particelle è fornito dal gradiente della velocità,  $\text{grad } \vec{v}$ , o anche dalla sua parte simmetrica ossia dal tensore di velocità di deformazione

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}).$$

Per schematizzare il comportamento di molti liquidi e gas reali la relazione sforzo - deformazione dei fluidi perfetti è stata generalizzata, ed è stata introdotta la classe più ampia dei fluidi propriamente detti, che abbiamo definito nel capitolo precedente.

Ricordiamo che un *fluido propriamente detto* è un corpo continuo caratterizzato, dal punto di vista puramente meccanico, in ambito spaziale, dalla seguente relazione sforzo - deformazione:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}}, \quad (2.1.1)$$

con  $\tilde{\hat{T}}$  funzione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ),  $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta, P)$ , con  $\vartheta$  temperatura assoluta, e tale che  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta, P) = \tilde{0}$ .

La presenza di questa funzione aggiuntiva è quella che dà luogo a sforzi di taglio, che però non sono presenti se il fluido si muove di moto rigido o è in quiete.

Come abbiamo già detto in precedenza,  $\tilde{T}$ , fornita dall'esperienza, è definita parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy, mentre un fluido propriamente detto per il quale  $\tilde{T}$  è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, viene chiamato non viscoso. I fluidi perfetti sono appunto fluidi non viscosi.

La più semplice sottoclasse dei fluidi viscosi propriamente detti è costituita dai *fluidi viscosi classici*, detti anche *fluidi viscosi lineari*.

**Definizione 2.1.** *Un fluido viscoso classico è un fluido viscoso propriamente detto per il quale  $\tilde{T}$  è lineare rispetto a  $\tilde{D}$ , cioè è della forma:*

$$\tilde{T} = \tilde{c} \cdot \tilde{D}, \quad (2.1.2)$$

dove  $\tilde{c}$  è un tensore del IV ordine, detto *tensore di viscosità*, dipendente dalla temperatura assoluta  $\vartheta$  e dal punto, cioè  $\tilde{c} = \tilde{c}(\vartheta, P)$ , che gode delle due proprietà seguenti:

- è simmetrico rispetto alla prima ed alla seconda coppia di indici,
- è isotropo.

La simmetria rispetto alla prima coppia di indici è conseguenza della simmetria di  $\tilde{T}$ ; la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici è conseguenza della simmetria di  $\tilde{D}$ .

Dunque in componenti:

$$\hat{T}_{ij} = c_{ijrs} D_{rs}$$

con

$$c_{ijrs} = c_{jirs}, \quad c_{ijrs} = c_{ijsr}.$$

La proprietà di isotropia traduce matematicamente l'osservazione sperimentale che nei liquidi e gas reali che schematizziamo col modello di fluido viscoso classico le proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione.

Ora vogliamo vedere le conseguenze sulla forma di  $\tilde{c}$  delle due proprietà di cui gode.

La prima proprietà comporta una riduzione del numero delle componenti indipendenti del tensore di viscosità. Infatti le componenti indipendenti di un generico tensore del IV ordine sono  $3^4 = 81$ , ma le proprietà di simmetria di  $\tilde{c}$  riducono da 81 a 36 le sue componenti indipendenti.

Infatti diamo a  $i$  e  $j$  due valori fissati, e vediamo quante componenti indipendenti di  $\tilde{c}$  abbiamo al variare di  $r$  e  $s$ . Per la simmetria rispetto alla seconda

coppia di indici, queste sono 6. D'altra parte, fissati  $r$  ed  $s$ , facendo variare  $i$  e  $j$ , le componenti indipendenti che otteniamo sono ancora 6, e dunque in totale le componenti indipendenti di  $\tilde{c}$  sono  $6 \cdot 6 = 36$ .

Vediamo ora le conseguenze dell'isotropia di  $\tilde{c}$ . A tale proposito si potrebbe dimostrare la seguente:

**Proposizione 2.1.** *L'insieme dei tensori isotropi del IV ordine è un sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori del IV ordine di dimensione 3, avente come base la terna*

$$(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)})$$

con  $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$  tensori del IV ordine di componenti

$$\begin{aligned} A_{ijrs}^{(1)} &= a_{ij} a_{rs} & (\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} &= \tilde{a} \otimes \tilde{a}) \\ A_{ijrs}^{(2)} &= a_{ir} a_{js} \\ A_{ijrs}^{(3)} &= a_{is} a_{jr}. \end{aligned}$$

Con  $a_{ij}$  denotiamo, come è usuale, la componente di  $\tilde{a}$  di indici  $i$  e  $j$ . Poichè supponiamo sempre di utilizzare un riferimento cartesiano ortonormale allora

$$a_{ij} = a_{ji} = \delta_{ij}.$$

In base alla proposizione 2.1,  $\tilde{c}$  è una combinazione lineare di  $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$ , ossia è esprimibile in questa forma:

$$\tilde{c} = \alpha \tilde{A}^{(1)} + \beta \tilde{A}^{(2)} + \gamma \tilde{A}^{(3)} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.1.3)$$

Dunque le 36 componenti indipendenti di  $\tilde{c}$  si esprimono tutte tramite 3 scalari. Infatti:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{ir} a_{js} + \gamma a_{is} a_{jr} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ma d'altra parte, come abbiamo osservato prima,  $\tilde{c}$  gode di particolari proprietà di simmetria.

La proprietà di simmetria rispetto alla prima coppia di indici ci permette di asserire che le componenti di  $\tilde{c}$  sono in realtà esprimibili tramite due soli scalari. Infatti, scambiando gli indici  $i$  e  $j$  nell'espressione di cui sopra, deduciamo:

$$c_{jirs} = \alpha a_{ji} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir}.$$

Ma  $c_{jirs} = c_{ijrs}$  e  $a_{ji} = a_{ij}$ ; dunque:

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij} a_{rs} + \beta a_{jr} a_{is} + \gamma a_{js} a_{ir},$$

da cui sommando membro a membro:

$$2c_{ijrs} = 2\alpha a_{ij}a_{rs} + (\beta + \gamma)(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr})$$

da cui

$$c_{ijrs} = \alpha a_{ij}a_{rs} + \frac{\beta + \gamma}{2}(a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}).$$

A questo punto poniamo

$$\alpha =: \lambda, \quad (\beta + \gamma)/2 =: \mu$$

ed otteniamo:

$$c_{ijrs} = \lambda a_{ij}a_{rs} + \mu (a_{ir}a_{js} + a_{is}a_{jr}). \quad (2.1.4)$$

Concludiamo che, per la proprietà di isotropia e per la simmetria rispetto alla prima coppia di indici, il tensore di viscosità è individuato tramite due soli scalari  $\lambda$  e  $\mu$ .

Se sfruttiamo la simmetria rispetto alla seconda coppia di indici perveniamo alla medesima conclusione.

E' chiaro che in generale, dipendendo  $\tilde{c}$  da  $\vartheta$  e da  $P$ , si ha anche

$$\lambda = \lambda(\vartheta, P), \quad \mu = \mu(\vartheta, P).$$

Questi sono detti *coefficienti di viscosità* e sono forniti dall'esperienza; dunque nelle equazioni in cui compaiono si riguardano come noti.

Se in particolare i coefficienti di viscosità  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti, il fluido viscoso classico è detto *newtoniano*.

Vediamo allora quale forma viene ad assumere la relazione sforzo - deformazione per un fluido viscoso classico.

Ricordiamo che:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{T} \quad \text{con} \quad \tilde{T} = \tilde{c} \cdot \tilde{D}.$$

Ragionando per componenti:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= c_{ijrs} D_{rs} \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} D_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) D_{rs} \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + \mu (D_{ij} + D_{ji}) \\ &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}. \end{aligned}$$

Nel passare dalla seconda alla terza uguaglianza abbiamo tenuto conto che:

$$\delta_{rs} D_{rs} = D_{rr} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \operatorname{tr}(\tilde{D}).$$



D'altronde  $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ , da cui

$$\text{tr}(\tilde{D}) = D_{rr} = \frac{1}{2}(v_{r,r} + v_{r,r}) = v_{r,r} = \text{div } \vec{v}.$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la simmetria di  $\tilde{D}$ .

Dunque  $\tilde{T}$  assume la forma seguente:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v})\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (2.1.5)$$

In definitiva la relazione sforzo-deformazione che caratterizza un fluido viscoso classico è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (2.1.6)$$

Tale relazione soddisfa a tutti e tre gli assiomi cui devono soddisfare le equazioni costitutive per un corpo continuo:

1. **Assioma dell'azione locale:** i valori che assumono le grandezze costitutive in ogni punto dipendono soltanto dai valori che assumono nello stesso punto le grandezze fondamentali.
2. **Assioma di determinismo:** i valori che le grandezze costitutive assumono in ogni istante dipendono dai valori che le grandezze fondamentali assumono in quello stesso istante o eventualmente negli istanti precedenti. In quest'ultimo caso il corpo continuo è detto *dotato di memoria*. I fluidi viscosi classici, come del resto tutti i fluidi propriamente detti, non sono dotati di memoria.
3. **Assioma di obiettività:** la forma delle equazioni costitutive non dipende dall'osservatore, ossia è invariante per moti rigidi. Si potrebbe dimostrare che tale assioma vale per la relazione sforzo-deformazione dei fluidi viscosi classici perchè  $\tilde{D}$  si annulla in corrispondenza di un moto rigido e il tensore  $\tilde{c}$  è isotropo.

Osserviamo che se un fluido viscoso classico è incomprimibile, abbiamo:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \text{tr}(\tilde{D}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}$$

e dunque per un fluido viscoso incomprimibile la relazione sforzo-deformazione si riduce a

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (2.1.7)$$

I fluidi viscosi classici incomprimibili sono perciò caratterizzati da un solo coefficiente di viscosità.

Vediamo ora di enunciare le equazioni costitutive che caratterizzano un fluido viscoso classico dal punto di vista termodinamico. Queste sono le stesse che sussistono per un fluido perfetto.

Come per i fluidi perfetti, distinguiamo tra fluidi viscosi classici comprimibili e fluidi viscosi classici incomprimibili.

### 1. Fluido viscoso classico comprimibile.

In primo luogo abbiamo le tre equazioni di stato:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ p &= \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ h &= \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di stato} \quad (2.1.8)$$

Nelle (2.1.8) si ha:

$\psi$  = energia libera specifica,  $\mathcal{V} = 1/\rho$  = volume specifico,  $\vartheta$  = temperatura assoluta,  $h$  = entropia specifica.

Le funzioni  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$  e  $\widehat{h}$  sono funzioni note fornite dall'esperienza dette *funzioni risposta*.

Assumiamo  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{h}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  da cui discende  $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^2$ .

Le cinque grandezze che intervengono nelle tre equazioni di stato prendono il nome di *variabili di stato*;  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  sono *variabili di stato fondamentali*, mentre  $\psi$ ,  $p$ , e  $h$  sono *variabili di stato costitutive*.

La funzione risposta  $\widehat{\psi}$  è detta *potenziale termodinamico*, perchè tramite le sue derivate siamo in grado di determinare le altre due funzioni risposta e la prima equazione di stato è chiamata *equazione di stato fondamentale*, perchè tramite questa si ricavano le altre due.

$p$ ,  $\mathcal{V}$  e  $h$ ,  $\theta$  costituiscono coppie di *variabili di stato coniugate*.

Come per i fluidi perfetti, si può dimostrare che nelle equazioni di stato, per motivi fisici, è possibile assumere come variabile di stato fondamentale  $h$  al posto di  $\vartheta$ . In questo caso otteniamo un nuovo potenziale termodinamico che è precisamente la funzione risposta in termini di  $h$  e  $\mathcal{V}$  per l'energia interna specifica  $k = \psi + \vartheta h$ .

Di conseguenza le nuove equazioni di stato sono date da:

$$\begin{aligned} k &= \bar{k}(h, \mathcal{V}) \\ p &= \bar{p}(h, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \mathcal{V}}(h, \mathcal{V}) \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h, \mathcal{V}) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(h, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Sempre per motivi fisici è possibile scrivere delle ulteriori equazioni di stato prendendo, accanto a  $\vartheta$ , come variabile di stato fondamentale  $p$  al posto di  $\mathcal{V}$ , nel qual caso il potenziale termodinamico è la funzione risposta per l'entalpia libera specifica  $G$ . Ma su ciò non insistiamo.

Alle equazioni di stato si aggiunge la **legge di propagazione del calore**, data da:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta, \quad (2.1.9)$$

dove  $\vec{q}$  è il vettore flusso di calore e  $\beta = \beta(\vartheta, \operatorname{grad} \vartheta, P)$  è il coefficiente di conducibilità termica, noto dall'esperienza.

Osserviamo che anche nei fluidi viscosi classici, come nei fluidi perfetti, la propagazione del calore è isotropa, essendo in ogni punto e in ogni istante  $\vec{q} \parallel \operatorname{grad} \vartheta$ . Questo traduce il fatto che nei liquidi e gas reali che schematizziamo con questo modello, le proprietà termiche non dipendono dalla direzione.

Se poi  $\beta$  è costante, la legge di propagazione del calore si dice *legge di Fourier*.

## 2. Fluido viscoso classico incompressibile.

Per un tale fluido deve sempre essere soddisfatta, qualunque sia la sua evoluzione, la condizione di incompressibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \implies \dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ciò implica che  $\mathcal{V} = 1/\rho$  non è più variabile di stato così come la sua coniugata  $p$ . Perciò  $p$  nel caso di un fluido incompressibile è una grandezza puramente meccanica e non termodinamica.

Le equazioni di stato da 3 si riducono a 2 e le variabili di stato da 5 si riducono a 3:

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\vartheta) \\ h &= \hat{h}(\vartheta) = -\frac{d\hat{\psi}}{d\vartheta}(\vartheta). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Come per i fluidi comprimibili, è possibile assumere come variabile di stato fondamentale  $h$  in luogo di  $\vartheta$ . In tal caso le due equazioni di stato sono:

$$\begin{aligned} k &= \bar{k}(h) \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h) = \frac{d\bar{k}}{dh}(h). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Per quanto riguarda la legge di propagazione del calore, è identica a quella che sussiste per i fluidi viscosi comprimibili.

Concludiamo il paragrafo osservando che i fluidi viscosi classici incomprimibili schematizzano abbastanza bene il comportamento di molti liquidi reali.

## 2.2 Compatibilità delle equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici con il II assioma della termodinamica.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico siano compatibili con il II assioma della termodinamica.

In primo luogo richiamiamo la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica nella forma di disequazione di Clausius-Duhem per un generico corpo continuo studiato dal punto di vista spaziale:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h\dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0. \quad (2.2.1)$$

Tale disequazione deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}$ , qualunque sia l'evoluzione del continuo.

Occupiamoci per il momento del termine  $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$  e vediamo quale espressione viene ad assumere per un fluido viscoso classico comprimibile sfruttando la relazione sforzo-deformazione.

Poiché

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p)\tilde{a} + 2\mu\tilde{D} \Rightarrow T_{ij} = (\lambda \text{tr } \tilde{D} - p)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= T_{ij} D_{ij} \\ &= (\lambda \text{tr } \tilde{D} - p)\delta_{ij} D_{ij} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \\ &= -p \text{div } \vec{v} + \lambda (\text{tr } \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

D'altra parte, dall'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

ricaviamo

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\dot{\rho}/\rho.$$

Introduciamo poi la forma quadratica così definita per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{D}$

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2}[\lambda(\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}].$$

Allora dalla (2.2.2) deduciamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \dot{\rho}/\rho + 2\omega(\tilde{D}). \quad (2.2.3)$$

Nel caso di un fluido viscoso classico incomprimibile, tenendo conto che

$$\tilde{T} = -p \tilde{a} + 2\mu \tilde{D}, \quad \operatorname{tr} \tilde{D} = 0,$$

ricaviamo:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (2.2.4)$$

Per ottenere ora la condizione necessaria e sufficiente che cerchiamo, ci serve un risultato sulla forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$ .

Premettiamo una definizione ed una proposizione.

**Definizione 2.2.** *La forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$  è semidefinita positiva se  $\omega(\tilde{D}) \geq 0$  per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{D}$ .*

**Proposizione 2.2.** *Ogni tensore doppio  $\tilde{T}$  si può decomporre nella forma seguente:*

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q}$$

dove  $\alpha$  è uno scalare e  $\tilde{q}$  è un tensore doppio tale che  $\operatorname{tr} \tilde{q} = 0$ .

Dimostrazione

Osserviamo che è sempre possibile decomporre un qualsiasi tensore doppio  $\tilde{T}$  nella forma seguente

$$\tilde{T} = \alpha \tilde{a} + \tilde{q},$$

ma il nostro scopo è di mostrare che è possibile prendere lo scalare  $\alpha$  in modo tale che  $\operatorname{tr} \tilde{q} = 0$ .

Teniamo conto che

$$\operatorname{tr} \tilde{T} = \alpha \operatorname{tr} \tilde{a} + \operatorname{tr} \tilde{q} = 3\alpha + \operatorname{tr} \tilde{q},$$

poiché

$$\operatorname{tr} \tilde{a} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Otteniamo allora:

$$\operatorname{tr} \tilde{q} = \operatorname{tr} \tilde{T} - 3\alpha.$$

Per avere  $\operatorname{tr} \tilde{q} = 0$ , occorre e basta prendere

$$\alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \tilde{T}.$$

La proposizione è così dimostrata.

Si noti che se  $\tilde{T}$  è isotropo, allora necessariamente deve essere  $\tilde{q} = \tilde{0}$ .

Stabiliamo ora un lemma che ci fornisce il risultato desiderato sulla forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$ .

**Lemma 2.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\omega(\tilde{D})$  sia semidefinita positiva è che i coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  soddisfino alle seguenti disuguaglianze:*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

#### Dimostrazione

Se utilizziamo la proposizione 2.2, possiamo scrivere:

$$\tilde{D} = \frac{1}{3} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q}, \quad \text{con } \operatorname{tr} \tilde{q} = 0.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{D}) &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \left[ \frac{1}{3} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} + \tilde{q} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \left[ \frac{1}{9} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right)^2 \tilde{a} \cdot \tilde{a} + \tilde{q} \cdot \tilde{q} + \frac{2}{3} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right) \tilde{a} \cdot \tilde{q} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \left( \operatorname{tr} \tilde{D} \right)^2 + 2\mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{a} = \delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$$

e che

$$\tilde{a} \cdot \tilde{q} = \delta_{ij} q_{ij} = q_{ii} = \operatorname{tr} \tilde{q} = 0.$$

Distinguiamo ora tra condizione sufficiente e condizione necessaria del lemma.

- Condizione sufficiente.  
Per ipotesi:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0;$$

dobbiamo dimostrare che

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico.}$$

Con le ipotesi di segno su  $\lambda$  e  $\mu$  e l'espressione trovata per  $\omega(\tilde{D})$  la tesi è banalmente verificata.

- Condizione necessaria.  
Per ipotesi

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D} \text{ simmetrico;}$$

dobbiamo dimostrare che

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0.$$

Sfruttiamo l'arbitrarietà del tensore  $\tilde{D}$ .

Supponiamo dapprima che  $\tilde{D}$  sia un tensore isotropo. Allora  $\tilde{q} = \tilde{0}$ , da cui segue:

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\text{tr} \tilde{D})^2 \right] \geq 0 \quad \implies \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0.$$

Supponiamo ora che  $\tilde{D}$  sia un tensore doppio simmetrico a traccia nulla. Si ha:

$$\omega(\tilde{D}) = \mu \tilde{q} \cdot \tilde{q} \geq 0 \quad \implies \quad \mu \geq 0.$$

Dimostriamo ora il seguente:

**Teorema 2.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido viscoso classico comprimibile siano compatibili con il II Assioma della termodinamica è che*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

*L'analogha condizione necessaria e sufficiente per un fluido viscoso classico in-comprimibile è*

$$\mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Dimostrazione.

Innanzitutto riscriviamo la disuguaglianza di Clausius-Duhem per un corpo continuo qualsiasi:

$$\rho \left( \dot{\psi} + h\dot{\vartheta} \right) - \tilde{T} \cdot \tilde{D} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q} \cdot \text{grad}\vartheta \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Distinguiamo i due casi di fluido comprimibile e fluido incomprimibile.

1) **Fluido comprimibile.**

Condizione necessaria e sufficiente affinché ci sia la compatibilità richiesta, è che, se si sostituiscono nella disequazione di cui sopra alle varie grandezze costitutive le loro espressioni conseguenza delle equazioni costitutive, questa sia soddisfatta in ogni punto ed in ogni istante qualunque sia l'evoluzione del fluido.

Ora:

$$\psi = \hat{\psi}(\vartheta, \nu) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} \dot{\nu} = -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}.$$

D'altra parte:

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) = \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}).$$

Inoltre sappiamo che  $\vec{q} = -\beta \text{grad}\vartheta$ .

Andando a sostituire queste relazioni nel primo membro della disequazione di Clausius-Duhem otteniamo:

$$\rho \left( -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - \hat{p} \frac{\dot{\rho}}{\rho} - 2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 = -2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2.$$

Le equazioni costitutive saranno compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se, qualunque sia l'evoluzione del fluido, si avrà in  $\mathcal{S}$ :

$$-2\omega(\tilde{D}) - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 \leq 0 \iff 2\omega(\tilde{D}) + \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 \geq 0.$$

Distinguiamo tra condizione sufficiente e condizione necessaria.

- Condizione sufficiente.

Per ipotesi  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , e dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza di cui sopra è soddisfatta qualunque sia l'evoluzione del fluido.

E' manifestamente vero, poichè le prime due condizioni di segno ci dicono che  $\omega(\tilde{D})$  è sempre  $\geq 0$  e d'altra parte, essendo  $\vartheta$  strettamente positiva, anche il termine  $\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2$  è  $\geq 0$  in  $\mathcal{S}$  qualunque sia l'evoluzione del fluido.



- Condizione necessaria.

La disuguaglianza sia soddisfatta quale che sia l'evoluzione del fluido, e dimostriamo che  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

Se il fluido evolve isotermicamente, ossia  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost} > 0$  in  $\mathcal{S}$ , allora essendo  $\text{grad}\vartheta = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ , abbiamo:

$$\omega(\tilde{D}) \geq 0 \quad \forall \tilde{D},$$

da cui le prime due condizioni di segno.

Se poi il fluido evolve muovendosi di moto rigido,  $\tilde{D} = \tilde{0}$  durante il moto, dunque  $\omega(\tilde{D}) = 0$  durante il moto, e quindi:

$$\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \text{ per ogni } \vartheta.$$

Da tale disequazione discende:

$$\beta \geq 0.$$

## 2) Fluido incomprimibile.

Procediamo esattamente come nel caso precedente.

Consideriamo il primo membro della disequazione di Clausius-Duhem e vediamo che forma assume per un fluido viscoso classico incomprimibile.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\vartheta) & \implies & \dot{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = -\hat{h} \dot{\vartheta}, \\ \tilde{T} \cdot \tilde{D} &= 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}, \\ \vec{q} &= -\beta \text{grad } \vartheta, \end{aligned}$$

In definitiva il primo membro della disuguaglianza di Clausius-Duhem diventa:

$$\rho \left( -\hat{h} \dot{\vartheta} + \hat{h} \dot{\vartheta} \right) - 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 = -2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} - \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2.$$

Allora le equazioni costitutive di un fluido viscoso classico incomprimibile sono compatibili con il II assioma della termodinamica se e solo se:

$$2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} + \frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad}\vartheta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

quale che sia l'evoluzione del fluido.

- Condizione sufficiente.

Questa condizione è evidente, tenendo conto che per ipotesi  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ .

- Condizione necessaria.

Per ipotesi sussiste la disuguaglianza di cui sopra, e dobbiamo dimostrare che  $\mu \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Sfruttiamo il fatto che tale disuguaglianza sussiste in  $\mathcal{S}$  quale che sia l'evoluzione del fluido. Se in particolare il fluido evolve isotermicamente, ossia  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$  in  $\mathcal{S}$ , allora  $\text{grad } \vartheta = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$  per cui la disuguaglianza si riduce a

$$2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \geq 0 \text{ in } \mathcal{S}$$

e questo per ogni  $\tilde{D}$  simmetrico. Poichè  $\tilde{D} \cdot \tilde{D} \geq 0 \forall \tilde{D}$ , ne consegue  $\mu \geq 0$ .

Se invece il fluido evolve muovendosi di moto rigido, allora  $\tilde{D} = 0$  in  $\mathcal{S}$ , per cui dalla disuguaglianza discende:

$$\frac{\beta}{\vartheta} (\text{grad } \theta)^2 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \quad \implies \quad \beta \geq 0.$$

## 2.3 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile.

A questo punto ci proponiamo di impostare il problema del moto per i fluidi viscosi classici comprimibili.

In primo luogo vediamo quale forma assume la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \text{div } \tilde{T}. \quad (2.3.1)$$

Teniamo conto che per un fluido viscoso classico comprimibile la relazione sforzo-deformazione è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D},$$

con  $\lambda = \lambda(\vartheta, P)$ ,  $\mu = \mu(\vartheta, P)$ .

In particolare vogliamo vedere che forma assume  $\text{div } \tilde{T}$ .

D'ora in poi supporremo  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S})$  o semplicemente  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$ , (ossia che  $\vec{v}$  in  $\mathcal{S}$  rispetto a  $P$  ammetta gradiente primo e secondo continui mentre rispetto a  $t$  ammetta derivata prima continua) e che  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1$  rispetto a  $\vartheta$  e a  $P$ .

Determiniamo la componente  $i$ -esima di  $\text{div } \tilde{T}$  tenendo conto che

$$T_{ij} = (\lambda \text{div } \vec{v} - p) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

e

$$\left(\operatorname{div} \tilde{T}\right)_i = T_{ij,j}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p)_{,j} \delta_{ij} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= (\lambda \operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + 2(\mu D_{ij})_{,j} = \\ &= [\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v})]_i - [\operatorname{grad} p]_i + 2 \left[ \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) \right]_i. \end{aligned}$$

Allora la prima equazione indefinita viene ad assumere la seguente forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p. \quad (2.3.2)$$

Se a questo punto poi supponiamo che il fluido che stiamo considerando sia newtoniano, ossia  $\lambda, \mu = \text{cost}$ , l'espressione di  $\operatorname{div} \tilde{T}$  si modifica nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \tilde{T}\right)_i &= T_{ij,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} = \\ &= \lambda (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} - p_{,i} + \mu (v_{i,jj} + v_{j,ij}). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

D'altra parte:

$$v_{i,jj} + v_{j,ij} = \Delta v_i + v_{j,ji} = \Delta v_i + (v_{j,j})_{,i} = \Delta v_i + (\operatorname{div} \vec{v})_{,i}.$$

Sostituendo tale risultato nella (2.3.3), otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \tilde{T}\right)_i &= (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \vec{v})_{,i} + \mu \Delta v_i - p_{,i} = \\ &= (\lambda + \mu) [\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v})]_i + \mu (\Delta \vec{v})_i - (\operatorname{grad} p)_i. \end{aligned}$$

Allora, per un fluido viscoso classico comprimibile newtoniano, la prima equazione indefinita diventa:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p. \quad (2.3.4)$$

Tale equazione è nota come **equazione di Navier - Stokes**.

A questo punto, vediamo se per un fluido viscoso classico comprimibile è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.

In tale ambito alla prima equazione indefinita possiamo associare soltanto l'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Facendo il bilancio fra numero di equazioni a disposizione e numero di incognite, abbiamo in totale 5 incognite scalari:  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$  (più eventualmente  $\vartheta$  se il fluido non è newtoniano), ma solo quattro equazioni scalari; di conseguenza non è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile rimanendo in ambito puramente meccanico, ma dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Dunque in primo luogo dobbiamo associare alle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \operatorname{grad} (\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div} (\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p,\end{aligned}$$

l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica. Vediamo quale forma assume tale equazione per i fluidi viscosi classici comprimibili.

Scriviamo dapprima l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un generico corpo continuo:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

Ma, come abbiamo visto nel paragrafo precedente,

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D})$$

per cui l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un fluido viscoso classico comprimibile, se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione, è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}),$$

che viene chiamata **equazione dell'energia**.

Alle equazioni meccaniche e all'equazione dell'energia associamo inoltre le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

Le incognite del problema sono ora  $v_i$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $k$ , (o  $\psi$  o  $G$ ),  $\vartheta$ ,  $h$ ,  $q_i$ , e quindi sono in totale 11. Ma anche le equazioni scalari sono 11. Di conseguenza il problema termomeccanico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

A questo punto, per determinare effettivamente l'evoluzione del corpo reale schematizzato dal nostro modello, ossia per avere l'unicità della soluzione del problema, alle equazioni dovremo associare le condizioni ai limiti. Esse si distinguono in **condizioni iniziali** (ossia relative all'istante iniziale del moto), e

**condizioni al contorno** (ossia relative alla frontiera della regione occupata dal fluido).

Ci limiteremo ora ad enunciare soltanto una condizione al contorno relativa al campo della velocità  $\vec{v}$ , che viene utilizzata spesso.

Supponiamo che  $\partial S(t)$ , ossia la frontiera della regione  $S(t)$  occupata dal fluido all'istante  $t$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  sia costituita da pareti materiali rigide (ad esempio il caso di un fluido contenuto in un recipiente). Sia  $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$ ,  $P \in \partial S(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  l'atto di moto di tali pareti materiali rigide, che supponiamo noto.

L'esperienza ci mostra che, se abbiamo a che fare con un liquido o con un gas viscoso, non solo le sue particelle non possono penetrare attraverso le pareti, cosa che accade anche per un fluido perfetto, ma queste aderiscono alle pareti stesse. Di conseguenza, mentre per i fluidi perfetti si impone al campo  $\vec{v}$  la condizione (scalare) di impenetrabilità:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} \text{ versore normale a } \partial S(t) \text{ rivolto verso l'esterno di } S(t),$$

per i fluidi viscosi si richiede una condizione più restrittiva, detta di aderenza o anche *no-slip condition*, di carattere vettoriale:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V}. \quad (2.3.5)$$

Il fatto che questa condizione, suggerita dall'esperienza, sia più restrittiva di quella relativa ai fluidi perfetti corrisponde anche ad una precisa esigenza matematica. Infatti mentre nel caso dei fluidi perfetti, nelle equazioni che ne governano il moto, operano su  $\vec{v}$  solo operatori differenziali spaziali del I ordine, in questo caso operano su  $\vec{v}$  anche operatori differenziali spaziali del II ordine, come  $\text{grad div}$  o  $\Delta$ .

## 2.4 Impostazione del problema del moto per un fluido viscoso classico incompressibile. Differenze di comportamento rispetto ai fluidi perfetti incompressibili.

Consideriamo ora un fluido viscoso classico incompressibile e vediamo come si può impostare il problema del suo moto.

In questo caso la prima equazione indefinita, se sfruttiamo la relazione sforzo deformazione che caratterizza questi fluidi:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D},$$

risulta molto più semplice.

Infatti, utilizzando i risultati ottenuti per i fluidi comprimibili, abbiamo:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p + 2\operatorname{div} (\mu \tilde{D}),$$

da cui dunque la prima equazione indefinita risulta:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + 2\operatorname{div} (\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p. \quad (2.4.1)$$

Se poi il fluido in esame è incomprimibile e newtoniano, ossia  $\mu = \text{cost}$ , rifacendo di nuovo i passaggi svolti precedentemente con  $\mu, \lambda = \text{cost}$  e tenendo presente la condizione di incomprimibilità, otteniamo:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v},$$

da cui dunque l'equazione (2.4.1) si riduce a:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p \quad (2.4.2)$$

che è nota come **equazione di Navier-Stokes per i fluidi newtoniani incomprimibili**.

Ci proponiamo ora di dimostrare la seguente:

**Proposizione 2.3.** *Se  $\mu$  non dipende dalla temperatura oppure il fluido evolve in condizioni isoterme, cioè  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$  in  $\mathcal{S}$ , è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico incomprimibile in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione.

Oltre all'equazione di Navier-Stokes, in questo caso abbiamo a disposizione le equazioni:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \text{condizione di incomprimibilità} \\ \dot{\rho} = 0 & \text{equazione di continuità della massa.} \end{array}$$

In totale abbiamo 5 incognite scalari, cioè  $v_i, \rho, p$ , a fronte di 5 equazioni scalari, e dunque il problema del moto è impostato in modo completo.

E' importante rilevare che per il fluidi incomprimibili la pressione  $p$  è un'incognita puramente meccanica e quindi non è definita mediante un'equazione di stato. Naturalmente dobbiamo ora associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Le condizioni iniziali all'istante  $t_0$  riguardano  $\rho$  e  $\vec{v}$  e sono le seguenti:

$$\begin{array}{l} \rho(P, t_0) = \rho_0(P) \\ \vec{v}(P, t_0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(t_0), \end{array}$$

con  $\rho_0(P)$  e  $\vec{v}_0(P)$  campi noti.

Inoltre, abbiamo anche la condizione al contorno sul campo  $\vec{v}$ .

Se supponiamo che  $\partial S(t)$  sia formato da pareti materiali rigide di cui conosciamo l'atto di moto  $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$ , con  $P \in \partial S(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , poiché il fluido è viscoso, usualmente si associa la condizione di aderenza come nel caso precedente:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Se invece  $\mu = \mu(\vartheta, P)$  e non siamo in condizioni isotermitiche, il problema del moto non può essere impostato in maniera completa rimanendo in ambito puramente meccanico, perchè nelle 5 equazioni scalari di cui sopra interviene ora anche l'incognita scalare  $\vartheta$ .

Alle 5 equazioni scritte prima, dunque, è necessario aggiungere l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica per i fluidi viscosi classici incomprimibili:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (2.4.3)$$

Inoltre dobbiamo aggiungere anche le due equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

Nel complesso abbiamo ottenuto un problema descritto da 11 equazioni scalari in 11 incognite scalari:  $v_i, \rho, p, k$  (o  $\psi$ ),  $\vartheta, h, q_i$ .

A queste equazioni vanno poi associate le condizioni ai limiti (condizioni iniziali e condizioni al contorno).

Un caso particolare di fluido incomprimibile è quello di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, ossia tale che la densità di massa  $\rho$  dipende solo da  $t$  e non da  $P$ , ossia  $\rho = \rho(t)$ , anzichè  $\rho = \rho(P, t)$ , da cui segue che  $\operatorname{grad} \rho = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ . Ora però, essendo il fluido incomprimibile, è automaticamente soddisfatta la condizione:

$$\dot{\rho} = 0.$$

Ma:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Di conseguenza se il fluido in esame è omogeneo,  $\rho$  non dipende neanche dal tempo, e dunque in definitiva  $\rho = \text{cost} > 0$  in  $\mathcal{S}$  e quindi non è più un'incognita del problema.

Le equazioni che governano il moto di questo fluido sono puramente meccaniche, e sono date da:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{v}' + \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}) &= \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Le incognite scalari del problema sono 4:  $v_1, v_2, v_3, p$ .

In tal caso nelle condizioni iniziali interviene solo la velocità:

$$\vec{v}(P, t_0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(t_0),$$

ed abbiamo la condizione al contorno di aderenza se supponiamo  $\partial S(t)$  costituito da pareti materiali rigide.

Poichè  $\rho = \text{cost} > 0$ , nella (2.4.4) possiamo dividere ambo i membri per  $\rho$ , ottenendo così l'equazione:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (2.4.5)$$

dove si pone  $\nu := \mu/\rho$ , che viene detto *coefficiente di viscosità cinematica*. L'equazione in questa forma è detta **equazione di Navier - Stokes per un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo**.

Alla (2.4.5) va poi associata l'equazione:

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

Risolvere il problema del moto per questo fluido significa trovare una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$  e  $p \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$  (o anche  $\in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ ) soddisfacente all'equazione (2.4.5), alla condizione di incompressibilità in  $\mathcal{S}$  e alle corrispondenti condizioni ai limiti.

Si noti comunque, che una volta trovata una soluzione di questo problema, la pressione  $p$  non è individuata mai in maniera univoca, poichè nell'equazione (2.4.5) non compare esplicitamente ma soltanto tramite  $\text{grad} p$ . Dunque  $p$  è determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo  $c(t)$ .

Infatti, se

$$p^* = p + c(t), \quad \text{allora} \quad \text{grad} p^* = \text{grad} p$$

e dunque se  $(\vec{v}, p)$  è soluzione del problema, lo è anche  $(\vec{v}, p^*)$ .

L'indeterminazione della pressione si verifica anche per i fluidi perfetti incompressibili e per fluidi propriamente detti più generali incompressibili.

In ogni caso determinare la soluzione del problema in esame è difficile per la presenza nell'equazione di Navier-Stokes del termine non lineare  $\text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}$ .

D'altra parte è possibile che il fluido che stiamo esaminando si muova così lentamente che le componenti di  $\vec{v}$  e  $\text{grad} \vec{v}$  siano talmente piccole da poter trascurare nell'equazione (2.4.5) il termine  $\text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}$ . In questo caso l'equazione (2.4.5) si riduce alla seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (2.4.6)$$



Ogni moto che sia soluzione della equazione (2.4.6) (che risulta lineare) prende il nome di **moto di Stokes**.

Ci proponiamo ora di evidenziare alcune differenze di comportamento tra un fluido perfetto incomprimibile ed un fluido viscoso classico incomprimibile.

- Consideriamo la potenza delle forze interne ad un generico istante  $t$  per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = - \int_{S(t)} p \frac{\dot{\rho}}{\rho} dS = 0,$$

poiché, a causa dell'incomprimibilità,  $\dot{\rho} = 0$ .

Dunque per un fluido perfetto incomprimibile:

$$\Pi_i(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Se invece prendiamo in considerazione un fluido viscoso classico incomprimibile:  $\tilde{T} \cdot \tilde{D} = 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}$  con  $\mu \geq 0$  come conseguenza del II assioma della termodinamica. Dunque

$$\Pi_i(t) = -2 \int_{S(t)} \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per un fluido viscoso classico incomprimibile le forze interne costituiscono una sollecitazione dissipativa. A tal proposito richiamiamo la seguente definizione:

**Definizione 2.3.** *Si definisce sollecitazione dissipativa una sollecitazione la cui potenza sia ad ogni istante  $\leq 0$ .*

- Mettiamo in evidenza un'ulteriore differenza tra i due tipi di fluidi incomprimibili.

Dapprima consideriamo un fluido perfetto incomprimibile che ad ogni istante  $t \in [t_0, t_1]$  durante il moto occupi la medesima regione  $S$ , la cui frontiera sia costituita da pareti materiali rigide e fisse. Assumiamo che non siano presenti forze esterne di massa per cui  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Ci proponiamo di provare che nelle ipotesi in cui ci siamo posti l'energia cinetica  $T$  si conserva.

Infatti per il teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (2.4.7)$$

dove

$$\begin{aligned}\Pi_e(t) &= \int_S \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\partial S} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma \\ &= \int_{\partial S} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= 0.\end{aligned}$$

Ma

$$\vec{f} \Big|_{\partial S} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\partial S} = -p \vec{n} \Big|_{\partial S}$$

da cui

$$\vec{f} \cdot \vec{v} \Big|_{\partial S} = -p \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$$

poiché le pareti che costituiscono il bordo di  $S$  sono fisse e il fluido è perfetto ( $\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0$ ).

Dalla (2.4.7), grazie ai risultati ottenuti, deduciamo:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

Se invece consideriamo un fluido viscoso classico incomprimibile nelle stesse condizioni del fluido perfetto preso in considerazione prima, possiamo provare facilmente che l'energia cinetica risulta una funzione non crescente del tempo.

Sussiste sempre l'equazione (2.4.7) e

$$\begin{aligned}\Pi_e(t) &= \int_{\partial S} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma, \\ \Pi_i(t) &= -2 \int_S \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} \, dS.\end{aligned}$$

Ma per la condizione di aderenza  $\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{0}$  e per quanto stabilito in precedenza  $\Pi_i \leq 0$ .

Dunque

$$\frac{dT}{dt} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

da cui discende la tesi.

- Per un fluido perfetto incompressibile ed omogeneo, grazie al teorema di Kelvin, la circolazione si conserva purché  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare. Infatti, come abbiamo visto nel capitolo precedente, in tal caso:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right).$$

Consideriamo ora un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo per il quale  $\vec{F}$  provenga da un potenziale scalare  $U_1$ . Se dividiamo entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per  $\rho$ , e teniamo presenti le ipotesi, deduciamo:

$$\dot{\vec{v}} = \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v}.$$

Non è perciò possibile applicare il teorema di Kelvin, a causa della presenza nella relazione scritta sopra del termine  $\nu \Delta \vec{v}$  e dunque la circolazione non si conserva per un fluido newtoniano incompressibile ed omogeneo soggetto a forze di massa la cui densità provenga da un potenziale scalare.



## Capitolo 3

# Problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo

### 3.1 Impostazione del problema.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo. Supponiamo che, pur non essendo in moto stazionario, il fluido occupi una regione dello spazio che sia fissa rispetto all'osservatore. Tale ipotesi è fisicamente ragionevole se teniamo presente che un fluido incomprimibile schematizza un liquido reale. Se assumiamo che l'intervallo di moto sia  $[0, +\infty)$ , avremo dunque:

$$S(t) = S \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

con  $S$  chiusura di un dominio regolare dello spazio geometrico.

Inoltre, per l'ipotesi di incomprimibilità ed omogeneità, la densità di massa  $\rho$  è una costante positiva.

Come sappiamo, la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, esplicitando la relazione sforzo-deformazione per tale fluido e dividendo entrambi i membri per la costante  $\rho$ , assume la forma:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (3.1.1)$$

Se teniamo presente che

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v},$$

e per semplicità indichiamo ancora con  $p$  la pressione divisa per la densità di massa, cioè  $\frac{p}{\rho}$ , la (3.1.1) si scrive nel modo seguente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (3.1.2)$$

cui associamo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S && \text{condizione iniziale} \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V} && \text{condizione al contorno,} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

dove  $\vec{v}_0$  e  $\vec{V}$  sono campi vettoriali assegnati.

Il problema ai limiti classico per un fluido newtoniano incompressibile consiste nel determinare in  $S \times [0, +\infty)$  una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$  e  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(S \times [0, +\infty))$  che soddisfi le equazioni (3.1.2) in  $S \times [0, +\infty)$  e le condizioni ai limiti (3.1.3).

Ovviamente affinché il problema ammetta soluzione è necessario che il dato iniziale e il dato al contorno soddisfino ad opportune condizioni di regolarità e compatibilità su cui non insistiamo.

In effetti, pur rimanendo sempre nell'ambito delle soluzioni classiche, potremmo anche alleggerire le ipotesi di regolarità su  $\vec{v}$  e  $p$ . Infatti è sufficiente assumere

$$\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^1(S \times [0, +\infty)), p \in \mathcal{C}^{1,0}(\overset{\circ}{S} \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}(S \times [0, +\infty)).$$

Tuttavia nel seguito, per motivi di convenienza, supporremo verificate le condizioni di regolarità più forti. Premettiamo ora alcuni risultati preliminari.

## 3.2 Risultati preliminari.

Introduciamo la seguente

**Definizione 3.1.** Diciamo che  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un autovalore per il tensore doppio  $\tilde{t}$  se esiste un vettore  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tale che

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Il vettore  $\vec{u}$  è detto autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .

Sia  $(\vec{e}_i)$  una base ortonormale per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$  e sia  $[t_{ij}]$  la matrice  $3 \times 3$  delle componenti del tensore  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ .

Ovviamente

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \iff t_{ij} u_j = \lambda u_i.$$

Ne discende la seguente

**Proposizione 3.1.** *Dato il tensore doppio  $\tilde{t}$ ,  $\lambda$  è un autovalore per  $\tilde{t}$  se e solo se è un autovalore per la matrice  $[t_{ij}]$  delle componenti del tensore rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e  $\vec{u}$  è un autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$  se e solo se la terna  $(u_1, u_2, u_3)$  delle componenti di  $\vec{u}$  rispetto ad  $(\vec{e}_i)$  è un autovettore della matrice  $[t_{ij}]$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .*

Dunque la ricerca degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio è ricondotta alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice  $3 \times 3$  delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale fissata.

Proviamo ora il seguente

**Teorema 3.1.** *Sia  $\tilde{S}$  un tensore simmetrico del II ordine. Allora esso ammette tre autovalori (reali):  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ed è sempre possibile trovare una base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$  formata da autovettori corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .*

#### Dimostrazione

Fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , al tensore  $\tilde{S}$  è associata la matrice delle sue componenti  $[S_{ij}]$ , che è una matrice  $3 \times 3$  reale e simmetrica. Per un noto teorema di algebra lineare tale matrice ha tre autovalori reali:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e dunque per la proposizione precedente anche il tensore  $\tilde{S}$  possiede gli stessi autovalori.

Inoltre, sempre per risultati noti sulle matrici, indicata con  $(E_1, E_2, E_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , è possibile trovare un'altra base ortonormale  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  formata da tre autovettori della matrice  $[S_{ij}]$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Se  $(\alpha_{1h}, \alpha_{2h}, \alpha_{3h})$  è la terna delle componenti canoniche di  $\vec{E}_h$  ( $h = 1, 2, 3$ ), la terna  $(\vec{e}_h)$  di vettori di  $\vec{\mathcal{E}}$  tali che

$$\vec{e}_h = \alpha_{ih} \vec{e}_i \quad h = 1, 2, 3$$

è una base ortonormale per  $\vec{\mathcal{E}}$  e per la proposizione 3.1 i tre vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sono autovettori di  $\tilde{S}$  corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Il teorema è così dimostrato.

Stabiliamo ora due lemmi che ci saranno utili nel paragrafo successivo.

Sia  $\tilde{S}$  un tensore doppio simmetrico. Come sappiamo, questo ammette tre autovalori:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Poniamo

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Dimostriamo il seguente

**Lemma 3.1.** *Dato il tensore doppio simmetrico  $\tilde{S}$ , si ha:*

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} \geq \lambda_{\min} |\vec{u}|^2 \quad \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Dimostrazione

Grazie al teorema 3.1, è possibile trovare una base ortonormale  $(\vec{e}_h)$  formata da autovettori di  $\tilde{S}$  corrispondenti ai tre autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , cioè tale che

$$\tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Preso un vettore  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ , decomponiamolo rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  per cui:

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h (\tilde{S} \cdot \vec{e}_h) = \\ &= \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^3 \bar{u}_h \lambda_h \vec{e}_h = \vec{u} \cdot (\lambda_1 \bar{u}_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1 (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) + \lambda_2 \bar{u}_2 (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) + \lambda_3 \bar{u}_3 (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) = \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1^2 + \lambda_2 \bar{u}_2^2 + \lambda_3 \bar{u}_3^2 \geq \lambda_{\min} (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2) = \lambda_{\min} |\vec{u}|^2. \end{aligned}$$

Il lemma è così dimostrato.

Proviamo un secondo lemma.

**Lemma 3.2.** *Sia  $S$  la chiusura di un dominio regolare di  $\mathcal{E}$  e siano  $\vec{w}, \beta$  un campo vettoriale e un campo scalare definiti in  $S$ . Se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

- $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(S)$ ;
- $\operatorname{div} \vec{w} = 0$  in  $S$ ;



$$\bullet \quad \vec{w}\Big|_{\partial S} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \beta\Big|_{\partial S} = 0,$$

allora:

$$\int_S \text{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = 0.$$

#### Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che per una nota proprietà dell'operatore divergenza si ha in  $S$ :

$$\text{div}(\beta \vec{w}) = \beta \text{div} \vec{w} + \text{grad} \beta \cdot \vec{w},$$

ma per ipotesi

$$\text{div} \vec{w} = 0 \quad \text{in } S$$

per cui la relazione precedente si riduce a:

$$\text{div}(\beta \vec{w}) = \text{grad} \beta \cdot \vec{w}.$$

Integrando su  $S$  e applicando il teorema della divergenza, otteniamo:

$$\int_S \text{grad} \beta \cdot \vec{w} \, dS = \int_S \text{div}(\beta \vec{w}) \, dS = \int_{\partial S} \beta \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la terza ipotesi del lemma.

Il lemma è così dimostrato.

Osserviamo che il lemma continua a valere anche se  $\vec{w}, \beta \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}(S)$  e  $\text{div} \vec{w} = 0$  in  $\overset{\circ}{S}$ .

### 3.3 Teorema di unicità.

In questo paragrafo ci proponiamo di stabilire un teorema di unicità della soluzione del problema ai limiti (3.1.2), (3.1.3), considerato nel §3.1, che richiamiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div} \vec{v} &= 0 && \text{in } S \times [0, +\infty) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) && \forall P \in S \\ \vec{v}\Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.** *Se  $(\vec{v}_1, p_1)$  e  $(\vec{v}_2, p_2)$  sono due soluzioni dello stesso problema ai limiti (3.1.2), (3.1.3), allora:*

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad p_1 = p_2 + \alpha(t) \quad \text{in } S \times [0, +\infty), \quad (3.3.1)$$

dove  $\alpha(t)$  è una funzione arbitraria del tempo.

Dimostrazione

Poiché  $(\vec{v}_1, p_1)$  è soluzione del problema (3.1.2), (3.1.3), avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= \vec{F} - \text{grad } p_1 + \nu \Delta \vec{v}_1 \\ \text{div } \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_1(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S \\ \vec{v}_1 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Analogamente per  $(\vec{v}_2, p_2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= \vec{F} - \text{grad } p_2 + \nu \Delta \vec{v}_2 \\ \text{div } \vec{v}_2 &= 0 \\ \vec{v}_2(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S \\ \vec{v}_2 \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{V}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Poniamo:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \alpha = p_1 - p_2. \tag{3.3.4}$$

Se sottraiamo membro a membro dalle equazioni (3.3.2) le corrispondenti (3.3.3) e usiamo le (3.3.4), otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{0} \quad \forall P \in S \\ \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

D'altra parte, per la posizione fatta, abbiamo:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2. \tag{3.3.6}$$

Consideriamo ora nella prima equazione delle (3.3.5) il termine:

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

e sostituiamo a  $\vec{v}_1$  in  $\text{grad } \vec{v}_1$  l'espressione data dalla (3.3.6):

$$\text{grad } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1.$$

Allora la prima delle (3.3.5) assume la forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha + \nu \Delta \vec{v}. \quad (3.3.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (3.3.7) per  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = -\text{grad } \alpha \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (3.3.8)$$

Consideriamo separatamente i vari termini della (3.3.8).

Dapprima osserviamo che:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (3.3.9)$$

Esaminiamo ora il termine:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1.$$

Se denotiamo con  $(v_i^{(1)})$  e  $((\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i)$  le successioni delle componenti di  $\vec{v}_1$  e  $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$  rispettivamente rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$  del riferimento associato all'osservatore, avremo:

$$(\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1)_i = v_{i,j} v_j^{(1)}.$$

(Ovviamente abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Otteniamo allora

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = v_i v_{i,j} v_j^{(1)}. \quad (3.3.10)$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} v_i v_{i,j} &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial x_j} = \frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Poiché  $\frac{1}{2} |\vec{v}|_{,j}^2$  è la  $j$ -esima componente di  $\text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2}$ , sostituendo il risultato trovato nella (3.3.10), arriviamo a

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1. \quad (3.3.12)$$

Prendiamo ora in esame:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} = v_i v_{i,j}^{(2)} v_j. \quad (3.3.13)$$

(Ovviamente denotiamo con  $(v_i^{(2)})$  la successione delle componenti di  $\vec{v}_2$ ).

Se teniamo presente che

$$\text{grad } \vec{v}_2 = \tilde{D}_2 + \tilde{E}_2$$

con

$$\tilde{D}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}_2 + \text{grad}^T \vec{v}_2), \quad \tilde{E}_2 = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}_2 - \text{grad}^T \vec{v}_2),$$

la (3.3.13) diventa:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}_2 \cdot \vec{v} &= (D_{ij}^{(2)} + E_{ij}^{(2)})v_i v_j \\ &= D_{ij}^{(2)} v_i v_j \\ &= \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

poichè la contraçione di due indici di emisimmetria con due di simmetria dà come risultato 0. Ovviamente abbiamo denotato con  $(D_{ij}^{(2)})$  e  $(E_{ij}^{(2)})$  le successioni delle componenti di  $\tilde{D}_2$  e  $\tilde{E}_2$ .

Consideriamo poi

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = v_{i,jj} v_i = (v_{i,j} v_i)_{,j} - v_{i,j} v_{i,j}. \quad (3.3.15)$$

D'altra parte:

$$(v_{i,j} v_i)_{,j} = (\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v})_{j,j} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v})$$

ed inoltre

$$v_{i,j} v_{i,j} = \text{grad } \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = |\text{grad } \vec{v}|^2.$$

Dunque la (3.3.15) assume la forma:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - |\text{grad } \vec{v}|^2. \quad (3.3.16)$$

A questo punto, se andiamo a sostituire nella (3.3.8) i risultati ottenuti in (3.3.9), (3.3.12), (3.3.14), (3.3.16) arriviamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} &= \\ = - \text{grad } \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - \nu |\text{grad } \vec{v}|^2. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Ora, fissato ad arbitrio  $t \in [0, +\infty)$ , integriamo entrambi i membri della (3.3.17), valutati all'istante  $t$  su  $S$ :

$$\begin{aligned} & \int_S \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2 + \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} \right] dS = \\ & = \int_S \left[ -\text{grad} \alpha \cdot \vec{v} + \nu \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) - \nu |\text{grad} \vec{v}|^2 \right] dS. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

La (3.3.18) si può poi scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS + \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS = \\ & = - \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

equazione che sussiste  $\forall t \in [0, +\infty)$ .

D'altra parte, per il lemma 3.2

$$\int_S \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}_1 dS = 0, \quad \int_S \text{grad} \alpha \cdot \vec{v} dS = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

ed inoltre per il teorema della divergenza e la condizione al contorno cui soddisfa il campo  $\vec{v}$

$$\int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) dS = \int_{\partial S} (\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Perciò la (3.3.19) si riduce a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = \\ & = - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS - \nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Ma, tenendo presente che

$$\nu = \text{costante} > 0, \quad |\text{grad} \vec{v}|^2 \geq 0 \quad \text{in } S \times [0, +\infty),$$

abbiamo:

$$\nu \int_S |\text{grad} \vec{v}|^2 dS \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Allora la (3.3.20) fornisce la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq - \int_S \vec{v} \cdot \tilde{D}_2 \cdot \vec{v} dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.3.21)$$

A questo punto rivolgiamo la nostra attenzione al campo tensoriale  $\tilde{D}_2$ .

Osserviamo che  $\forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$  il tensore doppio  $\tilde{D}_2(P, t)$  è simmetrico e dunque ammette tre autovalori (reali):  $\lambda_1(P, t)$ ,  $\lambda_2(P, t)$ ,  $\lambda_3(P, t)$ .

Fissati ad arbitrio  $P \in S$  e  $t \in [0, +\infty)$ , poniamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) = \min\{\lambda_1(P, t), \lambda_2(P, t), \lambda_3(P, t)\}.$$

Per il lemma 3.1 abbiamo:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq \lambda_{\min}(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (3.3.22)$$

D'altra parte, per la condizione di incomprimibilità, si ha che  $\text{tr } \tilde{D}_2 = \text{div } \vec{v}_2 = 0$  in  $S \times [0, +\infty)$ . Poiché è facile provare che, se una matrice reale e simmetrica ha traccia nulla, il suo autovalore più piccolo è minore o uguale a zero, deduciamo:

$$\lambda_{\min}(P, t) \leq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty).$$

E' allora conveniente porre:

$$\lambda_{\min}(P, t) = -\gamma(P, t), \quad \gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e perciò la (3.3.22) assume la forma:

$$\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \geq -\gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \gamma(P, t) |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty). \quad (3.3.23)$$

Fissiamo poi ad arbitrio  $\bar{t} \in [0, +\infty)$  e poniamo

$$h = 2 \sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t).$$

Osserviamo che  $h \geq 0$  perché  $\gamma(P, t) \geq 0 \quad \forall(P, t) \in S \times [0, +\infty)$ .

Inoltre possiamo mostrare che  $h < +\infty$  perché, essendo  $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^{2,1}(S \times [0, +\infty))$  per definizione di soluzione,  $\vec{v}_2 \in \mathcal{C}^1(S \times [0, \bar{t}])$  e dunque  $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$ .

Infatti, fissiamo  $(P, t) \in S \times [0, \bar{t}]$  e sia  $\vec{e}(P, t)$  autovettore con modulo unitario di  $\tilde{D}_2(P, t)$  corrispondente a  $\lambda_{\min}(P, t)$ . Dunque

$$\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t) = \lambda_{\min}(P, t) \vec{e}(P, t),$$

da cui

$$|\tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{e}(P, t)| = |\lambda_{\min}(P, t)| = \gamma(P, t).$$

D'altra parte si potrebbe provare che se  $\tilde{t}$  è un tensore doppio e  $\vec{u}$  un vettore si ha:

$$|\tilde{t} \cdot \vec{u}| \leq |\tilde{t}| |\vec{u}|.$$

Allora

$$\forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}] \quad \gamma(P, t) \leq |\tilde{D}_2(P, t)|.$$

Poiché  $\tilde{D}_2 \in \mathcal{C}(S \times [0, \bar{t}])$ , le sue componenti e di conseguenza la sua norma sono limitate in  $S \times [0, \bar{t}]$ . Perciò

$$\sup_{S \times [0, \bar{t}]} \gamma(P, t) < +\infty$$

e quindi  $h < +\infty$ .

Con la posizione fatta, dalla (3.3.23) discende:

$$-\vec{v}(P, t) \cdot \tilde{D}_2(P, t) \cdot \vec{v}(P, t) \leq \frac{h}{2} |\vec{v}(P, t)|^2 \quad \forall (P, t) \in S \times [0, \bar{t}]. \quad (3.3.24)$$

Allora dalla (3.3.21), tenendo presente la (3.3.24), deduciamo la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq \frac{h}{2} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq h \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (3.3.25)$$

Se poniamo:

$$\|\vec{v}\|^2(t) = \int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS,$$

la (3.3.25) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) \leq h \|\vec{v}\|^2(t) \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (3.3.26)$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della (3.3.26) per  $e^{-ht}$ , otteniamo:

$$e^{-ht} \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\|^2(t)) - h e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (3.3.27)$$

Dalla (3.3.27) deduciamo che la funzione  $e^{-ht} \|\vec{v}\|^2(t)$  è una funzione del tempo non crescente in  $[0, \bar{t}]$ .

All'istante  $\bar{t}$  si ha perciò

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq \|\vec{v}\|^2(0). \quad (3.3.28)$$

Ma  $\vec{v}$  soddisfa alla condizione iniziale

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{0} \quad \forall P \in S,$$

da cui

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = 0.$$

Dunque la (3.3.28) si riduce a

$$e^{-h\bar{t}} \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) \leq 0 \quad \implies \quad \|\vec{v}\|^2(\bar{t}) = 0.$$

Otteniamo perciò:

$$\int_S |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 dS = 0 \quad \implies \quad |\vec{v}(P, \bar{t})|^2 = 0 \quad \forall P \in S,$$

da cui:

$$\vec{v}(P, \bar{t}) = \vec{0} \quad \forall P \in S.$$

Poiché  $\bar{t}$  è arbitrario in  $[0, +\infty)$ , concludiamo che

$$\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$$

e dunque:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \text{in } S \times [0, +\infty).$$

Per completare la dimostrazione del teorema di unicità ci resta da provare che  $\alpha = \alpha(P, t)$  risulta una funzione arbitraria del tempo.

Dall'equazione (3.3.7), tenendo presente che  $\vec{v}(P, t) = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty)$ , otteniamo:

$$\text{grad } \alpha = \vec{0} \quad \forall (P, t) \in S \times [0, +\infty),$$

da cui deduciamo che  $\alpha$  non dipende da  $P$  ed è una funzione arbitraria del tempo.

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.

Nel prossimo paragrafo stabiliremo un teorema di stabilità per il problema ai limiti (3.1.2), (3.1.3), nell'ipotesi che le forze di massa provengano da un potenziale scalare e che il bordo di  $S$  sia fisso.



### 3.4 Teorema di stabilità.

Supponiamo ancora di avere un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo che durante il moto occupi la regione  $S$  che non varia al trascorrere del tempo.

Assumiamo inoltre che la densità delle forze esterne di massa  $\vec{F}$  provenga dal potenziale scalare  $U_1$ .

Ovviamente abbiamo:  $\rho = \text{costante}$  positiva.

Le equazioni che governano il moto del fluido sono dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \text{grad} \left( U_1 - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (3.4.1)$$

cui associamo le condizioni ai limiti (3.1.3) con  $\vec{V} = \vec{0}$ .

Se introduciamo la pressione modificata  $p^*$  così definita

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1$$

e la sostituiamo nella (3.4.1), il problema ai limiti che considereremo è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \times [0, +\infty) \quad (3.4.2)$$

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S, \quad \vec{v} \Big|_{\partial S \times [0, +\infty)} = \vec{0}. \quad (3.4.3)$$

Dimostriamo il seguente

**Teorema 3.3.** *Se  $(\vec{v}, p^*)$  è soluzione del problema (3.4.2), (3.4.3), allora*

$$\|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

dove  $k = k(S, \nu)$  è una costante positiva.

Dimostrazione

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima delle (3.4.2) per  $\vec{v}$  ottenendo così:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p^* \cdot \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{in } S \times [0, +\infty). \quad (3.4.4)$$

Consideriamo singolarmente i termini della (3.4.4).

In primo luogo abbiamo

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{v}|^2. \quad (3.4.5)$$

Se poi si tiene presente il risultato ottenuto nel teorema di unicità per il termine:  $\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}_1$ , otteniamo:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v}. \quad (3.4.6)$$

Sempre per il risultato ottenuto nel teorema di unicità, abbiamo:

$$\Delta \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) - |\text{grad } \vec{v}|^2. \quad (3.4.7)$$

Se sostituiamo nella (3.4.4) i risultati di (3.4.5), (3.4.6), (3.4.7) e integriamo su  $S$  l'equazione risultante, otteniamo  $\forall t \in [0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \int_S \text{grad } \frac{|\vec{v}|^2}{2} \cdot \vec{v} dS \\ &= - \int_S \text{grad } p^* \cdot \vec{v} dS + \nu \int_S \text{div}(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}) dS - \nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Ma il secondo integrale al I membro così come il primo integrale al II membro della (3.4.8) sono nulli per il lemma 3.2, mentre il secondo integrale al II membro è nullo per il teorema della divergenza e per il fatto che  $\vec{v}$  è nullo sul bordo di  $S$  ad ogni istante.

Dunque la (3.4.8) si riduce a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) = -\nu \int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.4.9)$$

Richiamiamo ora (senza dimostrarla) una disuguaglianza che svolge un ruolo importante in Fisica Matematica, **la disuguaglianza di Poincaré**.

**Proposizione 3.2.** *Sia  $S$  la chiusura di un dominio regolare e sia  $\vec{u} = \vec{u}(P)$  una campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(S)$  tale che  $\vec{u}|_{\partial S} = \vec{0}$ . Allora*

$$\int_S |\vec{u}|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{u}|^2 dS,$$

dove  $\gamma$  è una costante positiva dipendente solo dalla geometria, cioè  $\gamma = \gamma(S)$ , detta **costante di Poincaré**.

Ritorniamo ora alla dimostrazione del teorema, applicando la disuguaglianza di Poincaré al campo  $\vec{v}(\cdot, t)$  dove  $t$  è un istante arbitrario fissato in  $[0, +\infty)$ . E' immediato verificare che per ogni  $t$  fissato il campo  $\vec{v}(\cdot, t)$  soddisfa alle ipotesi della proposizione appena enunciata per cui possiamo scrivere:

$$\int_S |\vec{v}(P, t)|^2 dS \leq \gamma \int_S |\text{grad } \vec{v}(P, t)|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

da cui

$$\int_S |\text{grad } \vec{v}|^2 dS \geq \frac{1}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \text{in } [0, +\infty). \quad (3.4.10)$$

Se allora sostituiamo la disuguaglianza (3.4.10) nella (3.4.9), otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) \leq -\frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

ossia

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + \frac{\nu}{\gamma} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.4.11)$$

Se poniamo  $k = \frac{\nu}{\gamma}$ , la (3.4.11) si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.4.12)$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri della (3.4.12) per  $e^{2kt}$  per cui deduciamo:

$$e^{2kt} \frac{d}{dt} \left( \int_S |\vec{v}|^2 dS \right) + 2k e^{2kt} \int_S |\vec{v}|^2 dS \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

da cui

$$\frac{d}{dt} [e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.4.13)$$

Dalla (3.4.13) discende che la funzione  $e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t)$  è una funzione del tempo non crescente.

Dunque

$$e^{2kt} \|\vec{v}\|^2(t) \leq \|\vec{v}\|^2(0) \implies \|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}\|^2(0) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

D'altra parte

$$\|\vec{v}\|^2(0) = \int_S |\vec{v}(P, 0)|^2 dS = \int_S |\vec{v}_0(P)|^2 dS = \|\vec{v}_0\|^2.$$

L'ultima disuguaglianza fornisce così

$$\|\vec{v}\|^2(t) \leq e^{-2kt} \|\vec{v}_0\|^2 \implies \|\vec{v}\|(t) \leq e^{-kt} \|\vec{v}_0\| \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Il teorema di stabilità è dunque provato.

Tale teorema è detto di *stabilità* perché la norma in  $L^2(S)$  di  $\vec{v}(\cdot, t)$  decresce esponenzialmente al trascorrere del tempo e tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .



# Capitolo 4

## Equazioni di Navier-Stokes in coordinate curvilinee.

### 4.1 Sistemi di coordinate curvilinee.

Come abbiamo visto, il moto di un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo è governato dall'equazione di Navier-Stokes che ha carattere vettoriale e dall'equazione che esprime l'incomprimibilità che ha carattere scalare. Se consideriamo le rappresentazioni analitiche, in un riferimento cartesiano ortonormale, dei campi che intervengono nell'equazione di Navier-Stokes e nella condizione di incomprimibilità, otteniamo un sistema di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali, di cui le prime tre equivalgono all'equazione di Navier-Stokes vettoriale e sono chiamate equazioni di Navier-Stokes scalari. Tali equazioni sono non lineari e, a causa della non linearità, il problema differenziale che si ottiene associando al sistema le condizioni ai limiti è di difficile risoluzione. Tuttavia se la regione in cui si muove il fluido ha delle particolari proprietà geometriche, lo studio del moto può essere semplificato se si utilizzano, in luogo di coordinate cartesiane ortonormali, coordinate curvilinee, come ad esempio coordinate cilindriche o sferiche.

Lo scopo di questo capitolo è appunto quello di vedere quale forma assumono le tre equazioni di Navier-Stokes scalari e la condizione di incomprimibilità in coordinate curvilinee.

Nel primo paragrafo introduciamo ed approfondiamo il concetto di sistema di coordinate curvilinee.

Fissiamo in  $\mathcal{E}$  un riferimento cartesiano ortonormale  $Oxyz$ . (In questo capitolo, per motivi di convenienza, usiamo questa notazione per denotare un riferimento cartesiano in luogo di  $Ox_1x_2x_3$ , come nei capitoli precedenti.)

Ovviamente ogni punto  $P \in \mathcal{E}$  è individuato univocamente mediante la terna

$(x, y, z)$  delle sue coordinate. Ricordiamo che l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x, y, z) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo.

Dunque se  $S$  è un dominio (aperto e connesso) di  $\mathcal{E}$ , allora  $\xi(S) =: S_\xi$  è un dominio di  $\mathbb{R}^3$  e viceversa, se  $S_\xi$  è un dominio di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $S = \xi^{-1}(S_\xi)$  è un dominio di  $\mathcal{E}$ .

Consideriamo ora un dominio  $S \subset \mathcal{E}$ ; per quanto detto prima  $S_\xi = \xi(S)$  è un dominio di  $\mathbb{R}^3$ .

Supponiamo che sia definita in  $S_\xi$  l'applicazione  $\Phi$  a valori in  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \Phi : S_\xi = \xi(S) \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) &\longmapsto (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

dove

$$q_1 = \Phi_1(x, y, z), \quad q_2 = \Phi_2(x, y, z), \quad q_3 = \Phi_3(x, y, z), \quad (4.1.1)$$

che gode delle proprietà seguenti

1.  $\Phi_i \in \mathcal{C}^1(S_\xi) \quad i = 1, 2, 3$
2. nel dominio  $S_\xi$

$$\frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.1.2)$$

Il determinante scritto sopra, com'è noto, è lo jacobiano delle funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  rispetto a  $x, y, z$ .

La condizione (4.1.2) assicura che, preso arbitrariamente  $(x_0, y_0, z_0) \in S_\xi$ , esiste in  $S_\xi$  un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  tale che ogni  $(x, y, z)$  appartenente a tale intorno si può esprimere in funzione di  $q_1, q_2, q_3$ , ossia esistono tre funzioni  $f, g, h$  tali che

$$x = f(q_1, q_2, q_3), \quad y = g(q_1, q_2, q_3), \quad z = h(q_1, q_2, q_3) \quad (4.1.3)$$

dove  $f, g, h$  sono definite in un intorno del punto  $(q_{10}, q_{20}, q_{30})$  con

$$q_{i0} = \Phi_i(x_0, y_0, z_0) \quad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre in tale intorno  $f, g, h \in C^1$  e

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \quad (4.1.4)$$

Si può mostrare infatti che gli jacobiani (4.1.2) e (4.1.4) soddisfano l'importante relazione

$$\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = 1. \quad (4.1.5)$$

Se l'applicazione  $\Phi$ , oltre a soddisfare alle condizioni 1., 2., è iniettiva le equazioni (4.1.3) sono definite globalmente (cioè in tutto  $\Phi(S_\xi)$ ) e non solo localmente.

Osserviamo che preso un punto  $P \in S$ , a questo resta associata una terna  $(x, y, z) \in S_\xi$  (cioè la terna delle sue coordinate cartesiane). A sua volta alla terna  $(x, y, z)$  resta associata la terna  $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$  con  $q_i = \Phi_i(x, y, z)$ . Viceversa presa una terna  $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$ , a questa, tramite la (4.1.3), resta associata una terna  $(x, y, z) \in S_\xi$  e d'altra parte questa individua un punto  $P \in S$ .

Dunque note le (4.1.1) ad ogni punto  $P \in S$  resta associata una terna  $(q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$  che individua  $P$  univocamente. Per questo motivo  $(q_1, q_2, q_3)$  è detta terna delle **coordinate curvilinee** del punto  $P \in S$ .

**Definizione 4.1.** *Le (4.1.1) sono chiamate equazioni di una trasformazione di coordinate e definiscono un sistema di coordinate curvilinee in  $S$ . Le (4.1.3) sono le equazioni della trasformazione inversa.*

Dalla (4.1.5) segue che lo jacobiano di una trasformazione è il reciproco dello jacobiano della sua inversa.

Vediamo alcuni esempi di sistemi di coordinate curvilinee.

### Esempio 1. Coordinate polari piane.

Quanto visto relativamente allo spazio geometrico  $\mathcal{E}$  si può ripetere se consideriamo un qualsiasi piano dello spazio geometrico.

Sia dato un piano  $\Pi \subset \mathcal{E}$  e in tale piano fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $Oxy$ . Poniamo  $S = \Pi \setminus \{O\}$  per cui  $S_\xi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Preso un qualsiasi punto  $P(x, y) \in S$ , indichiamo con

$r$  la sua distanza dall'origine,

$\varphi$  l'angolo che  $OP$  forma con il semiasse positivo  $Ox$ .

Come è facile verificare,  $r \in (0, +\infty)$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$  si esprimono in funzione di  $x$  e  $y$  nel modo seguente:

$\forall (x, y) \in S_\xi$

$$r = \Phi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \Phi_2(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \quad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \quad y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, \quad y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

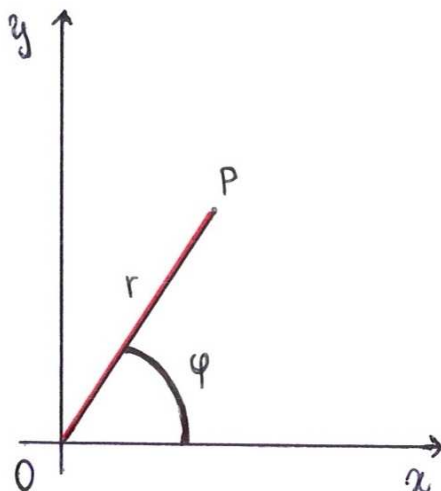


Figura 4.1: Coordinate polari piane

Si prova facilmente che  $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$  ed inoltre in  $S_\xi$

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$



Esprimendo lo jacobiano tramite le coordinate polari piane, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Eccetto che nel punto di coordinate  $(0, 0)$ , la trasformazione ha un'inversa:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

definita per ogni  $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ .

Tramite calcoli diretti si ottiene

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

### Esempio 2. Coordinate cilindriche.

Fissato nello spazio geometrico il riferimento cartesiano ortonormale  $Oxyz$ , poniamo  $S = \mathcal{E} \setminus \{P \in 0z\}$  per cui  $S_\xi = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ .

Preso un qualsiasi punto  $P(x, y, z) \in S$ , indichiamo con

$r$  la distanza da  $O$  del punto  $P^*$  proiezione ortogonale di  $P$  sul piano  $Oxy$ ,

$\varphi$  l'angolo che  $OP^*$  forma con il semiasse positivo  $Ox$ ,

$z$  la terza coordinata di  $P$ .

Allora  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$  si esprimono tramite  $(x, y, z)$  nel modo seguente:

$\forall (x, y, z) \in S_\xi$

$$\begin{aligned} r &= \Phi_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \Phi_2(x, y, z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, & y < 0, \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ z &= \Phi_3(x, y, z) = z. \end{aligned}$$

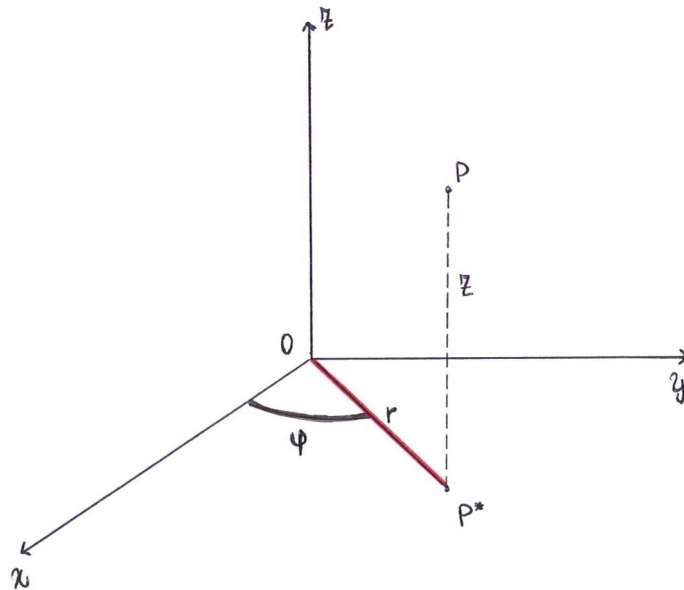


Figura 4.2: Coordinate cilindriche

Come si verifica facilmente,  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$  e

$$\frac{\partial(r, \varphi, z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

In coordinate cilindriche lo jacobiano è dato da:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

La trasformazione inversa è data da

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z \end{aligned}$$

ed è definita per  $(r, \varphi, x_3) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$ .

Inoltre

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

**Esempio 3. Coordinate sferiche.**

Come nell'esempio 4.2, è stato fissato un riferimento  $Oxyz$  nello spazio e preso  $S = \mathcal{E} \setminus \{P \in Oz\}$  e  $S_\xi = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ .

Preso un punto  $P(x, y, z) \in S$ , indichiamo con

$r$  la sua distanza dall'origine,

$\theta$  l'angolo che il vettore  $(P - O)$  forma con il versore dell'asse  $Oz$ ,

$\varphi$  l'angolo che  $OP^*$  ( $P^*$  = proiezione ortogonale di  $P$  sul piano  $Oxy$ ) forma con il semiasse positivo  $Ox$ .

Come è facile verificare,  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  si esprimono in funzione di  $x, y, z$  nel modo seguente

$\forall (x, y, z) \in S_\xi$

$$r = \Phi_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \Phi_2(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \Phi_3(x, y, z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, & y < 0. \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Le funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{C}^1(S_\xi)$  e si ha

$$\frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

Lo jacobiano utilizzando le coordinate sferiche si scrive come:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}.$$

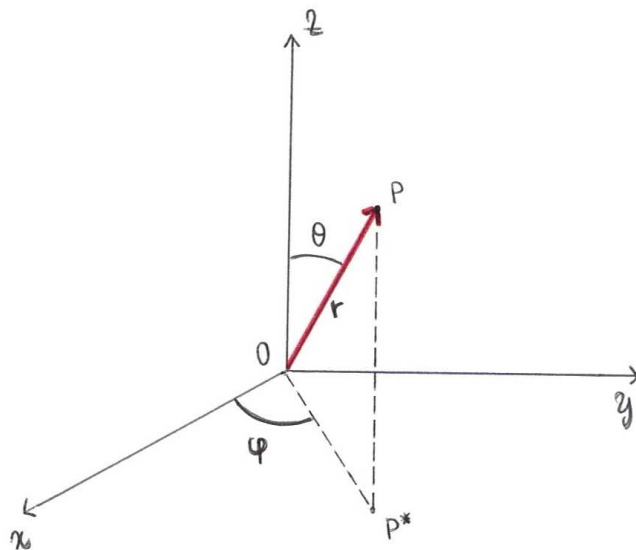


Figura 4.3: Coordinate sferiche

La trasformazione inversa è data

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

definita in  $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ .

Inoltre

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

**Osservazione 4.1.** Nei tre esempi precedenti l'angolo  $\varphi$  si può far variare in  $[-\pi, \pi)$  anzichè in  $[0, 2\pi)$ . In tal caso si deve modificare la relazione che esprime  $\varphi$  in funzione delle coordinate cartesiane, nel modo seguente

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0, & y \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, & -\infty < y < +\infty \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, & y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, & y > 0. \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Esaminiamo ora le caratteristiche di un sistema di coordinate curvilinee dal **punto di vista geometrico**.

A tal fine supponiamo di avere fissato nel dominio  $S$  un sistema di coordinate curvilinee definito dalla trasformazione (4.1.1) e consideriamo un punto  $P_0$  con coordinate curvilinee  $(q_{10}, q_{20}, q_{30})$ . Le equazioni

$$q_{10} = \Phi_1(x, y, z), \quad q_{20} = \Phi_2(x, y, z), \quad q_{30} = \Phi_3(x, y, z) \quad (4.1.6)$$

descrivono tre superfici nello spazio, ognuna delle quali passa per il punto  $P_0$ . Queste superfici corrispondono ai tre piani coordinati  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  nel caso di un sistema di coordinate cartesiane dove  $(x_0, y_0, z_0)$  sono le coordinate cartesiane di  $P_0$ .

Chiamiamo le tre superfici descritte dalle (4.1.6) *superfici coordinate* che si intersecano nel punto  $P_0$ . Così le trasformazioni di coordinate (4.1.1) definiscono tre famiglie di superfici ad un parametro; *le coordinate curvilinee di un punto rappresentano le tre superfici coordinate che si intersecano in quel punto*.

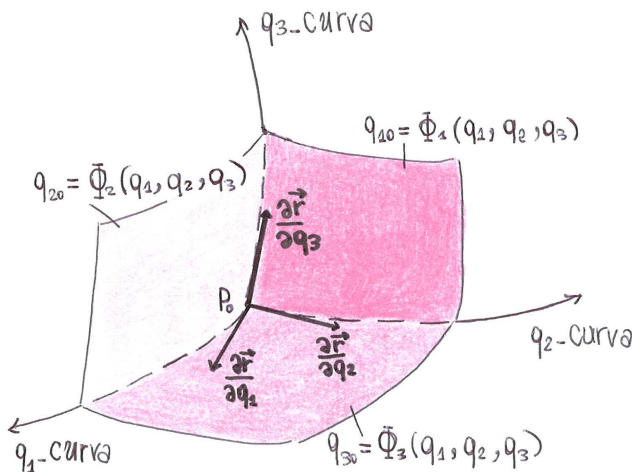


Figura 4.4: Coordinate curvilinee.

E' chiaro che due qualsiasi delle tre superfici coordinate si intersecano lungo un cammino, che chiamiamo *cammino coordinato* (in un sistema di coordinate cartesiane questo corrisponde ad un asse coordinato). Così, per esempio, le superfici  $q_{20} = \Phi_2(x, y, z)$  e  $q_{30} = \Phi_3(x, y, z)$  si intersecano lungo un cammino nei punti del quale varia solo  $q_1$ . In particolare, chiamiamo questo cammino *cammino coordinato  $q_1$* . Il *cammino coordinato  $q_2$*  e il *cammino coordinato  $q_3$*

sono definiti in modo simile e sono indicati in figura 4.4.

Dall'equazione (4.1.3), vediamo che il vettore posizione di un punto in termini delle sue coordinate curvilinee è dato da

$$\vec{r}^*(q_1, q_2, q_3) = f(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_x + g(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_y + h(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_z \quad (4.1.7)$$

con  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  versori degli assi  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  rispettivamente.

Ponendo  $q_2 = c_2$  e  $q_3 = c_3$ , dove  $c_2$  e  $c_3$  sono costanti, otteniamo che

$$\vec{r} = \vec{r}^*(q_1, c_2, c_3)$$

è l'equazione vettoriale parametrica con parametro  $q_1$  del cammino coordinato  $q_1$  lungo il quale le due superfici coordinate  $c_2 = \Phi_2(x, y, z)$ ,  $c_3 = \Phi_3(x, y, z)$  si intersecano. Segue che la derivata  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}$  rappresenta il vettore tangente a tale cammino.

Con lo stesso ragionamento, osserviamo che  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}$  e  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$  rappresentano i vettori tangenti (indicati in figura 4.4) ai cammini coordinati  $q_2$  e  $q_3$  rispettivamente.

Dalla definizione di jacobiano e prodotto misto segue che

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}. \quad (4.1.8)$$

Ma per definizione di coordinate curvilinee, lo jacobiano nella (4.1.8) è diverso da zero e perciò anche il prodotto misto a secondo membro della (4.1.8) è  $\neq 0$  in  $\Phi(S_\xi)$ , per cui i tre vettori tangenti  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$  sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Ogni vettore può dunque essere decomposto rispetto a questa base.

Tuttavia, a differenza della base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , questa nuova base varia da punto a punto nello spazio. Per questa ragione chiamiamo  $\left(\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}\right)$  una *base locale*. Più avanti normalizzeremo questi vettori di base.

D'ora in poi, assumiamo che le coordinate  $q_1, q_2, q_3$  siano ordinate in modo tale che i vettori di base  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$ , formino una terna destra. Allora lo jacobiano  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}$  è positivo in  $\Phi(S_\xi)$ .

**Definizione 4.2.** *Il sistema di coordinate curvilinee definito dalla (4.1.1) o dalla sua inversa (4.1.3) è detto ortogonale se  $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \Phi(S_\xi)$ , ossia  $\forall P \in S$ , i vettori di base  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$  sono ortogonali a due a due.*

In questo caso le formule per il gradiente, la divergenza ed il rotore appaiono molto più simili a quelle che si hanno in un sistema di coordinate cartesiane. Le coordinate curvilinee più frequentemente usate sono ortogonali.

Se  $\vec{r}^*(q_1, q_2, q_3)$  è il vettore posizione che indica la posizione di un punto in coordinate curvilinee, poniamo

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \right| \quad i = 1, 2, 3.$$

Riprendiamo gli esempi 2 e 3 di coordinate curvilinee.

### Esempio 2. Coordinate cilindriche.

Le superfici coordinate che si intersecano nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  sono:

- la superficie cilindrica circolare retta di raggio  $r_0 = \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}$  avente come asse l'asse  $Oz$ ,
- il semipiano passante per l'asse  $Oz$  e formante con il semipiano coordinato  $Oxz$ ,  $x > 0$  l'angolo  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  tale che  $\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{r_0}$ ,  $\sin \varphi_0 = \frac{y_0}{r_0}$ ,
- il piano di equazione  $z = z_0$ .

I cammini di intersezione tra le tre superfici coordinate, ossia i tre cammini coordinati passanti per  $P_0$ , sono la semiretta passante per l'asse  $Oz$  e per il punto  $P_0$  giacente sul piano  $z = z_0$  (cammino coordinato  $r$ ), la circonferenza passante per  $P_0$  con centro sull'asse  $Oz$  e giacente sul piano  $z = z_0$  (cammino coordinato  $\varphi$ ) ed infine la retta parallela all'asse  $Oz$  passante per  $P_0$  (cammino coordinato  $z$ ).

Il vettore posizione in coordinate cilindriche assume la forma

$$\vec{r}^*(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

cosicché i vettori tangenti ai cammini coordinati sono dati da

$$\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial r} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial z} = \vec{e}_z.$$

E' evidente che questi vettori sono mutuamente ortogonali in ogni punto di  $S$ . Quindi il sistema di coordinate cilindriche è un sistema ortogonale di coordinate curvilinee.

Inoltre

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = 1.$$

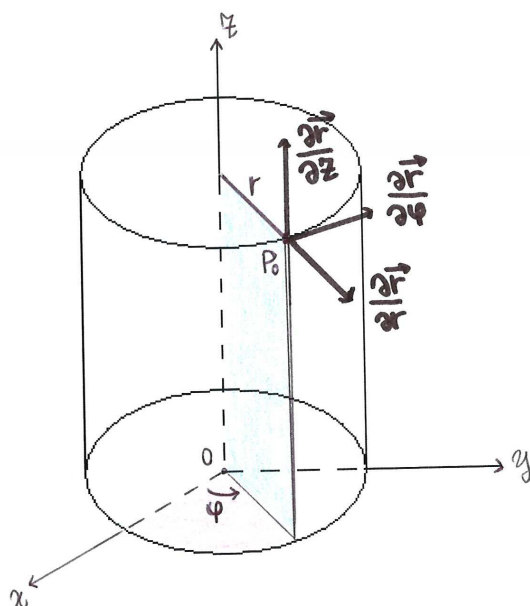


Figura 4.5: Coordinate cilindriche.

**Esempio 3. Coordinate sferiche.**

Le superfici coordinate che si intersecano nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  sono

- la superficie sferica di raggio  $r_0 = \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2 + (z_0)^2}$  e centro nell'origine,
- il cono con vertice nell'origine, avente come asse l'asse  $Oz$  e angolo generatore  $\theta_0 = \arccos \frac{z_0}{r_0}$ ,
- il semipiano passante per l'asse  $Oz$  che forma con il semipiano  $Oxz$ ,  $x > 0$ , l'angolo  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  tale che

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{y_0}{\sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}}.$$

I cammini di intersezione tra le tre superfici coordinate, ossia i tre cammini coordinati passanti per  $P_0$ , sono la semiretta passante per l'origine e per il punto  $P_0$  (cammino coordinato  $r$ ), la semicirconferenza con centro l'origine che passa per  $P_0$  e giace nel semipiano passante per l'asse  $Oz$  individuato dall'angolo  $\varphi_0$



(cammino coordinato  $\theta$ ) ed infine la circonferenza passante per  $P_0$  con centro sull'asse  $Oz$  e giacente sul piano  $z = z_0$  (cammino coordinato  $\varphi$ ).

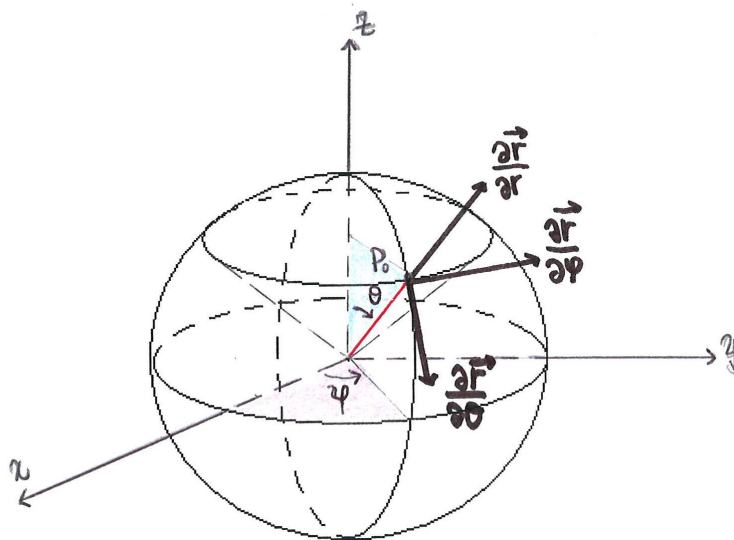


Figura 4.6: Coordinate sferiche.

Il vettore posizione in coordinate sferiche è dato da

$$\vec{r}^*(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z$$

per cui i vettori tangenti ai cammini coordinati sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che questi vettori sono mutuamente ortogonali così che il sistema di coordinate sferiche è un sistema ortogonale di coordinate curvilinee.

Inoltre abbiamo

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta.$$

## 4.2 Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali.

Fissato nel dominio  $S$  di  $\mathcal{E}$  un sistema di coordinate curvilinee  $(q_1, q_2, q_3)$  definito dalle equazioni (4.1.1), supponiamo che le funzioni  $\Phi_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) siano di classe  $C^2(S_\xi)$ .

Aggiungiamo anche l'ipotesi che la trasformazione inversa sia data globalmente da

$$x = f(q_1, q_2, q_3), \quad y = g(q_1, q_2, q_3), \quad z = h(q_1, q_2, q_3),$$

dove le funzioni  $f, g, h$  sono definite e di classe  $C^2$  in  $\Phi(S_\xi)$ .

Assumiamo inoltre di aver ridenominato le coordinate in modo tale che lo jacobiano  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}$  sia positivo in  $\Phi(S_\xi)$ . Questo implica che i vettori di base  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_3}$ , in quest'ordine, formano una terna destra.

Ora il nostro scopo è di rappresentare gradiente di un campo scalare, divergenza e rotore di un campo vettoriale nel sistema di coordinate  $(q_1, q_2, q_3)$  che assumiamo sia ortogonale.

Poniamo

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad (4.2.1)$$

dove  $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \right|$ .

I vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  formano una base ortonormale destra. Quindi si ha

$$\vec{e}_i = \vec{e}_j \times \vec{e}_k \quad (4.2.2)$$

dove  $(i, j, k)$  sono permutazioni cicliche (cioè gli indici  $i, j, k$  assumono rispettivamente i valori 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2).

Teniamo comunque presente che i versori  $\vec{e}_i$  variano da punto a punto a differenza dei versori associati al riferimento cartesiano ortonormale.

In ogni caso, essendo  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  e  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  due basi entrambe ortonormali, se  $\mathbb{A}$  è la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda, la matrice di passaggio dalla seconda alla prima è  $\mathbb{A}^T$ .

D'altra parte

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial g}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial g}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial g}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial h}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

per cui

$$\mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial g}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial g}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial g}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial h}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \vec{e}_i \\ \vec{e}_y &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \vec{e}_i \\ \vec{e}_z &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

In ogni caso sia  $\mathbb{A}$  che  $\mathbb{A}^T$  variano al variare del punto che si considera in  $S$ . Possiamo anche scrivere immediatamente il legame che sussiste tra le componenti di un vettore  $\vec{u}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  e le sue componenti rispetto alla base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Se

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3,$$

per formule ben note si ha

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Si noti che mentre  $u_x, u_y, u_z$  non dipendono dal punto,  $u_1, u_2, u_3$  variano al variare del punto che si considera in  $S$ .

Poiché la base  $(\vec{e}_i)$  è ortonormale, in maniera analoga a quanto visto per un vettore, possiamo considerare le componenti di un qualsiasi tensore di ordine  $r$  con  $r \in \mathbb{N}, r > 1$  rispetto a tale base e vedere come si esprimono tramite le componenti rispetto alla base associata al riferimento cartesiano ortonormale, sfruttando la relazione con cui mutano le componenti di un tensore di ordine  $r$  al variare della base ortonormale. Anche in tal caso le componenti rispetto ad  $(\vec{e}_i)$  dipendono dal punto che si considera in  $S$ . Ma su ciò non insistiamo.

**Osservazione 4.2.** Per quanto riguarda la derivazione tensoriale in coordinate curvilinee di un campo tensoriale, anche nel caso da noi considerato in cui le coordinate sono ortogonali, questa risulta particolarmente complicata perché la base  $(\vec{e}_i)$  non è fissa, ma dipende dal punto. Ciò implica che in coordinate curvilinee, a differenza di quanto avviene in coordinate cartesiane ortonormali, la derivazione tensoriale non si riduce alla derivazione della rappresentazione analitica dei campi.

Comunque, poichè il nostro scopo è solo quello di vedere quale forma assumono in coordinate curvilinee ortogonali le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, non affronteremo il problema generale della derivazione tensoriale in coordinate curvilinee, ma ci limiteremo, con alcuni artifici, a stabilire come si esprimono in tali coordinate i vari termini che compaiono in tali equazioni.

Sia  $F = F(P)$  un campo scalare differenziabile in un aperto  $\widehat{S} \subset S$  e consideriamone la rappresentazione analitica nel riferimento cartesiano ortonormale  $Oxyz$

$$F^\circ = F^\circ(x, y, z)$$

definita in  $\widehat{S}_\xi = \xi(\widehat{S})$ .

Poichè  $F$  è differenziabile in  $\widehat{S}$ ,  $F^\circ$  è differenziabile in  $\widehat{S}_\xi$ . Inoltre  $\forall P \in \widehat{S}$  è definito il gradiente di  $F$  e precisamente

$$\text{grad } F(P) = \frac{\partial F^\circ}{\partial x}(x, y, z) \vec{e}_x + \frac{\partial F^\circ}{\partial y}(x, y, z) \vec{e}_y + \frac{\partial F^\circ}{\partial z}(x, y, z) \vec{e}_z, \quad (4.2.8)$$

dove  $(x, y, z)$  è la terna delle coordinate cartesiane di  $P$ .

D'altra parte  $P$  è anche individuato dalla terna  $(q_1, q_2, q_3)$  delle sue coordinate

curvilinee. Indicata con  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base ortonormale associata nel punto  $P$  al sistema di coordinate curvilinee, potremo sempre decomporre  $\text{grad } F(P)$  rispetto a tale base. Omettendo gli argomenti scriveremo

$$\text{grad } F = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3. \quad (4.2.9)$$

Il nostro scopo è di vedere come si esprimono le  $F_i$ .

Intanto osserviamo che, per le (4.1.3), possiamo introdurre la funzione  $F^*$  definita in  $\Phi(\widehat{S}_\xi)$  nel modo seguente

$$F^*(q_1, q_2, q_3) = F^\circ(f(q_1, q_2, q_3), g(q_1, q_2, q_3), h(q_1, q_2, q_3)). \quad (4.2.10)$$

$F^*$  può essere chiamata *rappresentazione analitica del campo scalare  $F$  nel sistema di coordinate curvilinee*.

Poichè  $f, g, h \in C^2(\Phi(S_\xi))$  e  $F^\circ$  è differenziabile in  $\widehat{S}_\xi$ , deduciamo che  $F^*$  è differenziabile in  $\Phi(\widehat{S}_\xi)$  e

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_i} = \frac{\partial F^\circ}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial F^\circ}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2.11)$$

per le formule di derivazione delle funzioni composte applicate a (4.2.10).

D'altra parte per la (4.2.6) abbiamo

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial F^\circ}{\partial x} \\ \frac{\partial F^\circ}{\partial y} \\ \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \end{bmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{h_i} \left[ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial F^\circ}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial F^*}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

dove abbiamo tenuto presente la (4.2.11).

Infine, sostituendo le (4.2.12) nella (4.2.9), otteniamo la formula di rappresentazione del **gradiente di un campo scalare  $F$  nel sistema di coordinate curvilinee ortogonali**  $(q_1, q_2, q_3)$ :

$$\text{grad } F = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F^*}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F^*}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial F^*}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (4.2.13)$$

Nel seguito, una volta fissato il sistema di coordinate curvilinee, per brevità nelle rappresentazioni analitiche dei campi che si considerano ometteremo l'asterisco. Dunque possiamo scrivere la (4.2.13) nella forma seguente

$$\text{grad } F = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \vec{e}_3,$$

dove è evidente che al primo membro interviene il campo vero e proprio ed al secondo membro la sua rappresentazione analitica nel sistema di coordinate curvilinee fissato.

Ora al fine di ricavare l'espressione della divergenza di un campo vettoriale in un sistema ortogonale di coordinate curvilinee, premettiamo alcune osservazioni.

Osserviamo dapprima che i campi vettoriali definiti in  $S$  mediante i tre vettori  $\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i}$ , grazie alle proprietà di regolarità imposte al sistema di coordinate curvilinee ortogonali, sono di classe  $\mathcal{C}^1(S)$  così come i tre campi scalari  $h_i$ . Ciò implica che anche i campi vettoriali individuati dai tre vettori  $\vec{e}_i$  appartengono alla stessa classe di regolarità.

Notiamo poi che l'applicazione che va da  $S$  a  $\mathbb{R}$  che ad ogni punto  $P \in S$  associa la sua  $i$ -esima coordinata curvilinea  $q_i$  con  $i = 1, 2, 3$  si può riguardare come un campo scalare che denotiamo con  $G_i$ . Tale campo scalare ha come rappresentazione analitica nel sistema di coordinate curvilinee appunto  $q_i$  e nel riferimento cartesiano  $Oxyz$  la funzione  $\Phi_i$ . Per le ipotesi fatte inizialmente,  $G_i \in \mathcal{C}^2(S)$  per  $i = 1, 2, 3$ . Se applichiamo l'operatore gradiente a tale campo scalare nel sistema di coordinate curvilinee, otteniamo

$$\text{grad } G_i = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \delta_{ij} \vec{e}_j = \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Quindi, se teniamo presente che  $\text{rot}(\text{grad } F) = \vec{0} \quad \forall F \in \mathcal{C}^2$ , deduciamo

$$\text{rot grad } G_i = \text{rot} \left( \frac{\vec{e}_i}{h_i} \right) = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2.14)$$

Inoltre

$$\text{div} \left( \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{e}_j}{h_j} \times \frac{\vec{e}_k}{h_k} \right), \quad (4.2.15)$$

dove  $(i, j, k)$  sono permutazioni cicliche.

Usando la seguente proprietà della divergenza:

se  $\vec{u}, \vec{v}$  sono campi vettoriali differenziabili, allora

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v},$$

dalle (4.2.14) deduciamo

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} G_j \times \operatorname{grad} G_k) = \operatorname{grad} G_k \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} G_j - \operatorname{grad} G_j \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} G_k = 0. \quad (4.2.16)$$

Ora sia  $\vec{u} = \vec{u}(P)$  un campo vettoriale la cui rappresentazione analitica nelle coordinate  $q_1, q_2, q_3$  sia la seguente:

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \quad (4.2.17)$$

in termini della base locale  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Assumiamo che  $\vec{u}$  sia differenziabile in  $\widehat{S}$ , per cui è definita la sua divergenza.

Si può verificare facilmente, tenendo presente la relazione con le componenti cartesiane, che  $u_i$  si può riguardare come un campo scalare differenziabile in  $\widehat{S}$  per  $i = 1, 2, 3$ .

Allora dalla (4.2.17) otteniamo

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div}(u_1 \vec{e}_1) + \operatorname{div}(u_2 \vec{e}_2) + \operatorname{div}(u_3 \vec{e}_3). \quad (4.2.18)$$

Per calcolare ogni termine a secondo membro dell'equazione precedente, scriviamo

$$u_i \vec{e}_i = (u_i h_j h_k) \left( \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per  $h_j h_k$ , con  $(i, j, k)$  permutazioni cicliche.

Applicando una nota proprietà della divergenza, deduciamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_i \vec{e}_i) &= \operatorname{grad}(u_i h_j h_k) \cdot \left( \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) + u_i h_j h_k \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right) \\ &= \operatorname{grad}(u_i h_j h_k) \cdot \left( \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \right), \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

dove abbiamo usato le (4.2.15) e le (4.2.16).

Ma per la (4.2.13),

$$\operatorname{grad}(u_i h_j h_k) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(u_i h_j h_k)}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(u_i h_j h_k)}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(u_i h_j h_k)}{\partial q_3} \vec{e}_3.$$

Poichè i versori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sono ortonormali, l'equazione (4.2.19) si riduce a

$$\operatorname{div}(u_i \vec{e}_i) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(u_i h_j h_k)}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

e con  $(i, j, k)$  permutazioni cicliche. Sostituendo nella (4.2.18) per  $i=1, 2, 3$  otteniamo

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \quad (4.2.20)$$

che esprime la **divergenza di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee**  $(q_1, q_2, q_3)$ .

Se  $\vec{u} = \text{grad } F$ , dove  $F$  è un campo scalare dotato di gradiente secondo in  $\widehat{S}$ , per le (4.2.13) e (4.2.20), otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \text{div grad } F = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

che esprime il **laplaciano di un campo scalare nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee**  $(q_1, q_2, q_3)$ .

Ricaviamo poi l'espressione del rotore di un campo vettoriale  $\vec{u}$  differenziabile in  $\widehat{S}$  in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Tenendo presente che la sua rappresentazione analitica in termini della base locale  $(\vec{e}_i)$  è la seguente

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3,$$

otteniamo:

$$\text{rot } \vec{u} = \text{rot}(u_1 \vec{e}_1) + \text{rot}(u_2 \vec{e}_2) + \text{rot}(u_3 \vec{e}_3) \quad (4.2.22)$$

dove possiamo scrivere:

$$u_i \vec{e}_i = (u_i h_i) \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Per una proprietà del rotore e per la (4.2.14) ricaviamo:

$$\text{rot}(u_i \vec{e}_i) = \text{grad}(u_i h_i) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i} + (u_i h_i) \text{rot} \left( \frac{\vec{e}_i}{h_i} \right) = \text{grad}(u_i h_i) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i}. \quad (4.2.23)$$

D'altra parte

$$\text{grad}(u_i h_i) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(u_i h_i)}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(u_i h_i)}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(u_i h_i)}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad i = 1, 2, 3.$$

Quindi calcolando il prodotto vettoriale che compare nella (4.2.23) per  $i = 1, 2, 3$  e tenendo presente che  $(\vec{e}_i)$  è una base ortonormale destra, troviamo:

$$\text{rot}(u_1 \vec{e}_1) = -\frac{\vec{e}_3}{h_2 h_1} \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3};$$



$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(u_2 \vec{e}_2) &= \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\vec{e}_1}{h_3 h_2} \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3}; \\ \operatorname{rot}(u_3 \vec{e}_3) &= -\frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2}.\end{aligned}$$

Sostituendo nel secondo membro della (4.2.22) si ottiene infine:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{u} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \vec{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \vec{e}_3.\end{aligned}\quad (4.2.24)$$

La (4.2.24) fornisce l'espressione del **rotore di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee**  $(q_1, q_2, q_3)$

La (4.2.24) può essere anche scritta facendo uso di un determinante simbolico:

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ u_1 h_1 & u_2 h_2 & u_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (4.2.25)$$

Ricaviamo infine l'espressione del laplaciano di un campo vettoriale in un sistema di coordinate curvilinee.

Sia dato il campo vettoriale  $\vec{u}$  che supponiamo di classe  $\mathcal{C}^2$  in  $\widehat{S}$ .

Per calcolarne il laplaciano in coordinate curvilinee ortogonali, ricordiamo che, per una proprietà del laplaciano, possiamo scrivere:

$$\Delta \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Poichè sappiamo come vengono espresse in coordinate curvilinee ortogonali le componenti del gradiente di un campo scalare e le componenti del rotore di un campo vettoriale, in primo luogo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{u})_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (\operatorname{div} \vec{u}) - \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} [h_3 (\operatorname{rot} \vec{u})_3] - \frac{\partial}{\partial q_3} [h_2 (\operatorname{rot} \vec{u})_2] \right\} \\ (\Delta \vec{u})_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (\operatorname{div} \vec{u}) - \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} [h_1 (\operatorname{rot} \vec{u})_1] - \frac{\partial}{\partial q_1} [h_3 (\operatorname{rot} \vec{u})_3] \right\} \\ (\Delta \vec{u})_3 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (\operatorname{div} \vec{u}) - \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [h_2 (\operatorname{rot} \vec{u})_2] - \frac{\partial}{\partial q_2} [h_1 (\operatorname{rot} \vec{u})_1] \right\}.\end{aligned}$$

Se ora teniamo presenti la (4.2.20) e la (4.2.24), le relazioni precedenti forniscono:

$$\begin{aligned}
(\Delta \vec{u})_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
&- \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} + \\
&+ \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} \quad (4.2.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \vec{u})_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
&- \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
&+ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} \quad (4.2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \vec{u})_3 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\
&- \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} + \\
&+ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\}. \quad (4.2.28)
\end{aligned}$$

Le (4.2.26), (4.2.27), (4.2.28) rappresentano **le componenti del laplaciano di un campo vettoriale nel sistema ortogonale di coordinate curvilinee**  $(q_1, q_2, q_3)$ .

### 4.3 Equazioni di Navier-Stokes in diversi sistemi di coordinate curvilinee

Ora vogliamo, attraverso le formule ricavate nel paragrafo precedente, scrivere le equazioni di Navier-Stokes dapprima in un generico sistema ortogonale di coordinate curvilinee e poi in particolare in coordinate cilindriche e sferiche.

Ci limitiamo a considerare un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo per cui il suo moto è governato dalle due equazioni seguenti

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad } p \quad (4.3.1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (4.3.2)$$

La prima è l'equazione di Navier-Stokes vettoriale e la seconda è la condizione di incomprimibilità.  $\rho$  e  $\mu$  sono costanti positive.

Supponiamo che il fluido si muova in una regione in cui sia fissato un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Ci proponiamo di scrivere la (4.3.2) e le componenti della (4.3.1) facendo intervenire le rappresentazioni analitiche dei campi  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\vec{F}$  nel sistema di coordinate curvilinee. Come in precedenza, denotiamo tali rappresentazioni analitiche e le loro componenti senza aggiungere l'asterisco come apice.

Se  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  è la base ortonormale locale associata al sistema di coordinate curvilinee nel generico punto della regione occupata dal fluido, avremo

$$\begin{aligned} \vec{v}(q_1, q_2, q_3, t) &= v_1(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_1 + v_2(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_2 + v_3(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_3, \\ p &= p(q_1, q_2, q_3, t), \\ \vec{F}(q_1, q_2, q_3, t) &= F_1(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_1 + F_2(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_2 + F_3(q_1, q_2, q_3, t) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la (4.3.2), si scrive immediatamente tenendo presente quanto ottenuto nel paragrafo precedente (equazione (4.2.20))

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] = 0. \quad (4.3.3)$$

Occupiamoci ora della (4.3.1).

Ricordiamo che per definizione di derivata materiale rispetto al tempo di un campo spaziale, si ha

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (4.3.4)$$

e vediamo di esprimere in una forma più conveniente il termine  $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}$  che compare nella (4.3.4). Si può dimostrare la seguente relazione:

$$\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v}.$$

Dunque la (4.3.4), grazie a tale risultato, fornisce

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v}.$$

Tenendo presente come si esprime in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali il gradiente di un campo scalare otteniamo

$$\left( \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} \right)_i = \frac{1}{h_i} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_i} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_i} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

Come abbiamo visto, le tre componenti di  $\text{rot } \vec{v}$  sono:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \\ (\text{rot } \vec{v})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \\ (\text{rot } \vec{v})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned}$$

Se ricordiamo che  $(\vec{e}_i)$  è una base destra, avremo

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_1 &= (\text{rot } \vec{v})_2 v_3 - (\text{rot } \vec{v})_3 v_2 \\ &= \frac{v_3}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] - \frac{v_2}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right], \\ (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_2 &= (\text{rot } \vec{v})_3 v_1 - (\text{rot } \vec{v})_1 v_3 \\ &= \frac{v_1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] - \frac{v_3}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right], \\ (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v})_3 &= (\text{rot } \vec{v})_1 v_2 - (\text{rot } \vec{v})_2 v_1 \\ &= \frac{v_2}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] - \frac{v_1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right]. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo membro della (4.3.1) i termini  $\rho \vec{F}$  e  $\text{grad } p$  non presentano problemi, così come  $\Delta \vec{v}$ , poichè nel paragrafo precedente abbiamo visto quale forma assumono in coordinate curvilinee ortogonali le componenti del laplaciano di un campo vettoriale.

A questo punto, sfruttando tutti i risultati ottenuti, siamo in grado di scrivere in componenti l'equazione di Navier-Stokes in un qualsiasi sistema di coordinate curvilinee ortogonali. Precisamente abbiamo:

**componente rispetto al vettore di base  $\vec{e}_1$**

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\rho}{h_1} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) + \rho \frac{v_3}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] + \\ &- \rho \frac{v_2}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] = \\ &= \rho F_1 + \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\ &- \frac{\mu}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\mu}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

componente rispetto al vettore di base  $\vec{e}_2$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\rho}{h_2} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_2} \right) + \rho \frac{v_1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] + \\ & - \rho \frac{v_3}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] = \\ & = \rho F_2 + \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\ & - \frac{\mu}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\ & + \frac{\mu}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \right\} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial q_2}, \end{aligned}$$

componente rispetto al vettore di base  $\vec{e}_3$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \frac{1}{h_3} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_3} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_3} \right) + \rho \frac{v_2}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] + \\ & - \rho \frac{v_1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] = \\ & = \rho F_3 + \frac{\mu}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \\ & - \frac{\mu}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \right\} + \\ & + \frac{\mu}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \right\} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial q_3}. \end{aligned}$$

Particolarizziamo ora i risultati trovati nel caso delle coordinate cilindriche e delle coordinate sferiche, richiamando prima quelli relativi alle coordinate cartesiane ortonormali.

### Coordinate cartesiane

1. Versori:

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

2. Vettore posizione  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

3. Vettore velocità  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

4. Gradiente del campo scalare  $F$ :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

5. Laplaciano del campo scalare  $F$ :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

7. Rotore del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

8. Laplaciano del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

8. Condizione di incomprimibilità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

10. Equazioni di Navier-Stokes (con  $\rho, \mu = \text{costanti} > 0$ ):

$$\begin{aligned} x : \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho F_x + \mu \Delta v_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ y : \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho F_y + \mu \Delta v_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ z : \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z + \mu \Delta v_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

### Coordinate cilindriche

1. Versori:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1\end{aligned}$$

2. Vettore posizione  $\vec{r}^*$ :

$$\vec{r}^* = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

3. Vettore velocità  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$$

4. Gradiente del campo scalare  $F$ :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

5. Laplaciano del campo scalare  $F$ :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

7. Rotore del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(v_\varphi r) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

8. Laplaciano del campo vettoriale  $\vec{v}$ .

Per quanto riguarda il laplaciano di  $\vec{v}$ , il calcolo non è così immediato come per gli altri operatori.

Se teniamo presenti le espressioni ottenute per le componenti di  $\Delta \vec{v}$  in un

generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali, deduciamo:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \\
 &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} \\
 &= \Delta v_r - \frac{1}{r^2} \left[ v_r + 2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi \partial z} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \\
 &= \Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2} \left[ v_\varphi - 2 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta \vec{v})_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial v_r}{\partial z} - r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial z} \right] \\
 &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi \partial z} \\
 &= \Delta v_z
 \end{aligned}$$

9. Condizione di incomprimibilità:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$



10. Equazioni di Navier-Stokes (con  $\rho, \mu = \text{costanti}$ ):

$$\begin{aligned}
 r : \rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \left( v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi^2 \right) \right] &= \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\
 + \mu \left[ \Delta v_r - \frac{1}{r^2} \left( v_r + 2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 \varphi : \rho \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left( v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r v_\varphi \right) \right] &= \\
 = \rho F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[ \Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2} \left( v_\varphi - 2 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 z : \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z.
 \end{aligned}$$

### Coordinate sferiche

1. Versori:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\
 \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\
 \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\
 h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta
 \end{aligned}$$

2. Vettore posizione  $\vec{r}^*$ :

$$\vec{r}^* = r \vec{e}_r$$

3. Vettore velocità  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

4. Gradiente del campo scalare  $F$ :

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

5. Laplaciano del campo scalare  $F$ :

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

6. Divergenza del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi r) \right],$$

che si può scrivere nella forma:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

7. Rotore del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta r) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

8. Laplaciano del campo vettoriale  $\vec{v}$ :

Procedendo come nel calcolo di  $\Delta \vec{v}$  per le coordinate cilindriche si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \left[ \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_r + \\ &+ \left[ \Delta v_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( v_\theta + 2 \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \left[ \Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( v_\varphi - 2 \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - 2 \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

9. Condizione di incomprimibilità

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0,$$

10. Equazioni di Navier-Stokes (con  $\rho, \mu = \text{costanti}$ ):

$$\begin{aligned} r: \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) &= \\ = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ \theta: \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) &= \\ = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( v_\theta + 2 \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ \varphi: \rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) &= \\ = \rho F_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[ \Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( v_\varphi - 2 \cos \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - 2 \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Esercizio 1.** Determinare gradiente e laplaciano sia in coordinate cartesiane ortonormali che in coordinate cilindriche del campo scalare  $F = F(P)$  definito in  $\mathcal{E}$  la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane è data da:

$$F^0(x, y, z) = x^2 + y^2 + z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

*Risposta:*

in coordinate cartesiane

$$\text{grad } F = 2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) + \vec{e}_z, \quad \Delta F = 4$$

in coordinate cilindriche

$$\text{grad } F = 2r \vec{e}_r + \vec{e}_z, \quad \Delta F = 4.$$

**Esercizio 2.** Determinare divergenza, rotore e laplaciano sia in coordinate cartesiane ortonormali che in coordinate cilindriche del campo vettoriale  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  definito in  $\mathcal{E}$  la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane è data da:

$$\vec{v}^0(x, y, z) = (x^2 + y^2) \vec{e}_x + z \vec{e}_z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

*Risposta:*

in coordinate cartesiane

$$\text{div } \vec{v} = 2x + 1, \quad \text{rot } \vec{v} = -2y \vec{e}_z, \quad \Delta \vec{v} = 4 \vec{e}_x$$

in coordinate cilindriche

$$\text{div } \vec{v} = 2r \cos \varphi + 1, \quad \text{rot } \vec{v} = -2r \sin \varphi \vec{e}_z, \quad \Delta \vec{v} = 4(\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi).$$



# Capitolo 5

## Moti di Poiseuille e di Couette per un fluido newtoniano incomprimibile

### 5.1 Premesse.

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario dal punto di vista meccanico per cui

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad S(t) = S, \quad \vec{v} = \vec{v}(P), \quad \vec{F} = \vec{F}(P), \quad p = p(P).$$

Poiché  $\vec{v}$  non dipende da  $t$ , si ha:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Allora il moto stazionario di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo è governato dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (5.1.1)$$

Nelle equazioni scritte sopra non compare il tempo e dunque al sistema non associamo condizioni iniziali, ma solo condizioni al contorno.

Se assumiamo che  $\partial S$  sia composto da pareti materiali rigide, possiamo imporre la condizione di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{V}, \quad (5.1.2)$$

con  $\vec{V} = \vec{V}(P)$  atto di moto delle pareti che costituiscono  $\partial S$ .

Risolvere il problema al contorno (5.1.1), (5.1.2) significa determinare le coppie  $(\vec{v}, p)$  dove  $\vec{v}$  e  $p$  sono campi definiti su  $S$ ,  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ ,  $(\vec{v}, p)$  è soluzione del sistema (5.1.1) e  $\vec{v}$  soddisfa alla condizione al contorno (5.1.2). In effetti, pur rimanendo nell'ambito delle soluzioni classiche, le condizioni di regolarità su  $\vec{v}$  e  $p$  possono essere indebolite, ma su ciò per il momento non insistiamo.

Se la geometria della regione  $S$  è particolarmente semplice è possibile determinare soluzioni esatte del problema (5.1.1), (5.1.2).

Nei paragrafi successivi ne vedremo alcuni esempi.

## 5.2 Moto di Poiseuille tra due piani paralleli.

Sia dato un fluido newtoniano, incompressibile ed omogeneo che occupa la regione compresa tra due piani  $\Pi_1, \Pi_2$  paralleli, rigidi, fissi rispetto ad un osservatore (vedi Figura 5.1).

Supponiamo che sul fluido non agiscano forze esterne di massa e che nella regione  $S$  compresa tra i due piani, occupata dal fluido, il moto sia stazionario dal punto di vista meccanico.

Le equazioni che governano tale moto sono dunque:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \quad (5.2.1)$$

con le condizioni al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = \vec{0}. \quad (5.2.2)$$

Sia  $2h$  la distanza tra i due piani con  $h$  costante positiva, e il riferimento associato all'osservatore sia quello in Figura 5.1: l'origine  $O$  è un punto equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  è parallelo ai due piani,  $Ox_2$  normale ai due piani e  $Ox_3$  orientato di conseguenza. Si ha perciò:

$$\Pi_\alpha = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h \right\} \quad \alpha = 1, 2.$$

Inoltre:

$$S = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h] \right\}.$$

Un **moto di Poiseuille** (stazionario) tra i due piani è una soluzione  $(\vec{v}, p)$  del problema (5.2.1), (5.2.2) tale che  $\vec{v}$  è parallelo ad  $\vec{e}_1$  ed ha la rappresentazione

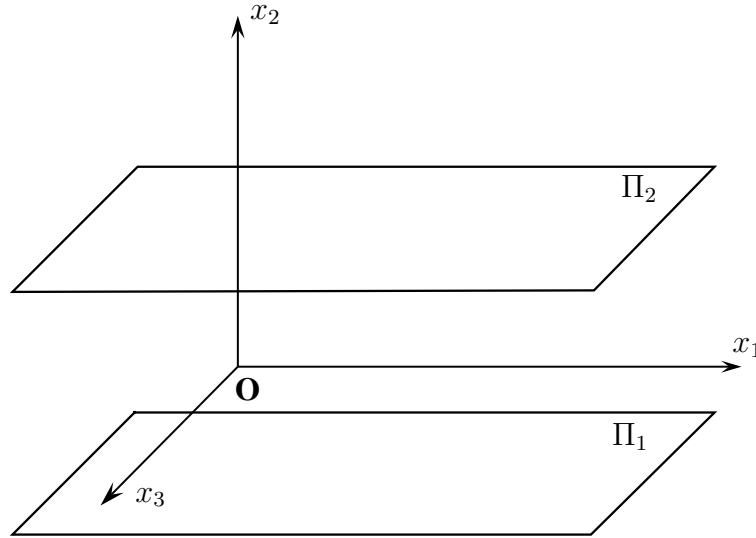


Figura 5.1: Geometria del problema

analitica indipendente da  $x_3$ .  
Dunque richiediamo che

$$\vec{v}(P) = v_1(P) \vec{e}_1, \quad \forall P \in S$$

e

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{v}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S). \quad (5.2.3)$$

Quindi cerchiamo una soluzione  $(\vec{v}, p)$  del problema (5.2.1), (5.2.2) tale che la rappresentazione analitica della velocità sia data da:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

A priori non facciamo alcuna ipotesi sulla pressione, per cui la sua rappresentazione analitica è

$$p = p(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

Scriviamo ora le equazioni del moto del fluido per componenti ed in termini di rappresentazioni analitiche, senza tenere conto, per il momento, delle condizioni imposte a  $\vec{v}$ . Abbiamo in  $\xi(S)$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j &= \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Dalla quarta equazione delle (5.2.4), tenendo conto che:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

deduciamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{in } \xi(S).$$

Dunque deve essere

$$\vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1,$$

con  $v_1(x_2)$  definita in  $[-h, h]$ .

Ora riconsideriamo le tre equazioni (5.2.4) che, per la forma della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$ , si riducono a:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}; \\ i = 2 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}; \\ i = 3 & \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza equazione discende che  $p$  non dipende da  $x_2$  e  $x_3$ , e quindi  $p = p(x_1)$ , con  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

Alla luce di questa osservazione consideriamo allora la prima equazione.

Otteniamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti e il primo membro dell'equazione scritta sopra è una funzione solo di  $x_2$ , mentre il secondo membro è funzione solo di  $x_1$ , affinché l'equazione sia soddisfatta  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$  è necessario che i due membri siano uguali ad una stessa costante, che indichiamo con  $-C$ , con  $C = \text{costante}$ .

Avremo dunque:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

da cui otteniamo le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$



A questo punto distinguiamo due casi:

1)  $C = 0$

Abbiamo allora:

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 \quad \text{in } \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria.

Inoltre deduciamo:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv_1}{dx_2} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Per determinare i valori di queste due costanti, imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(-h) = 0, \\ \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0} & \Longrightarrow & \quad v_1(h) = 0, \end{aligned}$$

per cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1 h + C_2 \\ 0 &= C_1 h + C_2. \end{aligned}$$

Sottraendo e sommando membro a membro queste due equazioni, deduciamo:

$$\begin{aligned} 2 C_1 h &= 0 & \Longrightarrow & \quad C_1 = 0 \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$p = p_0, \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

La pressione è costante e il fluido è in quiete.

2)  $C \neq 0$

Innanzitutto integriamo l'equazione cui soddisfa  $p$ :

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \Longrightarrow \quad p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria.

E' interessante vedere qual è il significato fisico della costante  $C$ .

Consideriamo i due piani di equazione  $x_1 = a$  e  $x_1 = a + 1$ , con  $a$  costante arbitraria e siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  le intersezioni di  $S$  con tali piani.

Poichè  $p = p(x_1)$ , su  $\Sigma_1$  la pressione  $p$  assume un valore costante, e così pure su  $\Sigma_2$ . Se  $p_1$  e  $p_2$  individuano rispettivamente questi due valori costanti, si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= -C a + p_0 \\ p_2 &= -C (a + 1) + p_0, \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$p_1 - p_2 = C.$$

Dunque  $C$  viene a rappresentare la differenza di pressione fra i punti di due sezioni di  $S$  normali a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  e a distanza unitaria l'una dall'altra. Per questo motivo  $C$  è chiamato *salto di pressione*.

Andando ora a integrare la seconda equazione otteniamo:

$$\frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{C}{\mu} x_2 + C_1 \implies v_1 = -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie.

Come prima, per determinare le costanti  $C_1$  e  $C_2$ , sfruttiamo le condizioni al contorno:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0,$$

e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 - C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = -h, \\ 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = h. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione la prima, deduciamo:

$$2 C_1 h = 0 \implies C_1 = 0.$$

Andando a sostituire nella prima equazione, abbiamo:

$$0 = -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_2.$$

In definitiva otteniamo:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h]. \quad (5.2.5)$$

La velocità dunque viene ad avere un andamento parabolico. Se  $C > 0$  la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, se  $C < 0$ , la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. In ogni caso il vertice  $V$  della parabola ha ascissa  $x_{V2} = 0$ .

**Osservazione 5.1.** Si osservi che in corrispondenza di ogni valore fissato del salto di pressione  $C$  si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 5.1.** *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille tra due piani paralleli rigidi e fissi è possibile solo se è presente un salto per la pressione  $C \neq 0$  nella direzione  $Ox_1$  (parallela ai piani) e precisamente si ha:*

$$p(x_1) = -Cx_1 + p_0 \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h].$$

Se  $C = 0$ , la pressione è costante e il fluido resta in quiete.

Forniamo ora il grafico di  $v_1(x_2)$  assegnando opportuni valori numerici, fisicamente significativi, ai parametri che compaiono nella (5.2.5).

Assumiamo che il liquido reale, che rappresentiamo con il modello di fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, sia il mercurio liquido a temperatura ambiente.

Il suo coefficiente di viscosità  $\mu$  è dato da:

$$\mu = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

Per  $C$  scegliamo i valori seguenti:

$$C = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}, \quad C = -6,4 \cdot 10^{-3} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}.$$

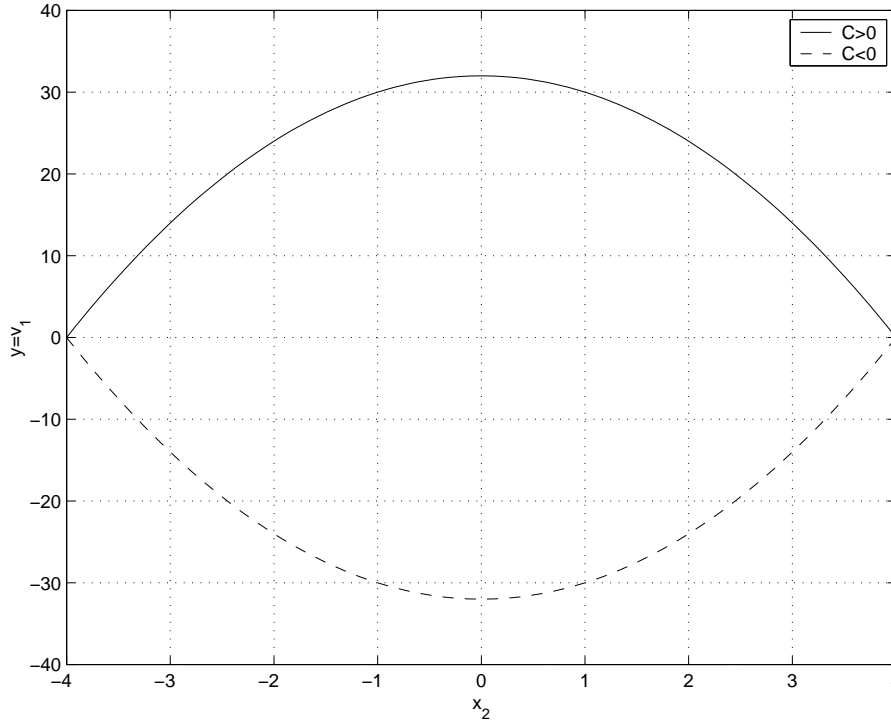
Inoltre assumiamo  $h = 4\text{m}$ . Nel primo caso si ha

$$v_1(x_2) = -2x_2^2 + 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4],$$

mentre nel secondo

$$v_1(x_2) = 2x_2^2 - 32 \quad , \quad x_2 \in [-4, 4].$$

I grafici di  $v_1$ , nei due casi, sono riportati nella Figura 5.2.

Figura 5.2: Andamento di  $v_1(x_2)$ 

Può essere interessante vedere che espressione assumono le componenti del tensore degli sforzi di Cauchy, tenendo conto che il fluido è newtoniano ed incompressibile per cui:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu\tilde{D}.$$

Poiché  $\vec{v}$  ha le componenti tutte nulle tranne  $v_1$  e  $v_1 = v_1(x_2)$ , allora le componenti di  $\tilde{D}$  sono tutte nulle tranne:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2.$$

Siamo ora in grado di scrivere le componenti di  $\tilde{T}$ , tenendo conto che in generale

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}.$$

In conclusione otteniamo:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = C x_1 - p_0, \\ T_{12} &= T_{21} = 2\mu D_{12} = -2\mu \frac{C}{2\mu} x_2 = -C x_2. \end{aligned}$$

Le altre componenti sono nulle.

Se andiamo a scrivere la matrice  $[T_{ij}]$  associata a  $\tilde{T}$ , abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 & 0 \\ -Cx_2 & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo anche vedere quale forma assume, per il moto di Poiseuille, la trazione superficiale  $\vec{f}$  nei punti di  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Cominciamo a considerare quanto avviene nei punti del secondo piano.

$$\vec{f} \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{n}) \Big|_{\Pi_2} = \vec{T}(\vec{e}_2) \Big|_{\Pi_2} = \tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_2}$$

poiché il versore  $\vec{n}$  normale a  $\Pi_2$  rivolto verso l'esterno di  $S$  è  $\vec{e}_2$ .

In generale  $(\tilde{T} \cdot \vec{u})_i = T_{ij} u_j$ ; pertanto, con  $\vec{u} = \vec{e}_2$  abbiamo:

$$f_i \Big|_{\Pi_2} = T_{i2} \Big|_{\Pi_2} \quad i = 1, 2, 3.$$

Otteniamo dunque:

$$f_1 \Big|_{\Pi_2} = T_{12} \Big|_{\Pi_2} = -Ch,$$

componente che rappresenta uno sforzo di taglio, essendo parallela a  $\Pi_2$ ;

$$f_2 \Big|_{\Pi_2} = T_{22} \Big|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0,$$

componente che rappresenta uno sforzo normale;

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0,$$

componente nulla che rappresenta uno sforzo di taglio.

Analogamente possiamo determinare  $\vec{f} \Big|_{\Pi_1} = -\tilde{T} \cdot \vec{e}_2 \Big|_{\Pi_1}$ .

Avremo:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -Ch = f_1 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0 = -f_2 \Big|_{\Pi_2},$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = 0 = f_3 \Big|_{\Pi_2}.$$

### 5.3 Moto di Couette tra due piani paralleli.

Supponiamo di avere ancora un fluido viscoso classico incompressibile ed omogeneo, in assenza di forze di massa, che si muove di moto stazionario. La regione occupata sia ancora quella compresa tra due piani rigidi e paralleli, dei quali  $\Pi_1$  sia fisso rispetto all'osservatore, mentre  $\Pi_2$  si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità  $\vec{V}$  parallela al piano stesso.

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  avente l'origine  $O$  equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  parallelo e concorde con  $\vec{V}$ , l'asse  $Ox_2$  normale ai due piani per cui l'asse  $Ox_3$  risulta parallelo ai piani (Vedi Figura 5.1).

Con tale scelta si ha:

$$\vec{V} = V \vec{e}_1 \quad \text{con } V = \text{costante} > 0.$$

Un **moto di Couette** tra i due piani è costituito da ogni coppia  $(\vec{v}, p)$  che sia soluzione del sistema (5.2.1), con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che  $\vec{v}$  soddisfi alla condizione al contorno di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1, \quad (5.3.1)$$

ed abbia la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1.$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo visto per il moto di Poiseuille tra due piani, otteniamo che, per la condizione di incompressibilità,  $v_1$  dipende solo da  $x_2$ , che  $p$  dipende solo da  $x_1$  e che le due funzioni  $p(x_1)$  e  $v_1(x_2)$  soddisfano alle due equazioni differenziali ordinarie :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

A questo punto, come per il moto di Poiseuille, distinguiamo due casi.

1)  $C = 0$

Deduciamo

$$p(x_1) = p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1(x_2) = C_1x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove  $p_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  sono costanti arbitrarie. Le due costanti  $C_1$  e  $C_2$  si determinano dalle condizioni di aderenza (5.3.1) che forniscono

$$v_1(-h) = 0 \quad v_1(h) = V. \quad (5.3.2)$$

Come si verifica facilmente si ottiene

$$C_1 = \frac{V}{2h}, \quad C_2 = \frac{V}{2}$$

per cui

$$v_1(x_2) = \frac{V}{2h}(x_2 + h) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Dunque, a differenza di quanto avviene nel caso di Poiseuille, quando la pressione è costante, il fluido non resta in quiete e  $v_1(x_2)$  cresce linearmente da 0 a  $V$ .

## 2) $C \neq 0$

Precisamente, come nel moto di Poiseuille,

$$\begin{aligned} p(x_1) &= -Cx_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \\ v_1(x_2) &= -\frac{C}{2\mu}x_2^2 + C_1x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h], \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

dove  $C$  rappresenta il salto di pressione nella direzione  $Ox_1$ ,  $p_0$  è una costante arbitraria inessenziale, mentre  $C_1$ ,  $C_2$  sono costanti arbitrarie da determinarsi sfruttando le condizioni al contorno (5.3.2).

Imponendo tali condizioni otteniamo:

$$-\frac{C}{2\mu}h^2 - C_1h + C_2 = 0$$

dalla prima e

$$-\frac{C}{2\mu}h^2 + C_1h + C_2 = V$$

dalla seconda.

Sottraendo membro a membro dalla seconda relazione la prima si deduce:

$$2C_1h = V \quad \implies \quad C_1 = \frac{V}{2h}.$$

Se si sostituisce tale risultato in una delle due relazioni ottenute dalle condizioni al contorno abbiamo:

$$C_2 = \frac{C}{2\mu}h^2 + \frac{V}{2}.$$

In conclusione l'espressione di  $v_1(x_2)$  è la seguente:

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + \frac{V}{2h} x_2 + \frac{C}{2\mu} h^2 + \frac{V}{2} \\ &= \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned}$$

Facciamo alcune osservazioni.

**Osservazione 5.2.** Il moto di Poiseuille si ottiene come caso particolare del moto di Couette ponendo  $V = 0$ .

**Osservazione 5.3.** Ad ogni salto di pressione  $C$  corrisponde uno ed un solo moto di Couette.

**Osservazione 5.4.** Se  $C \neq 0$  l'andamento di  $v_1(x_2)$  è sempre parabolico, ma si differenzia da quello che si ha nel moto di Poiseuille.

Se  $C > 0$  la concavità della parabola è rivolta verso il basso e l'ascissa del vertice, che nel moto di Poiseuille è nulla, è data da

$$x_{V2} = \frac{\mu V}{2hC} > 0.$$

Vediamo se  $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$ . Tale condizione si verifica se

$$\frac{\mu V}{2hC} < h \implies \frac{\mu V}{2h^2} < C.$$

Otteniamo perciò che l'ascissa del vertice della parabola è interna all'intervallo  $[-h, h]$  se  $C > \frac{\mu V}{2h^2}$ .

Dunque se  $C > \frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo e poi decresce sino al valore  $V$ , mentre se  $0 < C \leq \frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  è sempre crescente da 0 a  $V$ .

Se  $C < 0$  la concavità della parabola è rivolta verso l'alto e l'ascissa del vertice, data da  $\frac{\mu V}{2hC}$ , è negativa. In tal caso  $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$  se

$$\frac{\mu V}{2hC} > -h \quad \text{ossia se} \quad \frac{\mu V}{2h^2} < -C \implies C < -\frac{\mu V}{2h^2}.$$

Dunque se  $C < -\frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  decresce da 0 sino a raggiungere il valore minimo e poi cresce sino al valore  $V$ , mentre se  $-\frac{\mu V}{2h^2} \leq C < 0$ ,



$v_1(x_2)$  è sempre crescente dal valore 0 al valore  $V$ .

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 5.2.** *Dato un fluido viscoso newtoniano incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Couette tra due piani paralleli, di cui uno fisso e l'altro in moto traslatorio rettilineo uniforme in una direzione parallela al piano stesso, è dato dalla coppia  $(\vec{v}, p)$  tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove l'asse  $Ox_1$  ha la direzione della velocità  $\vec{V}$  del piano in moto e la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ .

Rappresentiamo ora graficamente  $v_1(x_2)$ , per diversi valori numerici dei parametri che intervengono nella sua espressione.

Come nel paragrafo precedente, prendiamo in esame il caso del mercurio liquido, con  $h = 4 \text{ m}$  e  $V = 16 \text{ m s}^{-1}$ .

Consideriamo i quattro possibili sottocasi che si possono verificare:

1)  $C > \frac{\mu V}{2h^2} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$ .

Assumiamo  $C = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -2x_2^2 + 2x_2 + 40$ .

2)  $0 < C \leq 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$

Prendiamo  $C = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = -0,1x_2^2 + 2x_2 + 9,6$ .

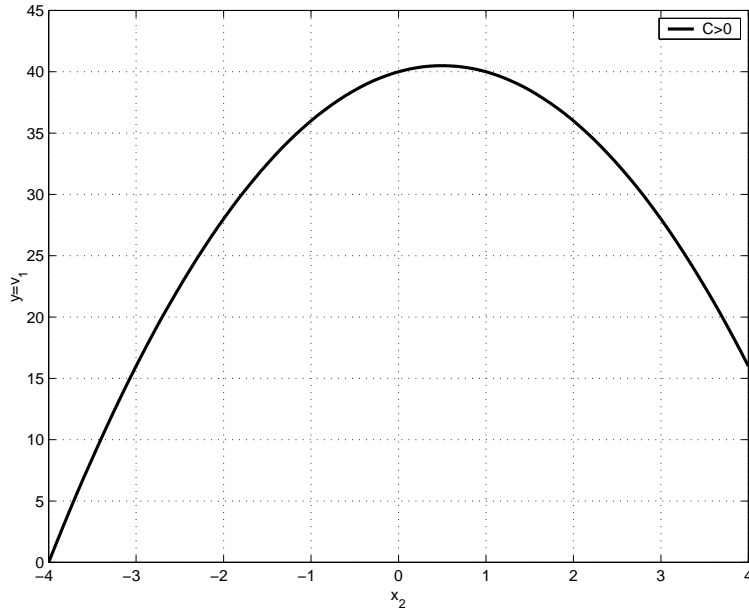
3)  $C < \frac{\mu V}{2h^2} = -0,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}$

Scegliamo  $C = -3,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = x_2^2 + 2x_2 - 8$ .

4)  $-\frac{\mu V}{2h^2} = -0,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \leq C < 0$

Prendiamo  $C = -0,32 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \implies v_1(x_2) = 0,1x_2^2 + 2x_2 + 6,4$ .

I relativi grafici sono riportati nelle Figure 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

Figura 5.3: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 1)

Determiniamo ora il tensore degli sforzi di Cauchy come abbiamo fatto per il moto di Poiseuille.

Tenendo presente che le uniche componenti non nulle del tensore  $\tilde{D}$  sono:

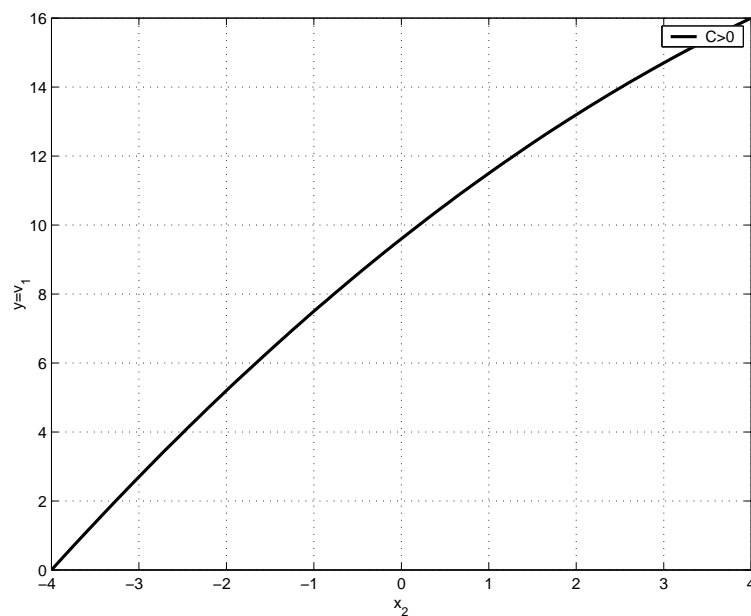
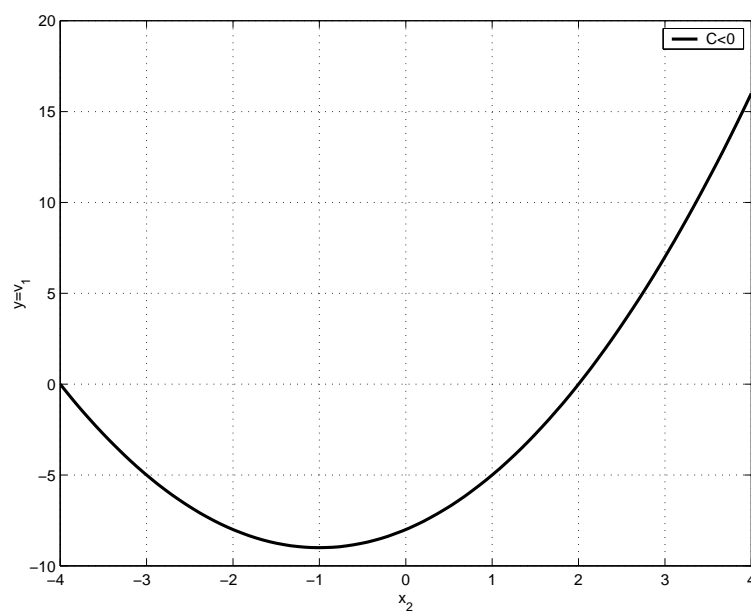
$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{1}{2} \frac{C}{\mu} x_2 + \frac{V}{4h},$$

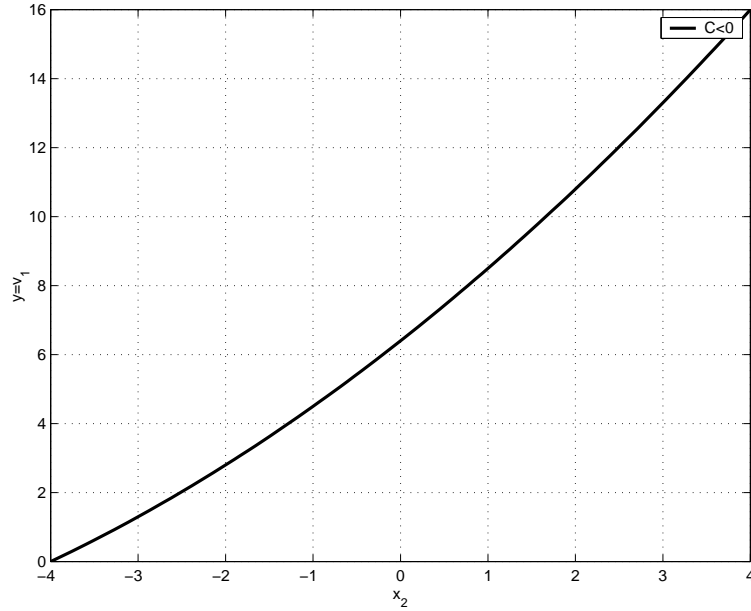
per la matrice  $[T_{ij}]$  associata a  $\tilde{T}$  abbiamo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} Cx_1 - p_0 & -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & 0 \\ -Cx_2 + \frac{\mu V}{2h} & Cx_1 - p_0 & 0 \\ 0 & 0 & Cx_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Può essere interessante anche determinare  $\vec{f}|_{\Pi_1}$ ,  $\vec{f}|_{\Pi_2}$ . Ricordando quanto visto per il moto di Poiseuille, deduciamo che le tre componenti di  $\vec{f}|_{\Pi_2}$  sono date da:

$$f_1|_{\Pi_2} = T_{12}|_{\Pi_2} = -Ch + \frac{\mu V}{2h}$$

Figura 5.4: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 2)Figura 5.5: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 3)

Figura 5.6: Andamento di  $v_1(x_2)$  nel Caso 4)

$$f_2 \Big|_{\Pi_2} = T_{22} \Big|_{\Pi_2} = Cx_1 - p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_2} = T_{32} \Big|_{\Pi_2} = 0.$$

Analogamente per  $\vec{f} \Big|_{\Pi_1}$  si ottiene:

$$f_1 \Big|_{\Pi_1} = -T_{12} \Big|_{\Pi_1} = -Ch - \frac{\mu V}{2h}$$

$$f_2 \Big|_{\Pi_1} = -T_{22} \Big|_{\Pi_1} = -Cx_1 + p_0$$

$$f_3 \Big|_{\Pi_1} = -T_{32} \Big|_{\Pi_1} = 0.$$

## 5.4 Moto di Poiseuille in un cilindro illimitato.

Consideriamo il moto stazionario di un fluido viscoso classico incompressibile che occupi un cilindro illimitato la cui superficie laterale sia rigida e fissa rispetto all'osservatore.

Un fluido incompressibile occupante un cilindro illimitato può schematizzare un liquido in moto entro un condotto cilindrico con sezione trasversale di dimensioni

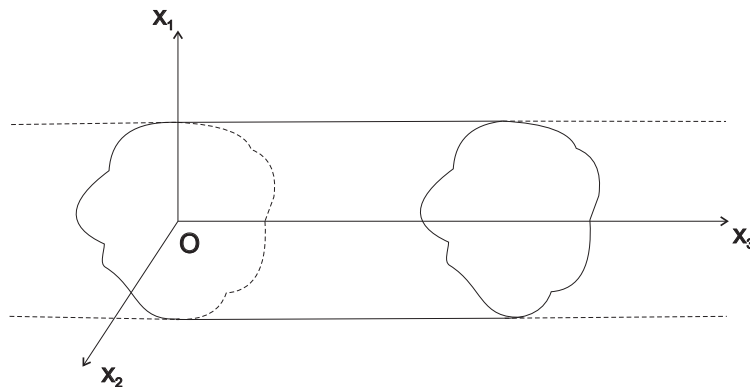


Figura 5.7: Geometria del problema

molto piccole rispetto alla lunghezza del condotto stesso.

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale con l'origine  $O$  appartenente ad una sezione trasversale del cilindro, gli assi  $Ox_1$  e  $Ox_2$  nel piano della sezione, l'asse  $Ox_3$  diretto come le generatrici del cilindro. Dunque la regione  $S$  occupata dal fluido risulta data da:

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_2) \in D, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove  $D$  assumiamo che sia la chiusura di un dominio regolare (e dunque limitato) di  $\mathbb{R}^2$ .

Avremo perciò:  $\xi(S) = D \times \mathbb{R}$ .

Può essere utile introdurre la seguente notazione: denotiamo con  $\Sigma(z)$  la sezione del cilindro giacente sul piano  $x_3 = z$  con  $z$  costante. Notiamo comunque che, essendo  $S$  un cilindro, tutte le sue sezioni trasversali sono congruenti e che  $\xi(\Sigma(z)) = D \times \{z\}$ .

Prima di definire il moto di Poiseuille nel cilindro premettiamo il seguente risultato:

**Proposizione 5.1.** *Considerato un fluido viscoso classico incomprimibile in moto stazionario nel cilindro  $S$  definito sopra, il flusso del campo della velocità  $\vec{v}$  attraverso le sezioni trasversali del cilindro è costante, ossia:*

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \int_{\Sigma(z)} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 d\Sigma = \Phi,$$

dove  $\Phi$  è costante.

Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che, essendo il fluido incompressibile, si ha

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } S \quad (5.4.1)$$

e che vale la condizione al contorno di aderenza

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{0}, \quad (5.4.2)$$

essendo la superficie laterale del cilindro rigida e fissa. Consideriamo ora le due sezioni trasversali del cilindro  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  giacenti sui piani  $x_3 = z_1$  e  $x_3 = z_2$  rispettivamente (con ad esempio  $z_1 < z_2$ ) ed indichiamo con  $S^*$  la porzione (chiusa) di cilindro compresa tra  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Si può verificare facilmente che  $S^*$  è la chiusura di un dominio regolare.

Per la (5.4.1) e il teorema della divergenza si ha:

$$0 = \int_{S^*} \operatorname{div} \vec{v} \, dS = \int_{\partial S^*} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Sigma. \quad (5.4.3)$$

D'altra parte

$$\partial S^* = \partial_1 S^* \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

dove con  $\partial_1 S^*$  denotiamo la superficie laterale della porzione  $S^*$  di cilindro.

La (5.4.3) assume perciò la forma:

$$0 = \int_{\partial_1 S^*} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot (-\vec{e}_3) \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma. \quad (5.4.4)$$

Ma per la condizione al contorno (5.4.2):

$$\vec{v} \Big|_{\partial_1 S^*} = \vec{0}$$

per cui la (5.4.4) fornisce:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \, d\Sigma.$$

La proposizione è perciò provata.

Come è facile verificare la proposizione 3.1 sussiste anche nel caso di un fluido perfetto incompressibile.

Osserviamo inoltre che la proposizione 3.1 continua ancora a valere anche se il moto non è stazionario, ma in tal caso il flusso della velocità attraverso le sezioni del cilindro è una funzione del tempo:  $\Phi = \Phi(t)$ .

Rileviamo che, se utilizziamo la rappresentazione analitica del campo  $\vec{v}(P)$ , otteniamo:

$$\int_{\Sigma(z)} \vec{v}(P) \cdot \vec{e}_3 d\Sigma = \int_{\Sigma(z)} v_3(P) d\Sigma = \int \int_D v_3(x_1, x_2, z) dx_1 dx_2.$$

Passiamo ora a definire il moto di Poiseuille in un cilindro illimitato.

Supponiamo di avere un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario nel cilindro  $S$ , in assenza di forze di massa. Allora le equazioni che ne governano il moto in  $S$  sono:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

con la condizione al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{0}. \quad (5.4.6)$$

Un **moto di Poiseuille** in un cilindro illimitato  $S$ , la cui superficie laterale sia rigida e fissa, è costituito da una qualsiasi coppia  $(\vec{v}, p)$  dove  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}^1(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{S}) \cap \mathcal{C}(S)$ ,  $(\vec{v}, p)$  è soluzione delle (5.4.5) in  $\overset{\circ}{S}$ ,  $\vec{v}$  soddisfa alla condizione al contorno (5.4.6) ed ha la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3.$$

Notiamo che sui campi  $\vec{v}$  e  $p$  abbiamo fatto delle ipotesi di regolarità meno forti di quelle utilizzate finora.

Cerchiamo di stabilire se sono possibili moti di Poiseuille nel cilindro e che forma hanno.

In primo luogo notiamo che la condizione di incomprimibilità (la seconda delle (5.4.5)) è automaticamente soddisfatta da un campo della velocità della forma richiesta nel moto di Poiseuille.

Dobbiamo imporre allora alla coppia  $(\vec{v}, p)$  di soddisfare alla prima equazione delle (5.4.5) che in generale, in termini di rappresentazioni analitiche, equivale alle tre equazioni scalari:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \times \mathbb{R}.$$

Nel nostro caso particolare deduciamo:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ i = 2 & \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

da cui discende:

$$p = p(x_3).$$

Infine per  $i = 3$  abbiamo:

$$\rho \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) - \frac{dp}{dx_3}$$

che, essendo  $v_1 = v_2 = 0$ , si riduce a

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) (x_1, x_2) = \frac{dp}{dx_3}(x_3) \quad \forall (x_1, x_2) \in \overset{\circ}{D}, \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}.$$

Allora, tenendo presente che  $x_1, x_2, x_3$  sono variabili indipendenti e che il primo membro dell'equazione è funzione solo di  $(x_1, x_2)$  e il secondo solo di  $x_3$  necessariamente dovremo avere:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) = -C \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dx_3} = -C$$

con  $C = \text{costante}$ .

Per la pressione si ottiene così:

$$p = -Cx_3 + p_0 \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria inessenziale e  $C$  rappresenta fisicamente la differenza di pressione tra i punti di due sezioni trasversali del cilindro poste a distanza unitaria. La costante  $C$  è detta **salto di pressione nella direzione  $Ox_3$** .

Per quanto riguarda la velocità siamo ricondotti a risolvere il seguente problema differenziale alle derivate parziali:

$$\Delta v_3 = -\frac{C}{\mu} \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \tag{5.4.7}$$

$$v_3 \Big|_{\partial D} = 0. \tag{5.4.8}$$

La condizione al contorno è conseguenza della condizione di aderenza (5.4.6).

Si tratta di un problema di Dirichlet per un'equazione di Poisson in due variabili indipendenti, il cui termine non omogeneo è costante.

Si dimostra facilmente il seguente



**Teorema 5.3.** *Se il problema al contorno (5.4.7), (5.4.8) ammette una soluzione  $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$  questa è unica nella classe di funzioni  $\mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$ .*

Dimostrazione

Supponiamo che il problema (5.4.7), (5.4.8) ammetta due soluzioni:  $v_3^{(1)}, v_3^{(2)} \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}(D)$  e poniamo:

$$v_3 = v_3^{(1)} - v_3^{(2)}.$$

Ovviamente  $v_3$  gode delle stesse proprietà di regolarità di  $v_3^{(1)}, v_3^{(2)}$  ed è soluzione del problema al contorno:

$$\begin{aligned} \Delta v_3 &= 0 & \text{in } \overset{\circ}{D} \\ v_3 \Big|_{\partial D} &= 0. \end{aligned}$$

Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace con condizione al contorno omogenea. Come è noto dalla teoria relativa all'equazione di Laplace, tale problema ammette come unica soluzione la soluzione nulla. Dunque

$$v_3^{(1)} - v_3^{(2)} = 0 \quad \text{in } D.$$

Si potrebbe inoltre dimostrare che se  $\partial D$  è sufficientemente regolare, allora il problema (5.4.7), (5.4.8) ammette una soluzione  $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}^1(D)$ . Ovviamente tale soluzione è unica per il teorema di unicità dimostrato in precedenza.

Si osservi che se la pressione è costante, cioè  $C = 0$ , il fluido resta in quiete ( $v_3 = 0$  in  $D$ .)

Abbiamo così provato il seguente

**Teorema 5.4.** *Dato un fluido viscoso classico incomprimibile ed omogeneo, un moto di Poiseuille (stazionario) in un cilindro illimitato, la cui superficie laterale è rigida e fissa, è possibile solo se la pressione presenta un salto di pressione  $C \neq 0$  nella direzione  $Ox_3$  delle generatrici del cilindro. Inoltre se la sezione del cilindro è sufficientemente regolare, in corrispondenza di ogni salto di pressione  $C$  esiste uno ed un solo moto di Poiseuille  $(\vec{v}, p)$  con*

$$p = -C x_3 + p_0 \quad e \quad \vec{v} = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3$$

dove  $v_3$  è soluzione del problema al contorno (5.4.7), (5.4.8).

Se  $C = 0$ , la pressione è costante e il fluido resta in quiete.

Vediamo ora di stabilire alcuni interessanti risultati relativi ai moti di Poiseuille in cilindri illimitati.

In primo luogo determiniamo la forma di tale moto nel caso di un cilindro circolare retto di raggio  $R$ . In questo caso si parla di **moto di Hagen-Poiseuille**. Se prendiamo come asse  $Ox_3$  del riferimento cartesiano l'asse del cilindro,  $D$  è un cerchio di raggio  $R$  avente la seguente equazione:

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}.$$

Fissiamo poi in  $\mathbb{R}^2$  un sistema di coordinate polari avente l'asse  $x_1$  come asse polare, denotiamo il raggio vettore con  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e l'anomalia con  $\varphi$ . Grazie alla simmetria della regione  $D$  ed al fatto che il termine non omogeneo dell'equazione di Poisson e la condizione al contorno non dipendono da  $\varphi$ , siamo condotti a cercare la soluzione  $v_3$  del problema (5.4.7), (5.4.8) nella forma di una funzione indipendente da  $\varphi$ :

$$v_3 = v_3(r).$$

Vediamo di scrivere  $\Delta v_3 = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$  in coordinate polari piane.

Ricordiamo l'espressione del laplaciano di un campo scalare in coordinate cilindriche che abbiamo ottenuto nel Capitolo 4:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Tale risultato sussiste anche per una funzione scalare di tre variabili reali, avendo fissato in  $\mathbb{R}^3$  un sistema di coordinate cilindriche.

Se poi la funzione  $F$  di cui cerchiamo il laplaciano dipende solo da due variabili e in  $\mathbb{R}^2$  fissiamo un sistema di coordinate polari, dall'espressione precedente deduciamo:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Nel nostro caso  $F = v_3(r)$  per cui

$$\Delta v_3 = \frac{d^2 v_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_3}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_3}{dr} \right).$$

In conclusione per  $r \in (0, R)$  abbiamo:

$$\Delta v_3 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_3}{dr} \right). \quad (5.4.9)$$

Dalla (5.4.9) e dalla (5.4.7) per  $r \in (0, R)$  deduciamo:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_3}{dr} \right) = -\frac{C}{\mu} r,$$

da cui integrando discende:

$$r \frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r^2 + C_1, \quad C_1 = \text{costante arbitraria.}$$

Dividendo per  $r$  si arriva a

$$\frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r + \frac{C_1}{r}. \quad (5.4.10)$$

D'altra parte la funzione  $v_3(r)$  che cerchiamo deve essere definita anche per  $r = 0$  ed avere derivata prima continua per  $r = 0$ . Poniamo allora  $C_1 = 0$  nella (5.4.10) per cui questa si riduce a:

$$\frac{dv_3}{dr} = -\frac{C}{2\mu} r$$

che, integrata nuovamente, fornisce:

$$v_3 = -\frac{C}{4\mu} r^2 + C_2, \quad C_2 = \text{costante arbitraria.}$$

Per determinare  $C_2$  teniamo presente che la condizione al contorno (5.4.8) in questo caso si scrive come:

$$v_3(R) = 0,$$

per cui imponendo tale condizione otteniamo:

$$-\frac{C}{4\mu} R^2 + C_2 = 0 \quad \implies \quad C_2 = \frac{C}{4\mu} R^2.$$

Sostituendo a  $C_2$  il valore trovato deduciamo:

$$v_3 = \frac{C}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad \forall r \in [0, R],$$

ossia

$$v_3 = \frac{C}{4\mu} [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)] \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

In conclusione il moto di Hagen-Poiseuille in un cilindro circolare retto di raggio  $R$  corrispondente al salto di pressione  $C$  è dato dalla coppia  $(v_3, p)$  tale che:

$$\begin{aligned} p &= -Cx_3 + p_0 & \forall x_3 \in \mathbb{R} \\ v_3 &= \frac{C}{4\mu} [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)] & \forall (x_1, x_2) \in D. \end{aligned}$$

Notiamo che nel moto di Hagen-Poiseuille  $p, \vec{v} \in \mathcal{C}^\infty(S)$ .

Deduciamo ora un altro risultato sul moto di Poiseuille in un cilindro illimitato interessante anche dal punto di vista fisico.

Fisicamente non è semplice misurare il salto di pressione  $C$ , mentre è facilmente misurabile il flusso  $\Phi$  della velocità al quale, come vedremo, è strettamente collegato  $C$ .

Dimostriamo infatti il seguente

**Teorema 5.5.** *In un moto di Poiseuille (stazionario) in un cilindro illimitato di sezione sufficientemente regolare il salto di pressione è correlato al flusso della velocità mediante la relazione:*

$$C = c_p \Phi \quad \text{con } c_p = \text{costante} > 0, \quad c_p = c_p(D, \mu). \quad (5.4.11)$$

La costante  $c_p$ , che dunque dipende solo dalla geometria del problema e dal fluido preso in esame, è detta **costante di Poiseuille**.

#### Dimostrazione

Svolgeremo la dimostrazione in più fasi. Proviamo dapprima i due risultati seguenti:

- $C = 0 \iff \Phi = 0$
- $C \neq 0 \text{ o } \Phi \neq 0 \implies C, \Phi$  hanno lo stesso segno.

Sia dunque  $(\vec{v}, p)$  il moto di Poiseuille corrispondente al salto di pressione  $C$ . Come sappiamo,  $\vec{v} = v_3(x_1, x_2) \vec{e}_3$ ,  $p = -Cx_3 + p_0$  con  $v_3$  soluzione del problema al contorno:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{C}{\mu} \quad \text{in } \overset{\circ}{D} \quad (5.4.12)$$

$$v_3 \Big|_{\partial D} = 0. \quad (5.4.13)$$

Ovviamente nella (5.4.12) abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

Assumiamo che  $\partial D$  sia sufficientemente regolare in modo tale che il problema (5.4.12), (5.4.13) ammetta una soluzione  $v_3 \in \mathcal{C}^2(\overset{\circ}{D}) \cap \mathcal{C}^1(D)$ . Sia  $\Phi$  il flusso della velocità per cui:

$$\Phi = \int \int_D v_3(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Stabiliamo i due risultati preliminari.

Moltiplichiamo entrambi i membri della (5.4.12) per  $v_3$  e integriamo su  $\overset{\circ}{D}$  ottenendo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) v_3 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \int \int_{\overset{\circ}{D}} v_3 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \int \int_D v_3 dx_1 dx_2. \quad (5.4.14)$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) v_3 &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} &= (\text{grad } v_3)^2. \end{aligned}$$

Sostituendo i risultati ottenuti sopra nella (5.4.14) e tenendo conto della definizione di  $\Phi$ , deduciamo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) dx_1 dx_2 - \int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = -\frac{C}{\mu} \Phi. \quad (5.4.15)$$

Ma per le formule integrali di Gauss

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial D} v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} n_\alpha ds$$

dove  $n_1, n_2$  sono le due componenti del versore normale a  $\partial D$  rivolto verso l'esterno di  $D$ .

Tuttavia l'integrale curvilineo esteso a  $\partial D$  risulta nullo per la condizione al contorno (5.4.13) e perciò la (5.4.15) si riduce a:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = \frac{C}{\mu} \Phi. \quad (5.4.16)$$

Se  $C = 0$ , dalla (5.4.16) deduciamo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = 0 \implies \text{grad } v_3 = \vec{0} \text{ in } \overset{\circ}{D} \implies v_3 = \text{costante in } D.$$

Ma, essendo  $v_3|_{\partial D} = 0$ , segue  $v_3 = 0$  in  $D$  e dunque  $\Phi = 0$ .

Si noti che in effetti questo risultato l'avevamo già ottenuto nella dimostrazione del teorema di unicità.

Viceversa se  $\Phi = 0$ , sempre dalla (5.4.16) otteniamo:

$$\int \int_{\overset{\circ}{D}} (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = 0 \implies v_3 = 0 \text{ in } D,$$

da cui, per la (5.4.12), discende  $C = 0$ .

Abbiamo così provato il primo risultato preliminare.

Il secondo discende immediatamente sempre dalla (5.4.16), poiché se  $C \neq 0$  o  $\Phi \neq 0$  abbiamo che il prodotto di  $C$  per  $\Phi$  non può essere nullo e quindi risulta strettamente positivo:

$$0 < \int \int_D (\text{grad } v_3)^2 dx_1 dx_2 = \frac{C}{\mu} \Phi \implies C \Phi > 0$$

per cui  $C$  e  $\Phi$  hanno lo stesso segno.

Proviamo ora la (5.4.11).

In base a quanto ottenuto, possiamo asserire che, preso un qualsiasi moto di Poiseuille, esiste un numero positivo  $c$ , a priori dipendente da  $(v_3, D, \mu)$ , tale che:

$$C = c(v_3, D, \mu) \Phi,$$

dove  $C, \Phi$  sono il salto di pressione e il flusso della velocità rispettivamente.

Noi ci proponiamo di provare che  $c$  è indipendente dal moto considerato, cioè è indipendente da  $v_3$ .

Consideriamo due qualsiasi moti di Poiseuille relativi allo stesso cilindro illimitato:  $(\vec{v}^{(1)} = v_3^{(1)} \vec{e}_3, p_1)$ ,  $(\vec{v}^{(2)} = v_3^{(2)} \vec{e}_3, p_2)$ .

Siano

$$\begin{aligned} p_1 &= -C_1 x_3 + p_{01} & \Phi_1 &= \int \int_D v_3^{(1)} dx_1 dx_2 & c_1 &= c(v_3^{(1)}, D, \mu) \\ p_2 &= -C_2 x_3 + p_{02} & \Phi_2 &= \int \int_D v_3^{(2)} dx_1 dx_2 & c_2 &= c(v_3^{(2)}, D, \mu). \end{aligned}$$

Osserviamo poi che anche  $(\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}, p = p_1 + p_2)$  è un moto di Poiseuille per la linearità del problema ed a quest'ultimo moto sono associati il salto di pressione:  $C = C_1 + C_2$  e il flusso  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ . Dunque:

$$C = c \Phi \quad \text{con} \quad c = c(v_3, D, \mu)$$

ossia

$$C_1 + C_2 = c(\Phi_1 + \Phi_2)$$

da cui:

$$c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 = c(\Phi_1 + \Phi_2) \implies (c_1 - c)\Phi_1 + (c_2 - c)\Phi_2 = 0 \quad \forall \Phi_1, \Phi_2.$$

Grazie all'arbitrarietà di  $\Phi_1, \Phi_2$ , nella relazione scritta sopra poniamo dapprima  $\Phi_1 = 0$  e  $\Phi_2 \neq 0$ . Ne consegue:

$$c_1 = c.$$

Poniamo ora  $\Phi_1 \neq 0$  e  $\Phi_2 = 0$ . Ne consegue:

$$c_2 = c$$

e perciò:

$$c_1 = c_2.$$

Dunque la costante  $c$  non dipende dal moto, cioè  $c = c(D, \mu)$ . Aggiungiamo, come è usuale, a  $c$  il pedice  $P$  per cui  $c_P = c_P(D, \mu)$ , come volevamo dimostrare.

**Esercizio.** Determinare la costante di Poiseuille nel caso in cui il cilindro occupato dal fluido sia circolare retto con raggio  $R$ .

*Risposta:*  $c_P = \frac{8\mu}{\pi R^4}$ .

(Suggerimento: utilizzando i risultati ottenuti in precedenza, calcolare prima il flusso e poi  $c_P$ .)

**Osservazione 5.5** I risultati che abbiamo ottenuto per i moti di Poiseuille e Couette tra due piani paralleli e per il moto di Poiseuille in un cilindro illimitato continuano a sussistere se assumiamo che  $\rho \vec{F}$  provenga da un potenziale  $U$ . Infatti basta introdurre una pressione modificata  $p^*$  così definita:

$$p^* = p - U$$

e sostituire alla pressione effettiva la pressione modificata.





# Capitolo 6

## Moti indotti da un piano rotante per un fluido newtoniano incomprimibile

### 6.1 Premesse

Supponiamo di avere ancora un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario. La regione  $S$  occupata dal fluido sia un semispazio la cui frontiera sia costituita dal piano materiale rigido  $\Pi$  che ruota uniformemente attorno ad un asse fisso normale al piano stesso. Sia  $Ox_3$  l'asse di rotazione con  $O$  punto del piano ed orientato verso la regione occupata dal fluido, mentre gli assi  $Ox_1, Ox_2$  giacciono su  $\Pi$ . Si ha dunque:

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : x_3 \geq 0\}.$$

La velocità angolare del piano rotante sia:  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$  con  $\Omega > 0$ .

Dunque le equazioni che governano il moto del fluido, dopo aver diviso entrambi i membri dell'equazione di Navier-Stokes per  $\rho$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (6.1.1)$$

D'altra parte

$$\rho = \text{costante} \quad \implies \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

Inoltre assumiamo che la densità delle forze esterne di massa provenga da un potenziale scalare, cioè

$$\vec{F} = \text{grad } U_1.$$

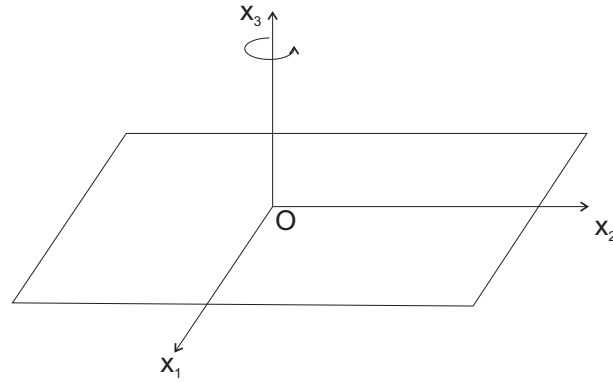


Figura 6.1: Geometria del problema

Perciò si ha

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} - U_1 \right).$$

E' allora conveniente introdurre il campo della pressione modificata dato da

$$p^* = \frac{p}{\rho} - U_1.$$

Di conseguenza, il sistema (6.1.1) assume la forma:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\text{grad } p^* + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S. \quad (6.1.2)$$

A tale sistema associamo la condizione di aderenza

$$\vec{v} \Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O) \Big|_{\Pi}. \quad (6.1.3)$$

Risolvere il problema al contorno (6.1.2), (6.1.3) significa trovare le coppie  $(\vec{v}, p^*)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p^* \in \mathcal{C}^1(S)$  soddisfacenti le equazioni (6.1.2) e la condizione al contorno (6.1.3).

Tale problema occupa una posizione centrale in fluidodinamica a partire dal lavoro pionieristico di T. von Karman (1921).

I motivi principali di questo interesse stanno nel fatto che il problema ha immediate applicazioni tecniche, ad esempio alle macchine rotanti, e che la geometria del moto è una delle più semplici possibili cosicché ci si aspetta di trovare delle soluzioni esatte.

Una prima soluzione del problema è quella banale data da  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$  con

$$\vec{v}^{(R)} = \vec{\Omega} \times (P - O), \quad p^{*(R)} = \frac{\Omega^2}{2} |P - P^*|^2 + p_0^{(R)} \quad \forall P \in S$$

dove  $P^*$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $Ox_3$  e  $p_0^{(R)}$  è una costante arbitraria. In corrispondenza di tale moto il fluido si muove di moto rotatorio uniforme attorno all'asse  $Ox_3$  insieme al piano  $\Pi$  che dunque trascina con sé tutto il fluido.

Verifichiamo che effettivamente il moto rigido  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$  è una soluzione del problema.

La condizione al contorno è soddisfatta banalmente.

Vediamo se sono soddisfatte le equazioni (6.1.2).

A tal fine ricorriamo alle rappresentazioni analitiche di  $p^{*(R)}$  e  $\vec{v}^{(R)}$ :

$$p^{*(R)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + p_0^{(R)},$$

$$\vec{v}^{(R)}(x_1, x_2, x_3) = \Omega \vec{e}_3 \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3)$$

da cui

$$v_1^{(R)} = -\Omega x_2, \quad v_2^{(R)} = \Omega x_1, \quad v_3^{(R)} = 0.$$

Si vede immediatamente che  $\text{div} \vec{v}^{(R)} = 0$  in  $S$  poiché:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_3} = 0.$$

Per quanto riguarda la prima delle (6.1.2), questa è equivalente alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i^{(R)} \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1.4)$$

Per  $i = 1$  abbiamo:

$$\frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_1^{(R)}}{\partial x_2} v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_1, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_1$$

e dunque la prima delle (6.1.4) è soddisfatta.

Per  $i = 2$ :

$$\frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = \frac{\partial v_2^{(R)}}{\partial x_1} v_1^{(R)} = -\Omega^2 x_2, \quad -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2^{(R)} = -\Omega^2 x_2$$

e dunque anche la seconda delle (6.1.4) è soddisfatta.

Infine per  $i = 3$

$$\frac{\partial v_3^{(R)}}{\partial x_j} v_j^{(R)} = -\frac{\partial p^{*(R)}}{\partial x_3} + \nu \Delta v_3^{(R)} = 0.$$

Dunque è verificata anche l'ultima delle (6.1.4).

E' interessante considerare le linee di flusso del campo della velocità  $\vec{v}^{(R)}$ , che

risultano essere circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ . Per provare tale risultato possiamo seguire due metodi.

Il primo metodo è il più veloce. Essendo il moto stazionario, linee di flusso e traiettorie delle particelle coincidono e, poiché il moto del fluido è un moto rigido di rotazione uniforme attorno all'asse  $Ox_3$ , le particelle descrivono delle circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ .

Il secondo metodo, basato sulla definizione di linee di flusso, è meno immediato, ma ci sarà utile nel seguito. Come sappiamo, le linee di flusso sono il sostegno delle curve  $P = P(\lambda)$  che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale del I ordine vettoriale

$$\frac{dP}{d\lambda} = \vec{v}^{(R)}(P),$$

equivalente al sistema di tre equazioni scalari del I ordine:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

nelle tre funzioni incognite  $x_i = x_i(\lambda) \quad i = 1, 2, 3$ .

Esplicitando le funzioni  $v_i^{(R)}(x_1, x_2, x_3)$ , otteniamo il seguente sistema:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega x_2 \tag{6.1.5}$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega x_1 \tag{6.1.6}$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \tag{6.1.7}$$

Dalla (6.1.7) discende che le linee di flusso sono cammini piani poiché  $x_3 = c$  con  $c = \text{costante} \in [0, +\infty)$ .

Inoltre moltiplicando entrambi i membri della (6.1.5) per  $x_1$  e della (6.1.6) per  $x_2$  e sommando, si ottiene:

$$x_1 \frac{dx_1}{d\lambda} + x_2 \frac{dx_2}{d\lambda} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

da cui:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \quad \text{con } R = \text{costante} > 0.$$

Le linee di flusso sono dunque caratterizzate dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= R^2 \\ x_3 &= c \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che le linee di flusso del campo  $\vec{v}^{(R)}$  sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = c$  ed hanno il centro sull'asse  $Ox_3$ . Osserviamo che il cammino luogo dei centri di tali circonferenze è il semiasse positivo  $Ox_3$ .

Il problema al contorno considerato ammette altre soluzioni che possono essere raggruppate in due classi:

- soluzioni che sono **simmetriche**
- soluzioni che sono **non simmetriche**

rispetto all'asse di rotazione  $Ox_3$ .

Noi ci occuperemo sia del moto di von Karman, che appartiene alla prima classe, sia di un tipo di moto che appartiene alla seconda.

Il moto di von Karman è basato, oltre che sull'ipotesi di simmetria, sulle ulteriori ipotesi che la componente della velocità del fluido lungo l'asse di rotazione dipenda solo da  $x_3$  e che all'infinito la velocità del fluido sia normale al piano rotante. Con tali ipotesi lo studio del moto è ricondotto ad un problema differenziale per un sistema di due equazioni differenziali ordinarie non lineari che non possiede una soluzione esprimibile in termini di funzioni analitiche note, ma che si può solo integrare numericamente. Ci sono comunque numerosi studi teorici relativi all'esistenza e al comportamento asintotico (decadimento esponenziale all'infinito) della soluzione.

Per quanto riguarda il moto che non è simmetrico rispetto all'asse di rotazione, faremo vedere che si trova una soluzione esatta espressa in termini di funzioni esponenziali e trigonometriche.

## 6.2 Moto di von Karman.

Si deve a **Theodore von Karman** il lavoro pionieristico del 1921 riguardante lo studio del moto stazionario di un fluido newtoniano, omogeneo ed incomprimibile, posto in un semispazio limitato da un piano rigido rotante uniformemente con velocità angolare  $\Omega$  attorno ad un asse ad esso ortogonale.

Nel moto di von Karman il piano rotante viene visto come un ventilatore centrifugo con il fluido che è attratto verso il piano nella direzione  $Ox_3$  e spinto verso l'esterno radialmente.

Le soluzioni del problema al contorno (6.1.2),(6.1.3) si suppongono avere simmetria assiale cioè simmetria rispetto all'asse  $Ox_3$ . Precisamente, introdotto accanto a  $Ox_1x_2x_3$ , un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \varphi, x_3)$ , si richiede che

le tre componenti della velocità e la pressione siano indipendenti da  $\varphi$  ed abbiano quindi la forma seguente:

$$\begin{aligned} v_r &= v_r(r, x_3) \\ v_\varphi &= v_\varphi(r, x_3) \\ v_3 &= v_3(r, x_3) \\ p^* &= p^*(r, x_3) \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} v_r = v_3 = 0 \quad v_\varphi = \Omega r & \quad \text{per } x_3 = 0 \\ v_r, v_\varphi \rightarrow 0 & \quad \text{per } x_3 \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Le prime due condizioni (per  $x_3 = 0$ ) sono le condizioni di aderenza, mentre le ultime due traducono la richiesta che all'infinito sia non nulla solo la componente assiale della velocità.

Come abbiamo detto, una caratteristica dello studio di von Karman è il fatto che le equazioni siano scritte in coordinate cilindriche.

Nel capitolo 4 abbiamo ricavato le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche. Tenendo presente l'ipotesi (6.2.1), la sostituzione della coordinata  $z$  con la coordinata  $x_3$  e la stazionarietà del moto, le equazioni si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_3 \frac{\partial v_r}{\partial x_3} &= -\frac{\partial p^*}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_r + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_3^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_r \frac{v_\varphi}{r} + v_3 \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_3} &= \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_\varphi + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x_3^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_3}{\partial r} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_3} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

A queste è aggiunta la condizione di incomprimibilità ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) data da:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \quad (6.2.4)$$

Ci proponiamo ora di studiare il problema differenziale che si ottiene associando alle equazioni (6.2.3) e (6.2.4) le condizioni al contorno che caratterizzano il moto di von Karman:

$$\text{per } x_3 = 0 \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = r\Omega, \quad v_3 = 0, \quad (6.2.5)$$

$$\text{per } x_3 \rightarrow +\infty \quad v_r \rightarrow 0, \quad v_\varphi \rightarrow 0 \quad (6.2.6)$$

con  $\Omega =$  velocità angolare costante.

Inoltre von Karman richiede che per  $x_3 \rightarrow +\infty$   $v_3$  tenda ad un limite finito.

Le condizioni al contorno (6.2.5) ci suggeriscono di cercare una soluzione per  $v_\varphi$  della forma:

$$v_\varphi = r g(x_3)$$

con  $g$  funzione incognita sufficientemente regolare.

La seconda equazione di Navier-Stokes quindi darà:

$$v_r g + \frac{v_r}{r} r g + v_3 r g' = \nu \left( \frac{1}{r} g - \frac{1}{r} g + r g'' \right)$$

da cui

$$2 v_r g + r v_3 g' = \nu r g'' \quad (6.2.7)$$

Ora osserviamo che l'equazione di continuità della massa per il fluido si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_3)}{\partial x_3} = 0. \quad (6.2.8)$$

Questa equazione, assieme alla (6.2.7), suggerisce che forme possibili per  $v_r$  e  $v_3$  sono:

$$v_r = r f(x_3) \quad v_3 = h(x_3)$$

con  $f, h$  funzioni incognite sufficientemente regolari.

Dalla terza equazione di Navier-Stokes, poichè  $\frac{\partial v_3}{\partial r} = 0$ , si ha che:

$$v_3 \frac{d v_3}{d x_3} = - \frac{\partial p^*}{\partial x_3} + \nu \frac{d^2 v_3}{d x_3^2}$$

e cioè

$$\frac{d}{d x_3} \left( \frac{1}{2} v_3^2 \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x_3} + \nu \frac{d^2 v_3}{d x_3^2}. \quad (6.2.9)$$

La (6.2.9) fornisce:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_3} = - \frac{d}{d x_3} \left( \frac{1}{2} v_3^2 \right) + \nu \frac{d^2 v_3}{d x_3^2}.$$

Integrando tale equazione, deduciamo:

$$p^* = - \frac{1}{2} v_3^2 + \nu \frac{d v_3}{d x_3} + P(r) \quad (6.2.10)$$

con  $P(r)$  funzione arbitraria di  $r$ .

A questo punto, vediamo quale forma assume la prima equazione di Navier-Stokes tenendo presente la (6.2.10) e la forma richiesta a  $v_r$  e  $v_\varphi$ .

$$r f^2(x_3) - r g^2(x_3) + r h(x_3) f'(x_3) = -P'(r) + \nu \left( \frac{f(x_3)}{r} - \frac{f(x_3)}{r} + r f''(x_3) \right)$$

da cui

$$r f^2(x_3) - r g^2(x_3) + r h(x_3) f'(x_3) = -P'(r) + \nu r f''(x_3).$$

Dunque

$$P'(r) = r \times \text{per una funzione solo di } x_3 \equiv r k(x_3),$$

ossia

$$\frac{P'(r)}{r} = k(x_3).$$

Poichè la funzione a primo membro dipende solo da  $r$  e quella a secondo membro solo da  $x_3$  e le due variabili  $r, x_3$  sono indipendenti, dovremo avere necessariamente che le due funzioni sono uguali ad una stessa costante che denotiamo con  $C$ .

Dunque

$$P'(r) = C r \quad k(x_3) = C.$$

Ma le condizioni all'infinito del moto di von Karman implicano

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f(x_3) = 0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} g(x_3) = 0,$$

da cui segue:

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f'(x_3) = 0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f''(x_3) = 0.$$

Perciò  $C = 0$  e dunque  $P'(r) = 0$ .

Ciò significa che  $P(r)$  non dipende da  $r$ ; quindi è una costante che denotiamo con  $p_0$ .

Così la pressione modificata risulta una funzione solo di  $x_3$  data da:

$$p^* = -\frac{1}{2} v_3^2 + \nu \frac{d v_3}{d x_3} + p_0, \quad (6.2.11)$$

ossia

$$p^* = -\frac{1}{2} h^2 + \nu h' + p_0.$$



Perciò la terza equazione di Navier-Stokes fornisce l'espressione della pressione modificata in funzione di  $h(x_3)$ .

Per quanto riguarda  $v_r$ ,  $v_\varphi$  e  $v_3$ , come abbiamo già osservato, le cerchiamo della forma:

$$\begin{aligned} v_r &= r f(x_3) \\ v_\varphi &= r g(x_3) \\ v_3 &= h(x_3). \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

con  $f$ ,  $g$ ,  $h$  funzioni incognite sufficientemente regolari.

Le (6.2.12) prendono il nome di *trasformazioni di similarità*, perché, come ora mostreremo, ci consentono di trasformare il problema al contorno iniziale, che è un problema differenziale alle derivate parziali, in un problema differenziale in cui intervengono solo equazioni differenziali ordinarie.

A questo punto, vediamo come si scrivono le prime due equazioni di Navier-Stokes e l'equazione di continuità sostituendo in esse le (6.2.12).

La prima, tenendo presente che  $P'(r) = 0$ , fornisce:

$$r f^2(x_3) - r g^2(x_3) + r h(x_3) f'(x_3) = \nu r f''(x_3),$$

da cui dividendo per  $r$  e omettendo la dipendenza delle funzioni da  $x_3$ , otteniamo:

$$f^2 - g^2 + h f' - \nu f'' = 0 \tag{6.2.13}$$

La seconda equazione di Navier-Stokes dà:

$$r f(x_3) g(x_3) + r f(x_3) g(x_3) + r h(x_3) g'(x_3) = \nu \left( \frac{g(x_3)}{r} - \frac{g(x_3)}{r} + r g''(x_3) \right)$$

ossia

$$2r f(x_3)g(x_3) + r h(x_3) g'(x_3) = \nu r g''(x_3).$$

Se dividiamo per  $r$  e omettiamo la dipendenza delle funzioni da  $x_3$ , deduciamo:

$$2 f g + h g' - \nu g'' = 0 \tag{6.2.14}$$

Infine analizziamo come si trasforma la condizione di incomprimibilità:

$$f(x_3) + f(x_3) + h'(x_3) = 0$$

da cui ricaviamo

$$2 f + h' = 0 \tag{6.2.15}$$

Dunque ricapitolando, abbiamo trovato il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} f^2 - g^2 + h f' - \nu f'' &= 0 \\ 2 f g + h g' - \nu g'' &= 0 \\ 2 f + h' &= 0. \end{aligned}$$

D'altra parte le condizioni di aderenza sul piano  $x_3 = 0$  forniscono:

$$\begin{aligned} v_r = 0 &\Rightarrow f(0) = 0 \\ v_\varphi = r \Omega &\Rightarrow g(0) = \Omega \\ v_3 = 0 &\Rightarrow h(0) = 0 \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

e quindi al sistema scritto sopra dobbiamo associare le condizioni (6.2.16).

Per quanto riguarda il comportamento di  $\vec{v}$  per  $x_3 \rightarrow \infty$ , von Karman suppose che il fluido non risentisse più della rotazione del piano e dunque, come già abbiamo osservato:

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f(x_3) = 0 \tag{6.2.17}$$

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} g(x_3) = 0 \tag{6.2.18}$$

mentre  $h$  per  $x_3 \rightarrow +\infty$  tende ad un limite finito.

Quindi *all'infinito il fluido non risente della rotazione e il moto è puramente ortogonale al piano.*

Dalla condizione di incomprimibilità dedotta in coordinate cilindriche si ricava:

$$f = -\frac{h'}{2}. \tag{6.2.19}$$

Vediamo dunque come si trasformano la (6.2.13) e la (6.2.14) sostituendo a  $f$  l'espressione trovata.

La prima equazione diventa

$$\nu h''' - h h'' + \frac{h'^2}{2} - 2g^2 = 0,$$

ossia

$$\nu h''' - h h'' + \frac{1}{2}(h'^2 - 4g^2) = 0.$$

La seconda equazione fornisce

$$-h' g + h g' = \nu g'',$$

ossia

$$\nu g'' + h' g - h g' = 0.$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di due equazioni differenziali non lineari nelle due funzioni incognite  $g, h$ :

$$\begin{aligned} \nu h''' - h h'' + \frac{1}{2} (h'^2 - 4g^2) &= 0 \\ \nu g'' + h' g - h g' &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

A tali equazioni associamo le condizioni al contorno:

$$h(0) = 0 \quad h'(0) = 0 \quad g(0) = \Omega \quad (6.2.21)$$

$$g \rightarrow 0 \quad h' \rightarrow 0 \quad \text{se } x_3 \rightarrow +\infty, \quad (6.2.22)$$

mentre  $h$  tende ad un valore finito per  $x_3 \rightarrow +\infty$ .

A questo punto è conveniente effettuare la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} x_3 \\ G(\zeta) &= \frac{2}{\Omega} g(x_3) \\ H(\zeta) &= -\frac{1}{\sqrt{\nu\Omega}} h(x_3). \end{aligned}$$

Mediante tale trasformazione adimensionalizziamo sia la variabile indipendente sia le due funzioni incognite.

La tecnica di adimensionalizzazione è utilizzata spesso in Fisica Matematica ed ha lo scopo di ridurre il numero dei parametri che intervengono nel problema che si studia.

In particolare, nel nostro caso, mentre nel problema al contorno (6.2.20), (6.2.21), (6.2.22) compaiono i due parametri  $\nu$  e  $\Omega$ , nel problema adimensionale, cui perverremo mediante la trasformazione scritta sopra, non compare alcun parametro.

In primo luogo vediamo come si trasformano le equazioni (6.2.20).

Tenendo presente che:

$$\begin{aligned} g(x_3) &= \frac{1}{2} \Omega G(\zeta) \\ h(x_3) &= -\sqrt{\nu\Omega} H(\zeta), \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx_3} &= \frac{1}{2} \Omega \frac{dG}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx_3} \\ &= \frac{1}{2} \Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \frac{dG}{d\zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g}{d x_3^2} &= \frac{d}{d \zeta} \left( \frac{1}{2} \Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \frac{d G}{d \zeta} \right) \frac{d \zeta}{d x_3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\nu} \frac{d^2 G}{d \zeta^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d h}{d x_3} &= \frac{d}{d \zeta} \left( -\sqrt{\nu \Omega} H \right) \frac{d \zeta}{d x_3} \\ &= -\sqrt{\nu \Omega} \frac{d H}{d \zeta} \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \\ &= -\Omega \frac{d H}{d \zeta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 h}{d x_3^2} &= \frac{d}{d \zeta} \left( -\Omega \frac{d H}{d \zeta} \right) \frac{d \zeta}{d x_3} \\ &= -\Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \frac{d^2 H}{d \zeta^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3 h}{d x_3^3} &= \frac{d}{d \zeta} \left( -\Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \frac{d^2 H}{d \zeta^2} \right) \frac{d \zeta}{d x_3} \\ &= -\Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \frac{d^3 H}{d \zeta^3} \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \\ &= -\frac{\Omega^2}{\nu} \frac{d^3 H}{d \zeta^3}.\end{aligned}$$

Sostituendo in (6.2.20) otteniamo per la prima equazione:

$$\nu \left( -\frac{\Omega^2}{\nu} H''' \right) - \left( -\sqrt{\Omega \nu} H \right) \left( -\Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} H'' \right) + \frac{1}{2} \left[ (\Omega H')^2 - 4 \left( \frac{1}{2} \Omega G \right)^2 \right] = 0,$$

ossia

$$H''' + H H'' + \frac{1}{2} (G^2 - H'^2) = 0,$$

per la seconda

$$\nu \left( \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\nu} G'' \right) + \left( \frac{1}{2} \Omega G \right) (-\Omega H') - \left( -\sqrt{\nu \Omega} H \right) \left( \frac{1}{2} \Omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} G' \right) = 0$$

da cui

$$G'' - G H' + G' H = 0.$$

In seguito alla trasformazione introdotta, abbiamo dunque ottenuto le due nuove equazioni:

$$H''' + H H'' + \frac{1}{2} (G^2 - H'^2) = 0 \quad (6.2.23)$$

$$G'' - G H' + G' H = 0. \quad (6.2.24)$$

Ovviamente denotiamo con ' la derivata di  $G$  e  $H$  rispetto a  $\zeta$ . Le condizioni al contorno, in seguito alla trasformazione, assumono la forma:

$$H(0) = 0 \quad H'(0) = 0 \quad G(0) = 2 \quad (6.2.25)$$

$$G \rightarrow 0 \quad H' \rightarrow 0 \quad \text{se } \zeta \rightarrow +\infty \quad (6.2.26)$$

mentre  $H$  tende ad un valore finito per  $\zeta \rightarrow +\infty$ .

Il problema differenziale non lineare (6.2.23), (6.2.24), (6.2.25), (6.2.26) non possiede soluzione in termini di funzioni analitiche note, ma è stato risolto numericamente.

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 6.1.** *Nel moto di von Karman le linee di flusso che giacciono sui piani  $x_3 = \text{costante}$  sono spirali logaritmiche.*

#### Dimostrazione

Osserviamo che, essendo il moto stazionario, le linee di flusso coincidono con le traiettorie delle particelle.

Consideriamo allora una particella che si muove nel piano  $x_3 = x_3^*$ , con  $x_3^*$  costante.

La sua velocità in coordinate cilindriche, essendo  $x_3(t) = x_3^*$ , si riduce a

$$\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Vogliamo trovare l'equazione polare della traiettoria, cioè

$$r = r(\varphi). \quad (6.2.27)$$

Osserviamo che

$$r = r(t) \quad \text{e} \quad \varphi = \varphi(t).$$

Dalla (6.2.27) otteniamo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6.2.28)$$

Ma sappiamo che

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= v_r(r(t), x_3^*) \\ r(t) \dot{\varphi}(t) &= v_\varphi(r(t), x_3^*).\end{aligned}$$

Dalla seconda delle due relazioni scritte sopra si ha

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_\varphi(r(t), x_3^*)}{r(t)}$$

Per la trasformazione introdotta,  $\zeta = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} x_3$ , per cui  $\zeta^* = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} x_3^*$ .

Inoltre si trova

$$\begin{aligned}v_r(r(t), x_3^*) &= \frac{1}{2} \Omega r(t) H'(\zeta^*) \\ v_\varphi(r(t), x_3^*) &= \frac{1}{2} \Omega r(t) G(\zeta^*).\end{aligned}$$

Sostituiamo nella (6.2.28) tenendo presente l'espressione di  $\dot{\varphi}(t)$  ed otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \Omega r(t) H'(\zeta^*) &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{2} \Omega G(\zeta^*) \\ \frac{dr}{d\varphi} &= r \frac{H'(\zeta^*)}{G(\zeta^*)}\end{aligned}$$

che è una equazione differenziale a variabili separabili.

Separando le variabili si ha

$$\frac{1}{r} dr = \frac{H'(\zeta^*)}{G(\zeta^*)} d\varphi$$

da cui si ottiene

$$r = r_0 e^{\frac{H'(\zeta^*)}{G(\zeta^*)} \varphi} \quad (6.2.29)$$

che è l'equazione polare di una **spirale logaritmica**.

Come abbiamo già osservato in precedenza, il problema (6.2.23), (6.2.24), (6.2.25), (6.2.26) non possiede soluzioni in termini di funzioni analitiche note, ma vi sono studi matematici rigorosi sia relativamente all'esistenza della soluzione del problema sia relativamente al comportamento asintotico.

I contributi più significativi si devono a J. B. McLeod (1969) che stabilì un teorema di esistenza, e a P. Hartmann (1971), che ottenne un teorema sul comportamento all'infinito della soluzione.

Enunciamo tali teoremi, senza dimostrarli.

**Teorema 6.1. Teorema di esistenza di McLeod.**

Il problema

$$H''' + H H'' + \frac{1}{2} (G^2 - H'^2) = 0 \quad (6.2.30)$$

$$G'' + G H' - G' H = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \quad (6.2.31)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} H(0) &= 0 \\ G(0) &= \Omega_0 > 0 \\ H'(0) &= 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} G &= 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} H' &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

ha almeno una soluzione  $(H, G)$  tale che:

$$\begin{aligned} 0 &\leq H' < \Omega_0 \\ G &> 0 \quad G' < 0, \end{aligned}$$

$H''$  è dapprima positiva e poi negativa, con uno ed un solo zero. Inoltre  $H'''$  è positiva da un certo punto in poi,

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} H'' = 0$$

ed infine

$$H' = 0 \text{ solo in } \zeta = 0.$$

**Osservazione 6.1.** Nel moto di von Karman  $\Omega_0 = 2$ .

Enunciamo ora il secondo teorema.

**Teorema 6.2. Teorema di comportamento asintotico di Hartmann.**

Sia  $(H, G)$  una soluzione di (6.2.30), (6.2.31), (6.2.32) tale che

$$H' > 0, \quad G' < 0 \quad \text{per } \zeta > 0.$$

Allora:

1.  $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} H = c \quad 0 < c < +\infty$

2.  $\exists c_0, c_1$  costanti,  $c_0 > 0, c_1 > 0$  tali che, se  $\zeta \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} G - c_0 e^{-c\zeta}, \quad G' + c_0 c e^{-c\zeta}, \quad H - c + c_1 e^{-c\zeta}, \\ H' - c c_1 e^{-c\zeta}, \quad H'' + c^2 c_1 e^{-c\zeta} = O(e^{-2c\zeta}). \end{aligned}$$

Facciamo infine un cenno alla risoluzione numerica del problema al contorno che governa il moto di von Karman.

E' comunque dapprima conveniente vedere come si esprimono le tre componenti della velocità del fluido tramite  $G$  e  $H$ . Tenendo presenti le trasformazioni di similarità (6.2.12), l'equazione (6.2.19) e la trasformazione di adimensionalizzazione, abbiamo

$$\begin{aligned} v_r &= r \Omega F(\zeta) \\ v_\varphi &= r \Omega \frac{G}{2}(\zeta) \\ v_3 &= -\sqrt{\nu \Omega} H(\zeta), \end{aligned} \tag{6.2.33}$$

con  $F(\zeta) = \frac{H'}{2}(\zeta)$ .

La prima soluzione del problema con un metodo approssimato fu data dallo stesso von Karman.

Nel 1934 il problema fu risolto da W. G. Cochran utilizzando metodi numerici.

Si può mostrare che per  $\zeta \gg 1$

$$H \sim c, \quad \frac{G}{2} \sim A e^{-c\zeta} \quad (A > 0)$$

dove  $c \approx 0,89$ .

Il moto è tale che  $v_r, v_\varphi$  sono effettivamente non nulle solo in un "boundary layer" o strato al contorno o strato limite adiacente al piano  $x_3 = 0$ . Lo spessore di questo strato può essere riguardato come il valore di  $x_3$  in corrispondenza del quale  $v_\varphi$  si riduce ad una frazione piccola, dell'ordine dell'1%, del valore che ha sulla frontiera  $x_3 = 0$ . Ora, la soluzione numerica mostra che

$$\frac{G}{2} = 0,01 \quad \text{per } \zeta_0 \approx 5,4.$$

Quindi lo spessore dello strato è  $x_{30} = 5,4 \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$ .

Al di fuori di questo strato il moto è essenzialmente assiale (nella direzione dell'asse  $Ox_3$  ma con verso opposto) e uniforme con velocità in modulo pari a



$0,89\sqrt{\nu}\Omega$  diretta verso il piano.

Sia lo spessore del "boundary layer" sia la componente assiale della velocità fuori da tale strato dipendono da  $\sqrt{\nu}$ .

Per  $\nu \rightarrow 0^+$ ,

$$v_r, v_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \geq 0), \quad v_\varphi \rightarrow 0 \quad (x_3 > 0), \quad v_\varphi = \Omega r \quad (x_3 = 0).$$

Se  $\nu$  fosse effettivamente zero, il fluido sarebbe non viscoso, ossia un fluido perfetto. In tal caso, nelle ipotesi richieste da von Karman, sostituendo ovviamente la condizione di aderenza per  $x_3 = 0$  con quella di impenetrabilità, si potrebbe provare che nessun movimento viene generato nel fluido dalla rotazione del piano, ossia si ha  $v_r = v_\varphi = v_3 = 0$  per  $(x_3 \geq 0)$ . Se  $\nu$  ha un valore molto vicino a zero, il moto del fluido è essenzialmente lo stesso che si avrebbe se fosse non viscoso nella maggior parte della regione del moto; l'effetto della viscosità si manifesta solo entro un sottile strato al contorno.

I grafici di  $F$ ,  $\frac{G}{2}$  e  $H$ , ottenuti mediante due metodo differenti, sono rappresentati nelle figure 6.2, 6.3.

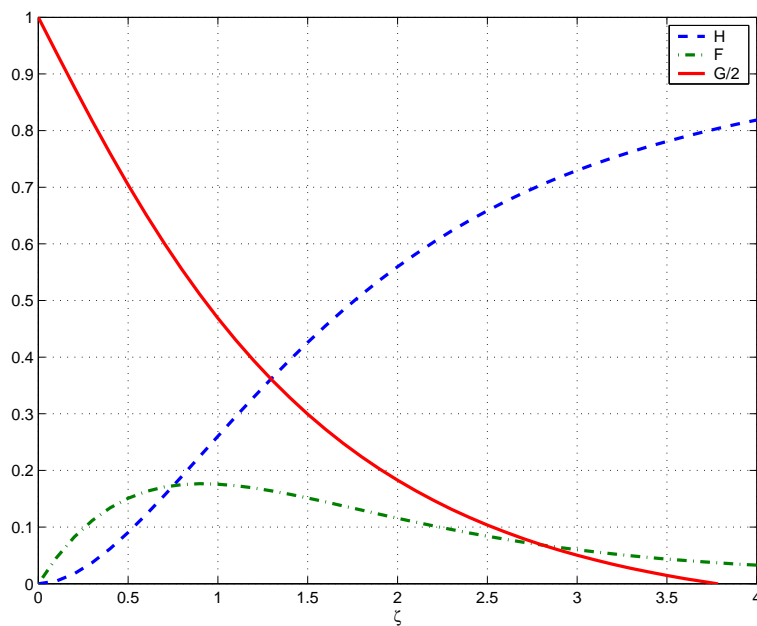


Figura 6.2: Grafici di  $F$ ,  $\frac{G}{2}$  e  $H$  col metodo di shooting.

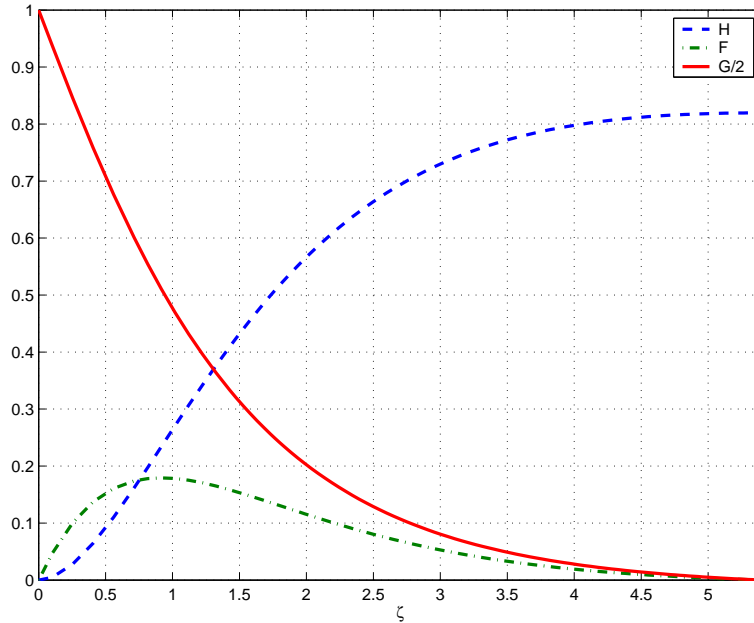


Figura 6.3: Grafici di  $F$ ,  $\frac{G}{2}$  e  $H$  col metodo delle differenze finite.

In figura 6.2 i grafici sono stati ottenuti mediante il metodo di shooting. Si ricorre spesso al metodo di shooting quando si deve risolvere numericamente un problema che coinvolge un sistema di equazioni differenziali ordinarie cui sono associate non solo condizioni iniziali, ma anche condizioni al contorno. In base a tale metodo, si sostituiscono alle condizioni al contorno le corrispondenti condizioni iniziali con dati in un primo momento arbitrari e poi si cercano i valori appropriati di tali dati in modo tale che la soluzione del nuovo problema ai valori iniziali abbia il comportamento richiesto alla soluzione del problema originario.

Da rilevare che anche il teorema di esistenza di McLeod è stato dimostrato utilizzando questa tecnica.

In figura 6.3 è stato usato un altro metodo numerico, quello delle differenze finite, su cui non insistiamo.

Come si può vedere dalle figure 6.2, 6.3, il metodo di shooting consente di descrivere il comportamento di  $F$ ,  $\frac{G}{2}$ ,  $H$  su un intervallo di ampiezza minore rispetto al metodo delle differenze finite, perchè ha un range di convergenza più ristretto.

Comunque il secondo metodo fornisce per  $c$  (valore asintotico di  $H$  per  $\zeta \rightarrow +\infty$ ) un valore leggermente inferiore rispetto a quello previsto da Cochran.

## 6.3 Soluzioni non simmetriche

Mostriamo ora un altro tipo di soluzioni del problema al contorno (6.1.2),(6.1.3) che non sono simmetriche.

A tal fine fissiamo sul piano  $\Pi$  ad arbitrio un punto  $P_0$  e sia  $(f_0, g_0, 0)$  la terna delle sue coordinate cartesiane. Ovviamente  $f_0$  e  $g_0$  sono numeri reali arbitrari. Consideriamo poi l'asse parallelo ad  $Ox_3$  e con lo stesso verso, avente come origine il punto  $P_0$ ; tale asse lo denotiamo con  $P_0x'_3$ . Poniamo

$$p^*(P) = \frac{\Omega^2}{2}|P - P'|^2 + p_0 \quad \forall P \in S \quad (6.3.1)$$

dove  $P'$  è la proiezione ortogonale del punto  $P$  sull'asse  $P_0x'_3$  e  $p_0$  è una costante arbitraria.

Ci proponiamo di determinare un campo vettoriale  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$  soddisfacente alle tre condizioni seguenti:

- 1) la coppia  $(\vec{v}, p^*)$  con  $p^*$  data dalla (6.3.1) è soluzione del problema (6.1.2), (6.1.3);
- 2) le linee di flusso del campo  $\vec{v}$  sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = \text{costante}$ ;
- 3) le componenti della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  sono limitate rispetto a  $x_3$  con  $x_3 \in [0, +\infty)$ .

Introduciamo le rappresentazioni analitiche di  $p^*$  e  $\vec{v}$ :

$$p^* = \frac{\Omega^2}{2}[(x_1 - f_0)^2 + (x_2 - g_0)^2] + p_0, \quad \vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3).$$

E' conveniente cercare le componenti della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  nella forma:

$$v_1 = -\Omega[x_2 - g(x_3)] \quad (6.3.2)$$

$$v_2 = \Omega[x_1 - f(x_3)] \quad (6.3.3)$$

$$v_3 = 0. \quad (6.3.4)$$

dove  $f, g$  sono funzioni incognite  $\in \mathcal{C}^2([0, +\infty))$ . Infatti, se le componenti della velocità hanno la forma scritta sopra è sicuramente soddisfatta la condizione 2). Verifichiamo tale asserzione.

Siano  $x_i = x_i(\lambda)$   $i = 1, 2, 3$  le equazioni cartesiane parametriche di una generica

linea di flusso. Le funzioni  $x_i(\lambda)$  devono soddisfare al sistema differenziale del I ordine:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(x_3)] \quad (6.3.5)$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(x_3)] \quad (6.3.6)$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = 0. \quad (6.3.7)$$

Dalla (6.3.7) si ottiene

$$x_3 = c \quad \text{con } c \in [0, +\infty).$$

Sostituendo tale risultato nelle (6.3.5), (6.3.6), deduciamo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\lambda} = -\Omega[x_2 - g(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_1 - f(c)] = -\Omega[x_2 - g(c)] \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = \Omega[x_1 - f(c)] &\implies \frac{d}{d\lambda}[x_2 - g(c)] = \Omega[x_1 - f(c)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che le due equazioni scritte sopra si presentano nella stessa forma delle (6.1.5) e (6.1.6) con la sostituzione di  $[x_1 - f(c)]$  e  $[x_2 - g(c)]$  a  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente. Se si procede in maniera analoga a quanto abbiamo fatto per le (6.1.5) e (6.1.6), deduciamo che le equazioni cartesiane delle linee di flusso relative a  $\vec{v}$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [x_1 - f(c)]^2 + [x_2 - g(c)]^2 &= R^2 \\ x_3 &= c \end{aligned}$$

con  $R$  costante positiva e  $c \in [0, +\infty)$ .

Dunque tali linee di flusso sono circonferenze che giacciono su piani di equazione  $x_3 = c$  i cui centri sono i punti di coordinate  $(f(c), g(c), 0)$  con  $c \in [0, +\infty)$ .

Il luogo dei centri di queste circonferenze è il cammino

$$\Lambda = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : x_1 = f(c), x_2 = g(c), x_3 = c, c \in [0, +\infty)\}.$$

Cerchiamo ora di determinare  $f, g$  in modo che  $(\vec{v}, p^*)$  sia soluzione del sistema di equazioni che governa il moto del fluido. In primo luogo è facile verificare che è soddisfatta l'equazione:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{in } S.$$

Infatti

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Consideriamo ora l'equazione vettoriale (6.1.2) che equivale alle tre equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.3.8)$$

Si vede immediatamente che per  $i = 3$  la (6.3.8) è soddisfatta banalmente.

Per  $i = 1$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1 \implies \\ -\Omega^2[x_1 - f(x_3)] &= -\Omega^2[x_1 - f_0] + \nu \Omega g''(x_3) \implies \\ \nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) &= -\Omega f_0. \end{aligned}$$

Analogamente per  $i = 2$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} v_j &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2 \implies \\ -\Omega^2[x_2 - g(x_3)] &= -\Omega^2[x_2 - g_0] - \nu \Omega f''(x_3) \implies \\ \nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) &= \Omega g_0. \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo che la coppia  $(f, g)$  soddisfa al seguente sistema di equazioni:

$$\nu g''(x_3) - \Omega f(x_3) = -\Omega f_0 \quad (6.3.9)$$

$$\nu f''(x_3) + \Omega g(x_3) = \Omega g_0. \quad (6.3.10)$$

che, dividendo entrambi i membri delle due equazioni per  $\nu$ , si può scrivere nella forma:

$$g''(x_3) - \frac{\Omega}{\nu} f(x_3) = -\frac{\Omega}{\nu} f_0 \quad (6.3.11)$$

$$f''(x_3) + \frac{\Omega}{\nu} g(x_3) = \frac{\Omega}{\nu} g_0. \quad (6.3.12)$$

Il sistema (6.3.11), (6.3.12) è un sistema differenziale di due equazioni in due incognite, del II ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogeneo.

Cominciamo col determinarne la soluzione generale, che ovviamente dipenderà da quattro costanti arbitrarie. Potremmo seguire diversi metodi.

Un metodo potrebbe essere quello di ricondurre il sistema dato ad un sistema differenziale di quattro equazioni differenziali del I ordine in quattro incognite assumendo come incognite, oltre alle funzioni  $f$  e  $g$  anche le loro derivate prime  $f'$  e  $g'$ , ed utilizzando poi le tecniche relative ai sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti non omogenei. Tuttavia questo metodo è molto lungo e

complesso.

Un secondo metodo che potremmo seguire è quello di ricondurci ad un'unica equazione differenziale in una sola incognita, derivando più volte le due equazioni del sistema, ma nel nostro caso arriveremmo ad un'equazione differenziale lineare del IV ordine e per determinarne la soluzione generale dovremmo calcolare le radici dell'equazione caratteristica, equazione algebrica del IV ordine.

Noi seguiremo un terzo metodo molto più semplice grazie alla forma particolare delle equazioni (6.3.11), (6.3.12).

Introduciamo la funzione a valori complessi  $F(x_3)$  così definita:

$$F(x_3) = f(x_3) + i g(x_3) \quad \forall x_3 \in [0, +\infty) \quad (6.3.13)$$

e il numero complesso:

$$F_0 = f_0 + i g_0, \quad (6.3.14)$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria.

Ora moltiplichiamo per  $i$  entrambi i membri della (6.3.11) e all'equazione così ottenuta sommiamo membro a membro la (6.3.12):

$$f''(x_3) + i g''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} [f(x_3) + i g(x_3)] = -i \frac{\Omega}{\nu} [f_0 + i g_0]. \quad (6.3.15)$$

Utilizzando le posizioni (6.3.13), (6.3.14), la (6.3.15) diventa:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0, \quad (6.3.16)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del II ordine a coefficienti costanti (complessi) non omogenea nella funzione incognita a valori complessi  $F(x_3)$ . Per determinarne la soluzione generale possiamo procedere come per le equazioni lineari non omogenee a coefficienti reali con funzione incognita reale.

La soluzione generale della (6.3.16) la cerchiamo della forma:

$$F = \hat{F} + F^*$$

con  $\hat{F}$  soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (6.3.16) e  $F^*$  soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea associata alla (6.3.16) è la seguente:

$$F''(x_3) - i \frac{\Omega}{\nu} F(x_3) = 0.$$

La sua equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 - i \frac{\Omega}{\nu} = 0 \quad \implies \quad \lambda^2 = i \frac{\Omega}{\nu}.$$

Tenendo presente che l'argomento principale dell'unità immaginaria è  $\frac{\pi}{2}$ , otteniamo che le due determinazioni della radice quadrata (in campo complesso) del numero  $i \frac{\Omega}{\nu}$  sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = -\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} (1 + i).$$

Se poniamo:

$$m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}},$$

allora la soluzione generale dell'omogenea associata alla (6.3.16) è:

$$\hat{F}(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} \quad (6.3.17)$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie a valori complessi.

Per quanto riguarda  $F^*$ , la cerchiamo della forma:

$$F^* = A \quad \text{con } A = \text{costante.}$$

Sostituendo nella (6.3.16), otteniamo

$$-i \frac{\Omega}{\nu} A = -i \frac{\Omega}{\nu} F_0 \quad \implies \quad A = F_0.$$

In conclusione la soluzione generale della (6.3.16) è :

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + C_2 e^{m(1+i)x_3} + F_0. \quad (6.3.18)$$

Per determinare le due costanti arbitrarie  $C_1$  e  $C_2$  sfruttiamo le altre condizioni cui deve soddisfare  $\vec{v}$  che ancora non abbiamo sfruttato.

In particolare la condizione 3) richiede che le componenti di  $\vec{v}$  siano limitate rispetto a  $x_3 \in [0, +\infty)$  e che quindi siano limitate le due funzioni  $f$  e  $g$ . Se allora teniamo presente che  $e^{mx_3}$  tende a  $+\infty$  per  $x_3 \rightarrow +\infty$ , per avere la limitatezza dobbiamo porre

$$C_2 = 0.$$

Dunque la (6.3.18) si riduce a:

$$F(x_3) = C_1 e^{-m(1+i)x_3} + F_0. \quad (6.3.19)$$

Sfruttiamo ora la condizione al contorno per determinare  $C_1$ :

$$\vec{v}\Big|_{\Pi} = \vec{\Omega} \times (P - O)\Big|_{\Pi}$$

fornisce:

$$v_1(x_1, x_2, 0) = -\Omega x_2, \quad v_2(x_1, x_2, 0) = \Omega x_1, \quad v_3(x_1, x_2, 0) = 0.$$

La condizione su  $v_3$  è soddisfatta, mentre le condizioni su  $v_1$  e  $v_2$ , per la forma che abbiamo richiesto al campo della velocità, comportano:

$$\begin{aligned} -\Omega [x_2 - g(0)] = -\Omega x_2 &\implies g(0) = 0 \\ \Omega [x_1 - f(0)] = \Omega x_1 &\implies f(0) = 0. \end{aligned}$$

Dunque dalla condizione al contorno di aderenza ne discende:

$$F(0) = 0,$$

che fornisce:

$$C_1 = -F_0.$$

Dalla (6.3.19) otteniamo perciò:

$$F(x_3) = F_0[1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)] \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \quad (6.3.20)$$

Separiamo la parte reale e la parte immaginaria:

$$f(x) + i g(x_3) = (f_0 + i g_0) [1 - e^{-mx_3}(\cos mx_3 - i \sin mx_3)],$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f_0 (1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) - g_0 e^{-mx_3} \sin mx_3 \\ g(x_3) &= g_0 (1 - e^{-mx_3} \cos mx_3) + f_0 e^{-mx_3} \sin mx_3 \quad \forall x_3 \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

I risultati ottenuti ci portano ad enunciare il seguente

**Teorema 6.3.** *Sia dato un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, che occupi il semispazio  $S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : x_3 \geq 0\}$  limitato dal piano rigido  $x_3 = 0$  rotante attorno all'asse  $Ox_3$  fissato, con velocità angolare costante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$ ,  $\Omega > 0$ . Allora, se il campo della pressione modificata è dato dalla (6.3.1), la velocità  $\vec{v}$  di tale fluido in moto stazionario, soddisfacente le ipotesi 1), 2), 3) ha le componenti date da (6.3.2), (6.3.3), (6.3.4) con  $f$  e  $g$  definite in (6.3.21).*



Possiamo fare alcune osservazioni.

**Osservazione 6.2.** Se facciamo il limite per  $x_3 \rightarrow +\infty$  in entrambi i membri delle (6.3.21) otteniamo:

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} f(x_3) = f_0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} g(x_3) = g_0.$$

Questo risultato stabilisce che per  $x_3 \rightarrow +\infty$ ,  $\vec{v}$  differisce dalla velocità nel moto rotatorio uniforme attorno all'asse  $Ox_3$  con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  per il vettore costante  $\vec{v}_0 = \Omega(g_0 \vec{e}_1 - f_0 \vec{e}_2)$ . Infatti all'infinito abbiamo:

$$v_1 = -\Omega(x_2 - g_0), \quad v_2 = \Omega(x_1 - f_0), \quad v_3 = 0.$$

Notiamo che all'infinito si ha ancora un moto rotatorio uniforme con velocità angolare  $\vec{\Omega}$  non attorno all'asse  $Ox_3$ , ma attorno all'asse  $P_0x'_3$ .

**Osservazione 6.3.** Il gradiente del campo di pressione  $p^*$  dato dalla (6.3.1) differisce dal gradiente di  $p^{*(R)}$  per il vettore costante  $\vec{c}_0 = -\Omega^2(f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2)$  che è ortogonale al vettore  $\vec{v}_0$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \text{grad } p^{*(R)} &= \Omega^2(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \\ \text{grad } p^* &= \Omega^2[(x_1 - f_0) \vec{e}_1 + (x_2 - g_0) \vec{e}_2] = \text{grad } p^{*(R)} + \vec{c}_0. \end{aligned}$$

Notiamo che  $\vec{c}_0$  è parallelo al vettore  $P_0 - 0 = f_0 \vec{e}_1 + g_0 \vec{e}_2$  che determina la traslazione dell'asse di rotazione del moto rotatorio all'infinito.

**Osservazione 6.4.** Per ogni  $(f_0, g_0) \in \mathbb{R}^2$  esiste uno ed un sol moto del tipo detto sopra. Inoltre, se  $f_0 = g_0 = 0$ , ritroviamo la soluzione banale  $(\vec{v}^{(R)}, p^{*(R)})$ , come doveva essere.

**Osservazione 6.5.** Consideriamo il cammino  $\Lambda$ , luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo  $\vec{v}$ . Come abbiamo visto, le sue equazioni parametriche cartesiane sono:

$$x_1 = f(c), \quad x_2 = g(c), \quad x_3 = c, \quad c \in [0, +\infty).$$

Se  $c = 0$  otteniamo il punto di  $\Lambda$  di coordinate  $(f(0) = 0, g(0) = 0, 0)$ ; dunque il cammino  $\Lambda$  parte dall'origine  $O$ . Per  $c \rightarrow +\infty$ , abbiamo:

$$x_1 \rightarrow f_0, \quad x_2 \rightarrow g_0, \quad x_3 \rightarrow +\infty.$$

Perciò per  $x_3 \rightarrow +\infty$  il cammino  $\Lambda$  tende a sovrapporsi all'asse  $P_0x'_3$  e quindi a disporsi parallelamente all'asse  $Ox_3$ .

**Osservazione 6.6.** Osserviamo che se  $\nu = 0$ , ossia se il fluido è perfetto, nell'ipotesi che  $p^*$  abbia la forma (6.3.1), il sistema (6.3.9), (6.3.10) ha come unica soluzione

$$f(x_3) = f_0, \quad g(x_3) = g_0 \quad \forall x_3 \geq 0.$$

Dunque nel caso di fluido perfetto, se assumiamo che  $p^*$  sia data dalla (6.3.1), il moto in tutto il semispazio risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità angolare  $\Omega$  attorno all'asse  $P_0x'_3$ .

Mostriamo ora alcuni esempi numerici.

I grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  sono dati per  $f_0 = 10 \text{ m}$ ,  $g_0 = 2 \text{ m}$ ,  $\nu = 0,001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Le figure 6.4 e 6.6 mostrano i grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$  e  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$  rispettivamente, mentre le altre due mostrano i grafici del luogo dei centri delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso del campo  $\vec{v}$  con le rispettive proiezioni.

Esaminando le figure 6.4 e 6.6 vediamo che nella regione occupata dal fluido c'è uno strato al contorno (*boundary layer*) a contatto col piano  $x_3 = 0$  in cui il moto del fluido non è un moto rigido di rotazione.

Al di là di tale strato il moto risulta un moto rigido di rotazione uniforme con velocità angolare  $\Omega$  attorno all'asse  $P_0x'_3$ , come avremmo in tutto il semispazio se il fluido fosse perfetto.

Lo spessore del boundary layer, come si deduce tenendo presente l'espressione di  $m = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$ , diminuisce all'aumentare di  $\Omega$  ed al diminuire di  $\nu$ .

Del problema esaminato sopra si possono anche studiare alcune varianti.

Possiamo ad esempio supporre che il fluido sia compreso tra due piani paralleli  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  che ruotano uniformemente con la stessa velocità angolare  $\vec{\Omega}$  attorno ad uno stesso asse ad essi normale.

Il problema può essere ulteriormente complicato assumendo che i due piani ruotino attorno a due assi diversi ad essi normali. Quest'ultima variante è molto interessante dal punto di vista fisico perché trova applicazione nel **reometro**, strumento che viene utilizzato per misurare il coefficiente di viscosità dei liquidi.

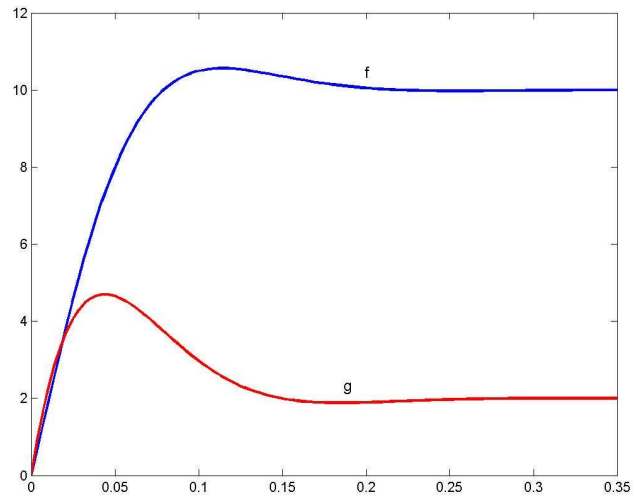


Figura 6.4: Grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ .

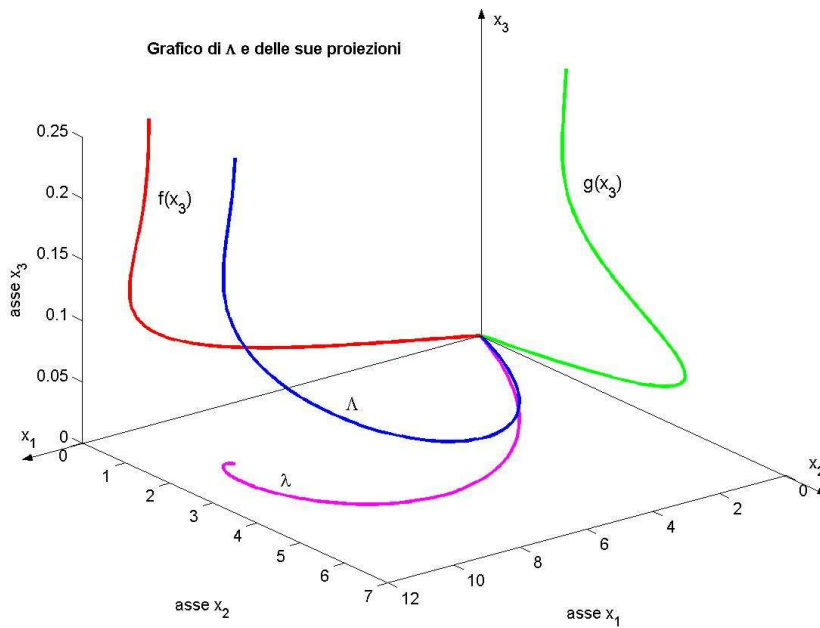


Figura 6.5: Grafico di  $\Lambda$  e delle sue proiezioni quando  $\Omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ .

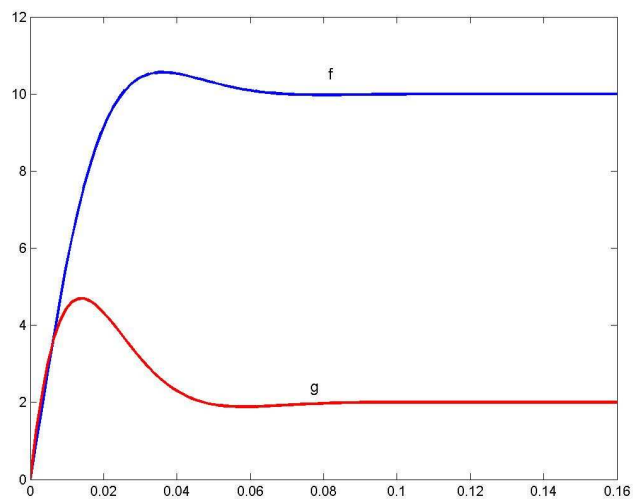


Figura 6.6: Grafici di  $f$  e  $g$  quando  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ .

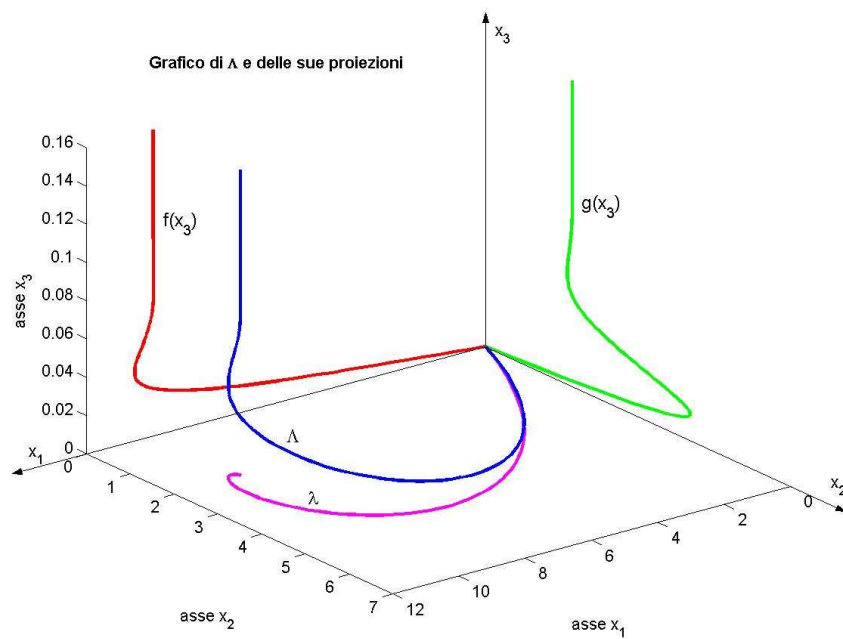


Figura 6.7: Grafico di  $\Lambda$  e delle sue proiezioni quando  $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ .

# Capitolo 7

## Magnetofluidodinamica

### 7.1 Brevi richiami di elettromagnetismo

Nell'elettromagnetismo dei corpi continui, svolgono un ruolo fondamentale i seguenti campi, che in genere dipendono da  $P$  e da  $t$ :

- $\vec{E}$  campo elettrico;
- $\vec{H}$  campo magnetico;
- $\vec{D}$  induzione elettrica o vettore spostamento;
- $\vec{B}$  induzione magnetica;
- $\rho_e$  densità di volume delle cariche elettriche;
- $\vec{J}$  densità di corrente elettrica.

**Definizione 7.1.** *Diremo che una regione dello spazio è sede di fenomeni elettromagnetici in un certo intervallo di tempo se in ogni punto di tale regione e ad ogni istante sono definiti i campi introdotti precedentemente.*

I campi che intervengono nell'elettromagnetismo, nell'ipotesi che siano sufficientemente regolari, sono legati tra loro dalle quattro equazioni di Maxwell che, scritte in un opportuno sistema di misura, precisamente nel Sistema Inter-

nazionale (SI), hanno la forma:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (7.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e. \quad (7.1.4)$$

Tali equazioni sono soddisfatte in ogni punto della regione  $S$  sede di fenomeni elettromagnetici ed ad ogni istante dell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  in cui i fenomeni stessi sono osservati.

Le equazioni di Maxwell esprimono in forma locale le quattro leggi, dedotte sperimentalmente, che sono alla base dell'elettromagnetismo e che sono espresse in forma globale. Precisamente la (7.1.1) è conseguenza della legge di Oersted-Ampère, la (7.1.2) della legge di Faraday-Neumann, le (7.1.3) e (7.1.4) delle leggi di Gauss per l'induzione magnetica e l'induzione elettrica rispettivamente. Per brevità, non richiamiamo tali leggi.

Si osservi che se supponiamo  $\vec{H}, \vec{D} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$  e  $\vec{J}, \rho_e \in \mathcal{C}^1(S \times [t_0, t_1])$ , da (7.1.1) e (7.1.4) si deduce l'equazione:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1]. \quad (7.1.5)$$

Infatti basta applicare l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (7.1.1), tenere presente che  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$  e sostituire a  $\operatorname{div} \vec{D}$  la densità delle cariche elettriche  $\rho_e$  come conseguenza della (7.1.4).

La (7.1.5) si potrebbe ottenere anche partendo dalla relazione globale che esprime il principio di conservazione della carica elettrica. Per tale motivo la (7.1.5) è nota come **equazione di continuità dell'elettromagnetismo**.

Per quanto riguarda la densità di corrente  $\vec{J}$ , si distingue tra *corrente di conduzione* e *corrente di convezione*.

La prima è dovuta al moto di cariche elettriche senza trasporto di materia e caratterizza i conduttori, mentre la seconda è dovuta al moto di cariche elettriche con trasporto di materia ed è presente nelle soluzioni elettrolitiche.

Le equazioni (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4) e (7.1.5) esprimono quelle proprietà fondamentali che sussistono per tutti i continui che sono sede di fenomeni

elettromagnetici.

A tali equazioni dobbiamo quindi associare le relazioni che caratterizzano dal punto di vista fisico il comportamento elettromagnetico del mezzo reale che si studia, cioè le **equazioni costitutive elettromagnetiche**, che si presentano nella forma:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}(\vec{H}) \\ \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}) \\ \vec{J} &= \vec{J}(\vec{E})\end{aligned}\tag{7.1.6}$$

dove l'ultima equazione sussiste per un conduttore rigido in quiete.

Se le proprietà elettriche e magnetiche del mezzo reale preso in esame sono indipendenti dalla direzione, le (7.1.6)<sub>1</sub> e (7.1.6)<sub>2</sub> si presentano nel modo seguente:

$$\vec{B} = \mu_e \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}\tag{7.1.7}$$

dove  $\mu_e$  ed  $\epsilon$  sono campi scalari dipendenti da  $P$  che si ottengono sperimentalmente, detti rispettivamente *permeabilità magnetica* e *permeabilità elettrica*. Se il mezzo è omogeneo,  $\mu_e$  e  $\epsilon$  sono delle costanti ed, in particolare,  $\epsilon$  è detta *costante dielettrica*.

Più in generale, in luogo delle (7.1.7) potremmo avere relazioni lineari della forma

$$\vec{D} = \tilde{\mu}_e \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

con  $\tilde{\mu}_e$  ed  $\tilde{\epsilon}$  campi tensoriali del secondo ordine.

Per quanto riguarda la densità della corrente di conduzione in un conduttore rigido in quiete, la relazione più semplice tra  $\vec{J}$  ed  $\vec{E}$  è la seguente

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}\tag{7.1.8}$$

con  $\sigma_e$  campo scalare dipendente da  $P$  detto *coefficiente di conducibilità elettrica*.

Se per un conduttore elettrico sussiste la (7.1.8), si dice che questo è isotropo.

Si noti che il campo di variazione dei valori di  $\sigma_e$  è enorme. Ad esempio, la conduttività del rame è  $10^7$  volte maggiore di quella dell'acqua di mare che è considerata un buon conduttore e  $10^{19}$  volte maggiore di quella del vetro comune.

Anche per  $\vec{J}$ , in luogo delle (7.1.8), possiamo avere una relazione lineare più complessa della forma:

$$\vec{J} = \tilde{\sigma}_e \cdot \vec{E}$$

con  $\tilde{\sigma}_e$  campo tensoriale del secondo ordine.

Note le equazioni costitutive (7.1.6), i campi incogniti scalari si riducono a 7 ( $E_i, H_i, \rho_e$  con  $i = 1, 2, 3$ ). Tali campi soddisfano alle quattro equazioni di Maxwell equivalenti ad otto equazioni scalari.

Ma, come si verifica facilmente, se supponiamo  $\vec{B}, \vec{E} \in \mathcal{C}^2(S \times [t_0, t_1])$ , la (7.1.3) non è indipendente dalla (7.1.2).

Infatti se applichiamo l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (7.1.2), tenendo presente che  $\text{div rot } \vec{E} = 0$ , deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0 \text{ in } S \times [t_0, t_1].$$

Dunque il campo scalare  $\text{div } \vec{B}$  risulta indipendente dal tempo. Se assumiamo che all'istante iniziale  $t_0$   $\text{div } \vec{B} = 0$  in  $S$ , otteniamo  $\text{div } \vec{B} = 0$  in  $S \times [t_0, t_1]$ , ossia la (7.1.3).

Per impostare il problema in maniera completa dobbiamo poi associare alle equazioni di Maxwell ed alle equazioni costitutive opportune condizioni iniziali ed al contorno.

Le condizioni iniziali consistono nell'assegnare all'istante iniziale  $t_0$  il campo elettrico ed il campo magnetico

$$\vec{E}(P, t_0) = \vec{E}_0(P), \quad \vec{H}(P, t_0) = \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S.$$

Per quanto riguarda le **condizioni al contorno**, queste dipendono dal problema fisico che si studia e devono comunque tenere conto delle condizioni di passaggio. Consideriamo nella regione in cui si studiano i fenomeni elettromagnetici, due corpi continui, separati da una superficie  $\Sigma$  e sia  $\vec{n}$  il versore della normale a  $\Sigma$  rivolto ad esempio verso il secondo corpo.

Si dimostra che, come conseguenze delle leggi fisiche alla base dell'elettromagnetismo, i campi vettoriali  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$  devono soddisfare alle seguenti **condizioni di passaggio**:

- $\vec{n} \times \vec{E}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua attraverso  $\Sigma$  la componente di  $\vec{E}$  nel piano tangente a  $\Sigma$ ;
- $\vec{n} \times \vec{H}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua attraverso  $\Sigma$  la componente di  $\vec{H}$  nel piano tangente a  $\Sigma$ ;
- $\vec{n} \cdot \vec{B}$  è continuo attraverso  $\Sigma$ , cioè è continua la componente normale di  $\vec{B}$  attraverso  $\Sigma$ ;



- La componente normale di  $\vec{D}$  subisce una discontinuità attraverso  $\Sigma$  :

$$(\vec{n} \cdot \vec{D})_2 - (\vec{n} \cdot \vec{D})_1 = \omega_e$$

dove  $\omega_e$  è la densità superficiale di cariche elettriche presenti su  $\Sigma$ .

## 7.2 Elementi di magnetofluidodinamica

La magnetofluidodinamica studia le interazioni macroscopiche tra liquidi o gas conduttori di elettricità ed i campi elettromagnetici.

I fenomeni che si studiano nella magnetofluidodinamica si presentano quando si ha a che fare con metalli liquidi (ad esempio mercurio e sodio liquidi), con liquidi biologici (come ad esempio il sangue), con soluzioni elettrolitiche e con gas a temperature molto elevate che subiscono un processo di ionizzazione.

Un gas ionizzato in assenza di un campo magnetico esterno si comporta come un gas classico, ossia non conduttore; se invece viene immerso in un campo magnetico esterno compaiono fenomeni che normalmente non si osservano in fluidi non conduttori. Lo studio di un gas ionizzato è comunque molto complesso in quanto compaiono diversi tipi di particelle.

Per lo studio dell'interazione tra un fluido conduttore di elettricità e campi elettromagnetici, possiamo adottare due modelli:

### 1. MAGNETOFLUIDODINAMICA CLASSICA

Il fluido conduttore di elettricità viene visto come un corpo continuo. Tale modello, nel caso di gas ionizzati, è utilizzato solo nei casi particolari di un campo magnetico esterno debole o di una scarsa ionizzazione del gas.

### 2. FISICA DEI PLASMI

E' basata su considerazioni di tipo statistico che portano alle equazioni di Boltzmann ed alla teoria cinetica. Tale modello è utilizzato soprattutto nel caso di gas altamente ionizzati.

Il nostro scopo è rimanere nell'ambito della magnetofluidodinamica, o meglio della magnetoidrodinamica, nella quale si considerano fluidi incomprimibili atti a rappresentare liquidi reali.

La magnetoidrodinamica, la magnetogasdinamica e la fisica dei plasmi intervengono notevolmente in natura: basti pensare agli oceani, alle aurore boreali, ai lampi, ai fulmini ed alle tempeste solari.

Nell'industria i plasmi ed i gas ad alte temperature vengono utilizzati per studiare il comportamento dei materiali quando vengono sottoposti ad alte temperature. Gas ad alte temperature vengono anche impiegati nelle centrali nucleari e, più in generale, nei generatori di energia.

Le soluzioni elettrolitiche sono di primaria importanza nell'industria chimica. La magnetofluidodinamica interviene anche in biomedicina poichè i fluidi biologici sono influenzati dall'applicazione di un campo magnetico esterno, come avviene ad esempio nella risonanza magnetica.

Ricordiamo infine che la ionosfera che consente le comunicazioni radio è un plasma e che la magnetogasdinamica è in generale molto sfruttata nell'industria aeronautica.

Noi ci limitiamo solo allo studio del moto di un fluido incompressibile, conduttore di elettricità immerso in un campo magnetico esterno o, eventualmente, anche in un campo elettrico esterno.

E' evidente che le equazioni che utilizzeremo per affrontare un tale problema saranno una combinazione delle equazioni che governano il moto di un fluido (perfetto, newtoniano o anche di natura più generale) in assenza di un campo elettromagnetico, opportunamente modificate, e delle equazioni di Maxwell

Consideriamo un fluido viscoso classico, incompressibile, conduttore di elettricità. Supponiamo che il fluido sia omogeneo, ossia  $\rho = \text{costante} > 0$  e che sia newtoniano con  $\mu = \text{costante} > 0$ .

Se il fluido è immerso in un campo elettromagnetico, oltre a  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  e a  $p(P, t)$ , dobbiamo introdurre i quattro campi vettoriali che intervengono in Elettromagnetismo:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}(P, t) && \text{(campo magnetico)} \\ \vec{B} &= \vec{B}(P, t) && \text{(campo induzione magnetica)} \\ \vec{E} &= \vec{E}(P, t) && \text{(campo elettrico)} \\ \vec{D} &= \vec{D}(P, t) && \text{(campo spostamento elettrico o induzione elettrica).}\end{aligned}$$

Inoltre, essendo il fluido conduttore, sarà definito anche il campo della densità della corrente elettrica di conduzione

$$\vec{J} = \vec{J}(P, t).$$

Assumiamo poi che le proprietà elettriche e magnetiche dal fluido siano indipendenti dalla direzione e che si abbia precisamente:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \text{cost} > 0 && \text{(costante dielettrica);} \\ \sigma_e &= \text{cost} > 0 && \text{(coefficiente di conducibilità elettrica);} \\ \mu_e &= \text{cost} > 0 && \text{(permeabilità magnetica).}\end{aligned}$$

Per semplicità aggiungiamo l'ipotesi che la costante dielettrica  $\epsilon$  sia sufficientemente piccola da poter considerare trascurabile la *corrente di spostamento*, data

da  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

L'interazione del fluido con il campo magnetico (ed eventualmente con quello elettrico) esterno, in cui è immerso, produce un campo magnetico ed elettrico indotti e questi una corrente elettrica. D'altra parte il campo elettromagnetico così come la corrente elettrica danno origine a forze di massa di natura elettromagnetica (forze di Lorentz) che agiscono sul fluido e che si aggiungono alle forze esterne di natura meccanica.

Se si suppone che nel fluido non siano distribuite cariche elettriche libere, la densità delle forze di Lorentz è data da

$$\vec{F}_{em} = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Dunque, preso un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del fluido occupante all'istante  $t$  la regione  $\mathcal{S}^*(t)$ , il risultante ed il momento risultante delle forze esterne agenti su  $\mathcal{C}^*$  sono dati da

$$\begin{aligned} \vec{R}^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[ \rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B} \right] dS + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma \\ \vec{\Omega}_o^*(t) &= \int_{\mathcal{S}^*(t)} \left[ (P - O) \times (\rho \vec{F} + \vec{J} \times \vec{B}) \right] dS + \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{S}^*(t)} \left[ (P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) \right] d\Sigma, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

dove  $O$  è un punto dello spazio geometrico, fisso rispetto all'osservatore.

La presenza del termine aggiuntivo  $\vec{J} \times \vec{B}$  modifica la prima equazione indefinita della meccanica che, sfruttando le relazioni sforzo-deformazione e l'incompressibilità del fluido, assume la forma

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B}.$$

Non viene invece modificata la seconda equazione indefinita della meccanica che porta sempre alla simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Scriviamo le equazioni che governano il moto di un fluido newtoniano omogeneo, incompressibile, conduttore di elettricità in presenza di un campo elettromagnetico.

### 1. Prima equazione indefinita della meccanica, avendo sfruttato la relazione sforzo-deformazione:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.2.2)$$

## 2. Condizione d'incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (7.2.3)$$

## 3. Equazioni di Maxwell, avendo trascurato la corrente di spostamento e supposto che non ci siano cariche elettriche libere:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

4. Equazioni costitutive per  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{J}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_e \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

La presenza del termine  $\sigma_e(\vec{v} \times \vec{B})$  nell'equazione (7.2.5)<sub>3</sub> è dovuta al fatto che abbiamo un fluido in moto. Nel caso di un gas debolmente ionizzato in un campo magnetico esterno intenso, l'equazione costitutiva per  $\vec{J}$  sarebbe più complicata a causa della comparsa di ulteriori fenomeni come l'effetto Hall e l'effetto ion-slip, che noi non prendiamo in considerazione.

Utilizzando le (7.2.5), riscriviamo le equazioni di Maxwell (7.2.4) nella forma :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \mu_e \vec{H}) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Analogamente la prima equazione indefinita si può scrivere nel modo seguente:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}.$$

Se supponiamo  $\vec{H}$  di classe  $\mathcal{C}^2$ , sfruttando le (7.2.6)<sub>1,2</sub> possiamo eliminare il campo elettrico  $\vec{E}$  dalle equazioni che governano il moto del fluido.

Infatti applicando ad entrambi i membri della (7.2.6)<sub>1</sub> l'operatore rotore deduciamo:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \sigma_e \text{rot} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

da cui, essendo  $\text{rot } \vec{E} = -\mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , si ha:

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Poichè  $\vec{H} \in C^2$ , per la (7.2.6)<sub>3</sub>, otteniamo

$$\Delta \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \text{rot rot } \vec{H} = -\text{rot rot } \vec{H}.$$

Perciò:

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma_e \mu_e \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma_e \mu_e \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Se poniamo  $\eta_e = \frac{1}{\sigma_e \mu_e}$ , detta *resistività*, si ha:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}).$$

Dunque le equazioni che governano la magnetoidrodinamica di un fluido newtoniano, omogeneo, incomprimibile, conduttore di elettricità si riducono a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\mu_e}{\rho} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} & (7.2.7) \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \eta_e \Delta \vec{H} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Le incognite scalari sono 7 :  $v_i$ ,  $p$ ,  $H_i$  con  $i = 1, 2, 3$ .

Per enunciare il problema ai limiti in maniera completa, dobbiamo associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Se  $t_0 = 0$  le condizioni iniziali sono:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \\ \vec{H}(P, 0) &= \vec{H}_0(P) \quad \forall P \in S(0). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, supponiamo che la frontiera  $\partial S(t)$  sia formata da pareti materiali rigide, il cui atto di moto è dato da:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t)$$

e che le pareti  $\partial S(t)$  non siano conduttrici di elettricità.

Allora,  $\forall t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{\partial S(t)} &= \vec{V} \\ \vec{H}_\tau|_{\partial S(t)} &= \vec{H}_{e\tau}|_{\partial S(t)} \end{aligned}$$

dove il pedice  $\tau$  è stato utilizzato per denotare la componente di  $\vec{H}$  e del campo magnetico esterno  $\vec{H}_e$  nel piano tangente a  $\partial S(t)$ .

Osserviamo che la condizione al contorno per  $\vec{H}$  è conseguenza delle condizioni di passaggio enunciate nel paragrafo precedente.

Concludiamo con l'osservazione che si potrebbero scrivere facilmente anche le equazioni che governano il moto di un fluido conduttore di elettricità perfetto, omogeneo ed incompressibile oppure di altra natura, purchè omogeneo ed incompressibile, immerso in un campo elettromagnetico.

Si scrivono le equazioni che ne governano il moto in assenza del campo elettromagnetico modificando soltanto la prima equazione indefinita con l'inserimento del termine:

$$\mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H},$$

dovuto alle forze di Lorentz e si aggiungono le equazioni di Maxwell.

Nei due paragrafi successivi studiamo i moti di Poiseuille e di Couette tra due piani paralleli per un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, già studiati nel Capitolo 5, assumendo che il fluido sia conduttore di elettricità e che sia applicato un campo magnetico esterno costante normale ai due piani.

### 7.3 Moto di Poiseuille tra due piani in un campo magnetico esterno

Consideriamo un fluido newtoniano, incompressibile, omogeneo, conduttore di elettricità, in assenza di forze di massa meccaniche ( $\vec{F} \equiv \vec{0}$ ) che si muova di moto stazionario tra due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , paralleli, rigidi, fissi rispetto all'osservatore.

Supponiamo inoltre che il fluido sia immerso in un campo magnetico esterno

costante,  $\vec{H}_0$ , diretto perpendicolarmente ai due piani ed orientato da  $\Pi_1$  verso  $\Pi_2$ .

Fissiamo il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  come nel Capitolo 5, per cui:

$$\Pi_\alpha = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h\}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$S = \{P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h]\},$$

essendo  $2h$  la distanza tra i due piani.

Poichè siamo in condizioni stazionarie:

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad p = p(P), \quad \vec{H} = \vec{H}(P).$$

Per le ipotesi in cui ci siamo posti, le equazioni che governano il moto del fluido preso in esame in  $S$  si riducono a:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \mu_e \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \eta_e \Delta \vec{H} &= \operatorname{rot} (\vec{H} \times \vec{v}) \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

A tali equazioni associamo le condizioni al contorno

$$\vec{v}|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_{\Pi_2} = \vec{0} \tag{7.3.2}$$

$$\vec{H}_\tau|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{H}_\tau|_{\Pi_2} = \vec{0}. \tag{7.3.3}$$

Le (7.3.2) sono le usuali condizioni di aderenza.

Le (7.3.3) sono conseguenze della continuità della componente tangenziale del campo magnetico attraverso i due piani  $\Pi_1, \Pi_2$  e del fatto che il campo magnetico esterno è  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$ , per cui  $\vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_1} = \vec{H}_{0\tau}|_{\Pi_2} = \vec{0}$ .

Risolvere il problema (7.3.1), (7.3.2), (7.3.3), significa trovare le terne  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ ,  $\vec{H} \in \mathcal{C}^2(S)$  tali che  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  soddisfa in  $S$  alle equazioni (7.3.1) e  $\vec{v}, \vec{H}$  verificano le (7.3.2), (7.3.3).

A questo punto assumiamo che al di fuori della regione occupata dal fluido, dove il campo magnetico è quello esterno, cioè  $\vec{H}_0$ , ci sia il vuoto e che il fluido abbia la stessa permeabilità magnetica del vuoto. Questa condizione non è restrittiva perchè è soddisfatta nella realtà da molti metalli liquidi, come ad esempio il mercurio.

In base a tale ipotesi, per le condizioni di passaggio dell'elettromagnetismo,

risulta continua attraverso i due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  anche la componente normale del campo magnetico.

Un moto di Poiseuille per il fluido preso in esame, immerso nel campo magnetico  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$  è costituito da una terna  $(\vec{v}, p, \vec{H})$  che sia soluzione del problema (7.3.1), (7.3.2), (7.3.3), con  $\vec{v}, \vec{H}$  soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- i)  $\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1$  in  $\xi(S)$
- ii)  $\vec{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1 + H_0 \vec{e}_2$  in  $\xi(S)$

dove  $\vec{H} = \hat{H} \vec{e}_1$  è il campo magnetico indotto.

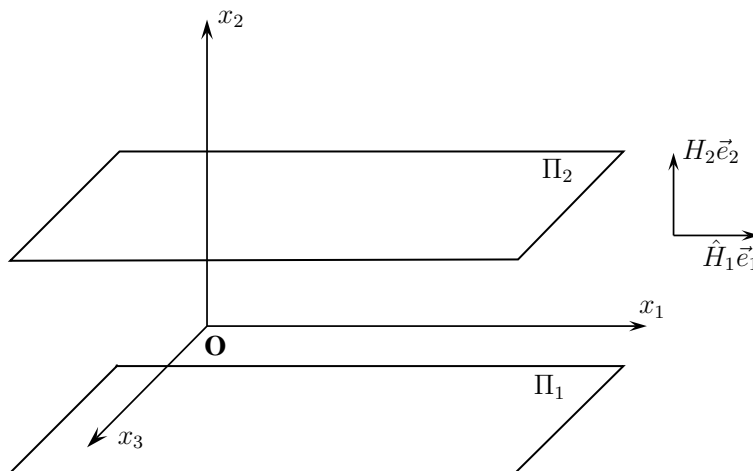


Figura 7.1: Geometria del problema in presenza del campo magnetico.

**Osservazione 7.1.** Se la permeabilità magnetica  $\mu_e$  del fluido è diversa da quella del vuoto  $\mu_0$ , si richiede che il campo magnetico abbia la seguente rappresentazione analitica:

$$\vec{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1 + \frac{\mu_0}{\mu_e} H_0 \vec{e}_2 \quad \text{in } \xi(S).$$

per assicurare la continuità attraverso i due piani  $\Pi_1, \Pi_2$  della componente normale del vettore di induzione magnetica.

Grazie all'equazione  $\text{div } \vec{v} = 0$  si ha  $v_1 = v_1(x_2)$ ,  $x_2 \in [-h, h]$ .

Analogamente per  $\vec{H}$ :

$$\text{div } \vec{H} = \text{div } \hat{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}(x_2), \quad x_2 \in [-h, h].$$



Vediamo ora di scrivere in componenti la prima e la terza equazione di (7.3.1). Iniziamo col procurarci  $\text{rot } \vec{H}$ :

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{\hat{H}} = -\frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_3$$

da cui

$$\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} = -\frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_3 \times (H_0 \vec{e}_2 + \hat{H} \vec{e}_1) = H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{d\hat{H}}{dx_2} \hat{H} \vec{e}_2 = H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \vec{e}_1 - \frac{1}{2} \frac{d\hat{H}^2}{dx_2} \vec{e}_2.$$

Consideriamo poi

$$\vec{H} \times \vec{v} = (H_0 \vec{e}_2 + \hat{H} \vec{e}_1) \times v_1 \vec{e}_1 = -H_0 v_1 \vec{e}_3$$

e quindi

$$\text{rot } (\vec{H} \times \vec{v}) = -H_0 \text{rot } (v_1 \vec{e}_3) = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2} \vec{e}_1.$$

Andiamo ora a proiettare sugli assi coordinati la prima e la terza equazione di (7.3.1).

Ricordando che  $\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ , come abbiamo visto nel Capitolo 5, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\mu_e \frac{d}{dx_2} \left( \frac{\hat{H}^2}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} + p \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x_1, x_2) \\ \eta_e \frac{d^2 \hat{H}}{dx_2^2} &= -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Dalle (7.3.4)<sub>2</sub>, (7.3.4)<sub>3</sub> deduciamo che  $\mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} + p$  dipende solo da  $x_1$ .

Poichè  $\hat{H}$  dipende solo da  $x_2$ , abbiamo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \left[ p + \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2} \right].$$

E' conveniente porre

$$p^* = p + \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}$$

e definire  $p^*$  *pressione modificata*.

Con tale definizione, sostituendo nella (7.3.4)<sub>1</sub>, otteniamo:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = \mu \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2}(x_2). \quad (7.3.5)$$

Vediamo allora che il primo membro della (7.3.5) è funzione solo di  $x_1$ , mentre il secondo membro è funzione solo di  $x_2$ . Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti e la relazione (7.3.5) deve sussistere  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$ , concludiamo che necessariamente entrambi i membri della (7.3.5) devono essere uguali ad una stessa costante che denotiamo con  $-C$ .

Dunque la (7.3.5) dà luogo alle due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dp^*}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad (7.3.6)$$

$$\mu \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2}(x_2) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \quad (7.3.7)$$

Se integriamo la (7.3.6) otteniamo:

$$p^* = -Cx_1 + p_0^* \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

con  $p_0^*$  = costante arbitraria e  $C$  salto della pressione modificata  $p^*$  nella direzione  $Ox_1$ .

Tenendo presente la definizione di  $p^*$ , per la pressione effettiva  $p$  deduciamo la forma seguente:

$$p = -Cx_1 - \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^*.$$

La pressione ha un'espressione differente rispetto al moto di Poiseuille in assenza di campo magnetico, essendo presente il termine  $\hat{H}$  dipendente anche da  $x_2$ .

All'equazione (7.3.7)

$$\mu \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) + \mu_e H_0 \frac{d\hat{H}}{dx_2}(x_2) = -C$$

aggiungiamo l'equazione

$$\eta_e \frac{d^2\hat{H}}{dx_2^2} = -H_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \quad (7.3.8)$$

Per determinare i moti cercati, siamo così condotti a risolvere il problema differenziale, che si ottiene associando al sistema di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (7.3.7), (7.3.8) nelle due funzioni

incognite  $v_1 = v_1(x_2)$ ,  $\widehat{H} = \widehat{H}(x_2)$  le **condizioni al contorno**:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0 \quad (7.3.9)$$

$$\widehat{H}(-h) = \widehat{H}(h) = 0. \quad (7.3.10)$$

In primo luogo determiniamo la soluzione generale del sistema lineare (7.3.7), (7.3.8)

Integrando la (7.3.8) otteniamo:

$$\eta_e \frac{d\widehat{H}}{dx_2} = -H_0 v_1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\widehat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e}, \quad (7.3.11)$$

con  $C_1 =$  costante arbitraria.

Sostituendo nella (7.3.7) deduciamo:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} + \mu_e H_0 \left( -\frac{H_0}{\eta_e} v_1 + \frac{C_1}{\eta_e} \right) = -C$$

da cui

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - \frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{\mu_e H_0 C_1}{\eta_e \mu}.$$

Poniamo

$$\frac{\mu_e H_0^2}{\mu \eta_e} = \frac{\sigma_e \mu_e^2}{\mu} H_0^2 = A^2$$

per cui l'equazione precedente risulta:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} - A^2 v_1 = -\frac{C}{\mu} - \frac{A^2 C_1}{H_0}.$$

Otteniamo così un'equazione del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea nella sola funzione incognita  $v_1(x_2)$ .

La soluzione generale dell'equazione precedente è data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'omogenea si può scrivere nella forma:

$$C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2), \quad (7.3.12)$$

con  $C_2, C_3$  costanti arbitrarie, mentre una soluzione particolare della completa è una costante  $a$  tale che:

$$A^2 a = \frac{C}{\mu} + \frac{A^2 C_1}{H_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (7.3.13)$$

La soluzione generale dell'equazione completa è perciò:

$$v_1(x_2) = C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0}. \quad (7.3.14)$$

Sostituendo nella (7.3.11) si ha

$$\frac{d\hat{H}}{dx_2} = -\frac{H_0}{\eta_e} \left[ C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} \right],$$

equazione, che integrata, fornisce:

$$\hat{H}(x_2) = -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh(Ax_2) + C_3 \cosh(Ax_2)] - \frac{H_0 C x_2}{\eta_e \mu A^2} + C_4, \quad (7.3.15)$$

$C_4$  = costante arbitraria.

La soluzione generale del sistema (7.3.7), (7.3.8) è rappresentata dalla coppia  $(v_1, \hat{H})$ , dove  $v_1$  e  $\hat{H}$  sono date dalle (7.3.14) e (7.3.15) in cui compaiono le 4 costanti arbitrarie  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Per determinare le costanti, imponiamo le condizioni al contorno.

Quelle relative a  $v_1$  forniscono:

$$(v_1(-h) = 0) \quad C_2 \cosh(Ah) - C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0$$

$$(v_1(h) = 0) \quad C_2 \cosh(Ah) + C_3 \sinh(Ah) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0$$

Introduciamo ora il seguente parametro adimensionale, noto come *numero di Hartmann*:

$$M = Ah,$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$M = Ah = \sqrt{\frac{\mu_e}{\mu \eta_e}} H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} \mu_e H_0 h = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\mu}} B_0 h.$$

Le condizioni al contorno relative ad  $\hat{H}$  danno

$$(\hat{H}(-h) = 0) \quad -\frac{H_0}{\eta_e A} [-C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] + \frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0$$

$$(\hat{H}(h) = 0) \quad -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] - \frac{H_0 P h}{\mu \eta_e A^2} + C_4 = 0.$$

Dalle prime due equazioni deduciamo immediatamente che  $C_3 = 0$ ; analogamente dalle ultime due equazioni segue  $C_4 = 0$ .

Dalla terza equazione possiamo ricavare  $C_2$ :

$$C_2 \frac{H_0}{\eta_e A} \sinh M = -\frac{H_0 C h}{\mu \eta_e A^2} \implies C_2 = -\frac{C h}{\mu A} \frac{1}{\sinh M};$$

dalla prima si ottiene invece  $C_1$ , o meglio  $\frac{C_1}{H_0}$ :

$$\frac{C_1}{H_0} = -C_2 \cosh M - \frac{C}{\mu A^2} = -\frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M}.$$

Andando poi a sostituire nelle espressioni (7.3.14) e (7.3.15) di  $v_1$  e  $\hat{H}$ , deduciamo

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= -\frac{C h \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\mu A \sinh M} + \frac{C}{\mu A^2} - \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M} = \\ &= \frac{C h^2 \cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\mu M \sinh M}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(x_2) &= \frac{H_0 C h \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\eta_e A \mu A \sinh M} - \frac{H_0 C h x_2}{\mu \eta_e A^2 h} = \\ &= \frac{C h H_0 \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{\mu \eta_e A^2 \sinh M}, \end{aligned}$$

dove  $x_2 \in [-h, h]$ .

Scriviamo ora in maniera differente il coefficiente che compare nell'espressione di  $\hat{H}$ :

$$\frac{C h H_0}{\mu \eta_e A^2} = \frac{C h H_0}{\mu \eta_e} \frac{\mu \eta_e}{\mu_e H_0^2} = \frac{C h}{B_0}.$$

Perciò:

$$\hat{H}(x_2) = \frac{C h}{B_0} \frac{\sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M) \frac{x_2}{h}}{\sinh M}. \quad (7.3.16)$$

**Osservazione 7.2.** Se  $C = 0$ , ossia se la pressione modificata è costante, allora  $v_1(x_2) = 0$ ,  $\hat{H}(x_2) = 0$ ,  $\forall x_2 \in [-h, h]$ .

**Osservazione 7.3.** Fissati tutti gli altri parametri fisici del problema, in corrispondenza di ogni valore  $C$  del salto della pressione modificata si ha uno ed un solo moto della forma cercata.

Il moto di Poiseuille tra due piani fissi di un fluido newtoniano immerso in un campo magnetico esterno costante, perpendicolare ai due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , è anche noto come *moto di Hartmann*.

Possiamo sintetizzare i risultati trovati nel seguente:

**Teorema 7.1.** *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, conduttore di elettricità, occupante la regione  $S$  tra due piani paralleli, rigidi e fissi, immerso in un campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$  costante, normale ai due piani, un moto di Hartmann è possibile solo se la pressione modificata  $p^*$  presenta un salto  $C \neq 0$  nella direzione  $Ox_1$  parallela ai due piani, e precisamente si ha:*

$$p(x_1, x_2) = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^* \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1 \quad \vec{H} = \widehat{H}(x_2)\vec{e}_1 + H_0\vec{e}_2$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{Ch}{B_0} \frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M)\frac{x_2}{h}}{\sinh M} \quad x_2 \in [-h, h].$$

Supponiamo ora  $M \ll 1$  e nell'espressione di  $v_1$  sviluppiamo in serie di Taylor, con punto iniziale 0,  $\cosh M$ ,  $\cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)$  e  $\sinh M$ . Se trascuriamo i termini che contengono potenze di  $M$  di grado superiore al secondo, otteniamo per  $v_1$  la seguente espressione approssimata:

$$v_1(x_2) \cong \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2}\left(\frac{x_2}{h}\right)^2}{M} = \frac{Ch^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right]$$

che è l'espressione che abbiamo trovato per il moto di Poiseuille nel caso di un fluido non conduttore.

Per quanto riguarda  $\widehat{H}$ , procedendo nello stesso modo, deduciamo:

$$\widehat{H}(x_2) \cong \frac{Ch}{B_0} \frac{M\frac{x_2}{h} - M\frac{x_2}{h}}{M} = 0.$$

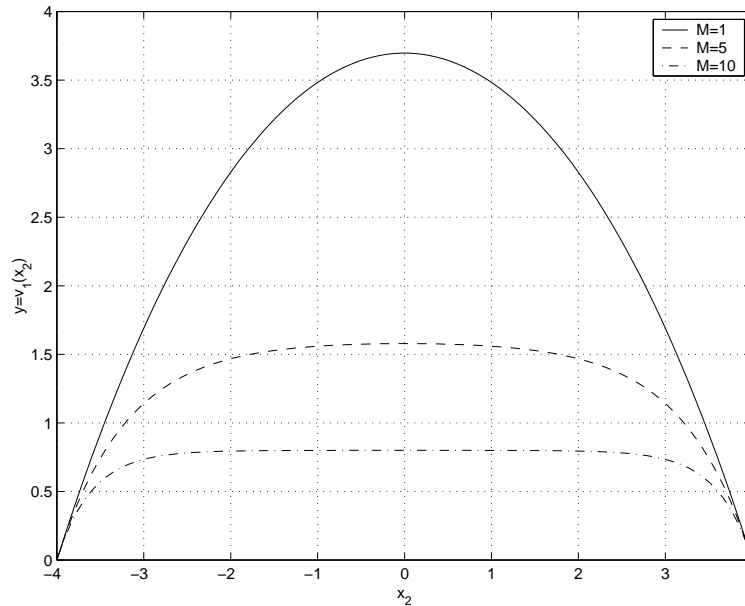


Figura 7.2: Grafico di  $v_1(x_2)$  per  $M = 1, 5, 10$ .

E' ora opportuno fornire i grafici di  $v_1(x_2)$  e  $\widehat{H}(x_2)$ , attribuendo ai parametri che compaiono in tali espressioni dei valori numerici fisicamente significativi. Riferiamoci sempre al mercurio liquido a temperatura ambiente, per il quale i valori numerici sono i seguenti:

$$\mu = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_e = 10^6 \text{ S m}^{-1}, \quad \mu_e = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}.$$

Per semplicità limitiamoci a considerare solo il caso  $C > 0$ .

Per mettere in rilievo l'influenza del campo magnetico esterno sul moto, supponiamo che  $C$  abbia lo stesso valore ( $> 0$ ) del Capitolo 5 nel moto di Poiseuille, mentre per  $M$  assumiamo tre valori possibili:

$$M = 1, \quad M = 5, \quad M = 10.$$

Come possiamo vedere esaminando la figura 7.2 e confrontandola con la 5.2, deduciamo che in presenza di  $\vec{H}_0$ , il grafico della velocità giace al di sotto di quello relativo al caso  $\vec{H}_0 = \vec{0}$ . Otteniamo inoltre che per  $M = 1$  l'andamento di  $v_1(x_2)$  non è molto dissimile dal caso  $\vec{H}_0 = \vec{0}$ , mentre all'aumentare di  $M$  la velocità risulta costante su un intervallo la cui ampiezza cresce al crescere di  $M$ . Dunque a contatto con i due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , si forma un boundary layer o strato al contorno, nei punti del quale la velocità aumenta rapidamente all'aumentare di  $x_2$  per poi assumere un valore costante.

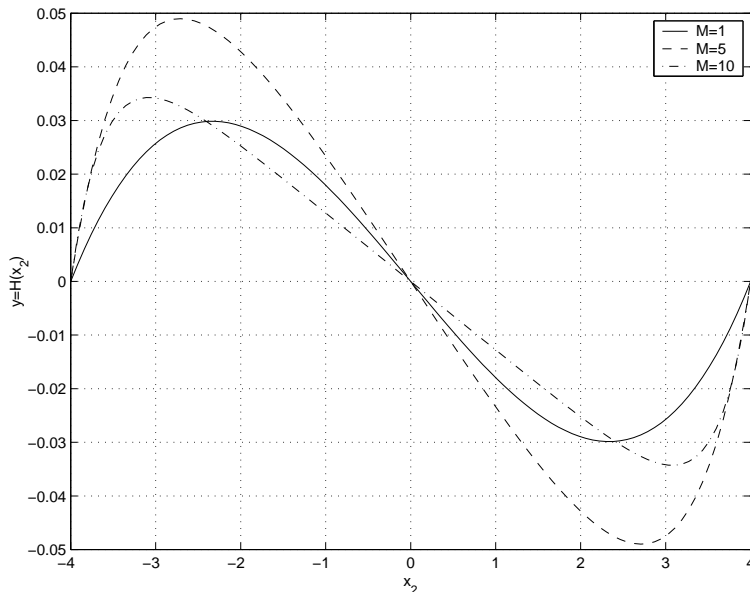


Figura 7.3: Grafico di  $\hat{H}(x_2)$  per  $M = 1, 5, 10$ .

Nella figura 7.3 è riportato l'andamento del campo magnetico indotto. Vediamo che il grafico è simmetrico rispetto all'origine e che  $\hat{H}$  presenta un massimo ed un minimo. Per  $M = 5$  il massimo è elevato ed il minimo assume un valore molto basso, mentre per  $M = 10$ , il massimo ed il minimo hanno valori vicini a quelli che riscontriamo per  $M = 1$ . Inoltre, in tutti e tre i casi, per  $x_2 = 0$  il campo magnetico indotto risulta uguale a zero.

## 7.4 Moto di Couette tra due piani in un campo magnetico esterno.

Consideriamo ora un problema analogo a quello di Couette per un fluido newtoniano considerato nel Capitolo 5.

Supponiamo che il fluido soddisfi alle stesse ipotesi del paragrafo precedente e che si muova di moto stazionario tra due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  rigidi, tra loro paralleli, di cui  $\Pi_1$  è fisso rispetto all'osservatore, mentre  $\Pi_2$  si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme, con velocità  $\vec{V}$  parallela al piano stesso.

Fissiamo il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$  con  $Ox_1$  punto equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  parallelo ai due piani con direzione e verso di  $\vec{V}$ , l'asse  $Ox_2$  normale ai due piani e l'asse  $Ox_3$  di conseguenza.

Come nel paragrafo precedente, supponiamo che il campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$ ,



in cui il fluido è immerso, sia costante, normale ai due piani ed orientato da  $\Pi_1$  verso  $\Pi_2$  per cui

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_2$$

con  $H_0$  costante positiva.

Anche in tal caso assumiamo che al di fuori della regione occupata dal fluido, dove il campo magnetico è quello esterno, cioè  $\vec{H}_0$ , ci sia il vuoto e che il fluido abbia la stessa permeabilità magnetica del vuoto.

Le equazioni che governano il moto del fluido sono le stesse del paragrafo precedente.

Inoltre, come per il moto di Hartmann, supponiamo

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1,$$

per cui, grazie alla condizione sulla divergenza

$$\vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1.$$

Anche nel nuovo problema esaminato cerchiamo il campo magnetico della forma:

$$\vec{H} = \hat{H} + H_0 \vec{e}_2$$

con  $\hat{H} = \hat{H}(x_1, x_2) \vec{e}_1$  campo magnetico indotto.

Grazie all'equazione  $\text{div } \vec{H} = 0$  deduciamo:

$$\hat{H} = \hat{H}(x_2) \vec{e}_1.$$

Rispetto al paragrafo precedente variano solo le condizioni al contorno per la velocità:

$$\vec{v}|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1 \quad (V = \text{cost} > 0).$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto visto per il moto di Poiseuille in presenza del campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$ , si arriva a stabilire per la pressione l'espressione

$$p = -Cx_1 - \mu_e \frac{\hat{H}^2}{2}(x_2) + p_0^*$$

con  $p_0^*$  costante arbitraria.

Inoltre  $(v_1(x_2), \hat{H}(x_2))$  è soluzione del sistema delle due equazioni differenziali ordinarie, visto nel paragrafo precedente. La sua soluzione generale, ottenuta in precedenza, è data da:

$$v_1(x_2) = C_2 \cosh(Ax_2) + C_3 \sinh(Ax_2) + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} \quad (7.4.1)$$

$$\hat{H}(x_2) = -\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh(Ax_2) + C_3 \cosh(Ax_2)] - \frac{CH_0 x_2}{\eta_e \mu A^2} + C_4 \quad (7.4.2)$$

dove  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sono costanti arbitrarie da determinarsi mediante le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v_1(-h) &= 0 & v_1(h) &= V \\ \widehat{H}(-h) &= 0 & \widehat{H}(h) &= 0. \end{aligned}$$

Le prime due condizioni danno luogo alle due equazioni

$$C_2 \cosh M - C_3 \sinh M + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = 0 \quad (7.4.3)$$

$$C_2 \cosh M + C_3 \sinh M + \frac{C}{\mu A^2} + \frac{C_1}{H_0} = V \quad (7.4.4)$$

con  $M = Ah$ , numero di Hartmann.

Le condizioni al contorno per  $\widehat{H}$  forniscono

$$-\frac{H_0}{\eta_e A} [-C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] + \frac{CH_0 h}{\eta_e \mu A^2} + C_4 = 0 \quad (7.4.5)$$

$$-\frac{H_0}{\eta_e A} [C_2 \sinh M + C_3 \cosh M] - \frac{CH_0 h}{\eta_e \mu A^2} + C_4 = 0. \quad (7.4.6)$$

Sottraendo la (7.4.3) da (7.4.4), membro a membro, otteniamo:

$$2C_3 \sinh M = V \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{V}{2} \frac{1}{\sinh M}.$$

Sommando membro a membro (7.4.5) e (7.4.6) ed utilizzando l'espressione di  $C_3$ , deduciamo

$$\frac{2H_0 V \cosh M}{\eta_e A 2 \sinh M} = 2C_4$$

da cui

$$C_4 = \frac{H_0 V \cosh M}{2\eta_e A \sinh M}$$

Dall'equazione (7.4.5) possiamo ricavare  $C_2$ . Infatti

$$\frac{H_0 C_2}{\eta_e A} \sinh M = -\frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2}$$

che fornisce

$$C_2 = -\frac{C h}{\mu A} \frac{1}{\sinh M}.$$

Dall'equazione (7.4.3) ricaviamo  $C_1$ , o meglio  $\frac{C_1}{H_0}$ . Infatti

$$\frac{C_1}{H_0} = -\frac{C}{\mu A^2} - C_2 \cosh M + C_3 \sinh M = -\frac{C}{\mu A^2} + \frac{C h \cosh M}{\mu A \sinh M} + \frac{V}{2}.$$

In definitiva, la soluzione del problema differenziale è data da

$$v_1(x_2) = \frac{C h^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} + \frac{V \sinh M + \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{2 \sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2} \left[ \frac{\sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \right] + \frac{H_0 V \cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{2 \eta_e A \sinh M} \quad x_2 \in [-h, h].$$

Possiamo scrivere in maniera differente il primo coefficiente, sostituendo ad  $A^2$  la sua espressione. Infatti otteniamo

$$\frac{H_0 C h}{\eta_e \mu A^2} = \frac{C h}{\mu_e H_0} = \frac{C h}{B_0}.$$

In maniera analoga per il secondo coefficiente abbiamo

$$\frac{H_0 V}{2 \eta_e A} = \frac{H_0 V \mu_e \sigma_e}{2 \sqrt{\sigma_e \mu_e} H_0} = \frac{V \sqrt{\mu \sigma_e}}{2}.$$

L'espressione finale di  $\widehat{H}$  è quindi:

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{C h}{B_0} \left[ \frac{\sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \right] + \frac{V \sqrt{\mu \sigma_e}}{2} \frac{\cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h].$$

Facciamo ora alcune osservazioni analoghe a quelle fatte per il moto di Hartmann.

**Osservazione 7.4.** Se  $C = 0$ , ossia se la pressione modificata è costante, allora

$$v_1(x_2) = \frac{V \sinh M + \sinh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{2 \sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{V \sqrt{\mu \sigma_e}}{2} \frac{\cosh M - \cosh\left(M \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M}, \quad x_2 \in [-h, h].$$

**Osservazione 7.5.** Se  $V = 0$  si ritrovano le espressioni di  $v_1$  e di  $\widehat{H}$  ottenute per il moto di Hartmann.

**Osservazione 7.6.** Per valori fissati di tutti gli altri parametri fisici del problema, in corrispondenza di ogni salto  $C$  della pressione modificata, si ha uno ed un solo moto di Couette, in presenza del campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$ .

I risultati trovati si possono sintetizzare nel seguente:

**Teorema 7.2.** *Sia dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, conduttore di elettricità, occupante la regione  $S$  tra due piani paralleli  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , con  $\Pi_1$  fisso e  $\Pi_2$  dotato di un moto traslatorio rettilineo uniforme in direzione parallela al piano stesso. Se il fluido è immerso in un campo magnetico esterno  $\vec{H}_0$ , normale ai due piani, un moto di Couette è possibile solo se la pressione modificata  $p^*$  presenta un salto  $C \neq 0$  nella direzione  $Ox_1$  della velocità di traslazione  $\vec{V}$  di  $\Pi_2$  e precisamente si ha*

$$p(x_1, x_2) = -Cx_1 - \mu_e \frac{\widehat{H}^2(x_2)}{2} + p_0^* \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in [-h, h]$$

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1, \quad \vec{H} = \widehat{H}(x_2)\vec{e}_1 + H_0\vec{e}_2, \quad x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{Ch^2}{\mu M} \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} + \frac{V \sinh M + \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{2 \sinh M},$$

$$\widehat{H}(x_2) = \frac{Ch}{B_0} \left[ \frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right) - (\sinh M)\frac{x_2}{h}}{\sinh M} \right] + \frac{V\sqrt{\mu\sigma_e} \cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{2 \sinh M}.$$

Vediamo ora di rappresentare i grafici di  $v_1(x_2)$  e  $\widehat{H}(x_2)$  assegnando opportuni valori numerici ai parametri che compaiono nella loro espressione.

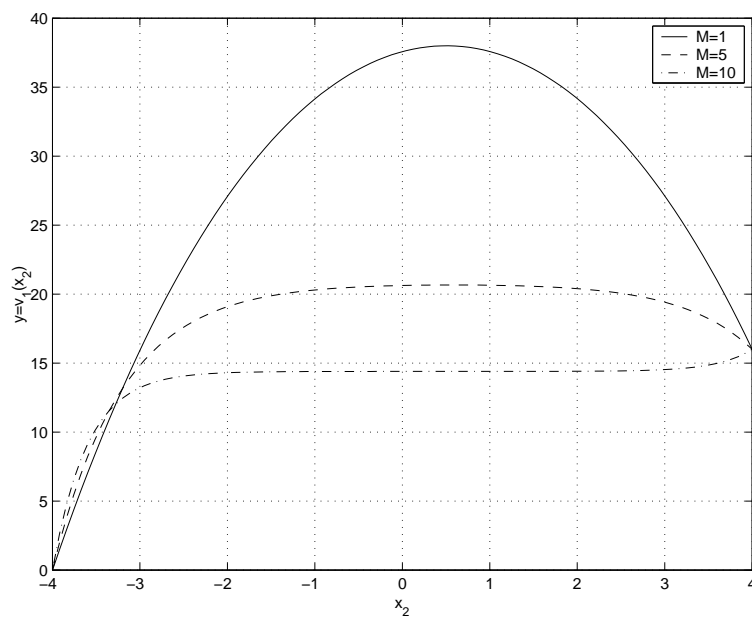
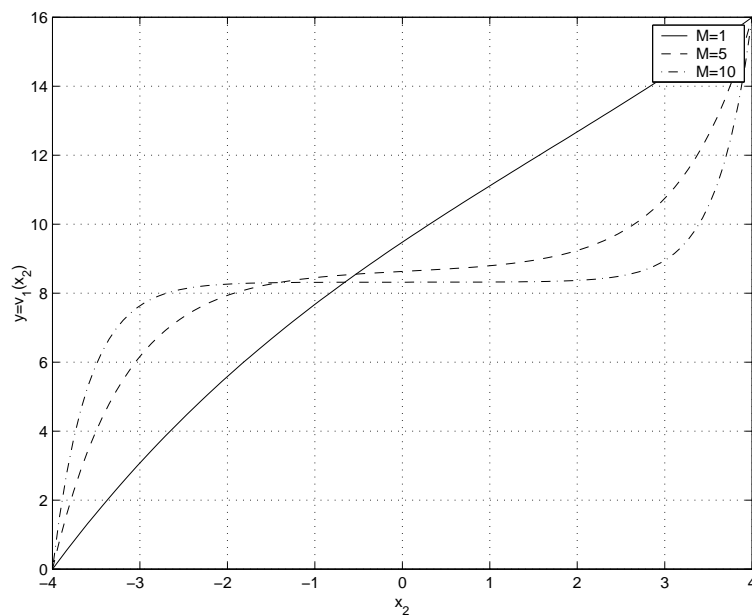
Come per i precedenti grafici, consideriamo il mercurio liquido a temperatura ambiente, per cui:

$$\mu = 1,6 \cdot 10^{-3} kg m^{-1} s^{-1}, \quad \sigma_e = 10^6 S m^{-1}, \quad \mu_e = 1,257 \cdot 10^{-6} H m^{-1}.$$

Limitiamoci a considerare  $C > 0$  ed assumiamo per  $h$ ,  $C$  ( $C > 0$ ),  $V$  gli stessi valori presi in considerazione per il moto di Couette in assenza del campo magnetico attribuendo a  $M$  i valori 1, 5, 10.

Nelle figure 7.4, 7.5 rappresentiamo i grafici di  $v_1$  e nelle figure 7.6, 7.7 quelli di  $\widehat{H}$  nei due casi:

$$C = 6,4 \cdot 10^{-3} kg m^{-2} s^{-2}, \text{ (caso 1)} \quad C = 0,32 \cdot 10^{-3} Kg m^{-2} s^{-2} \text{ (caso 2)}.$$

Figura 7.4: Grafico di  $v_1(x_2)$ , caso 1Figura 7.5: Grafico di  $v_1(x_2)$ , caso 2

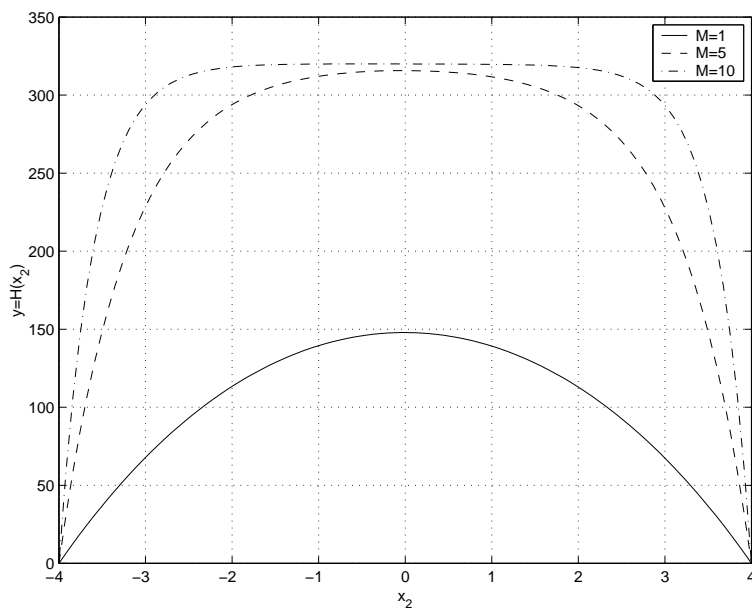


Figura 7.6: grafico del campo magnetico indotto, caso 1

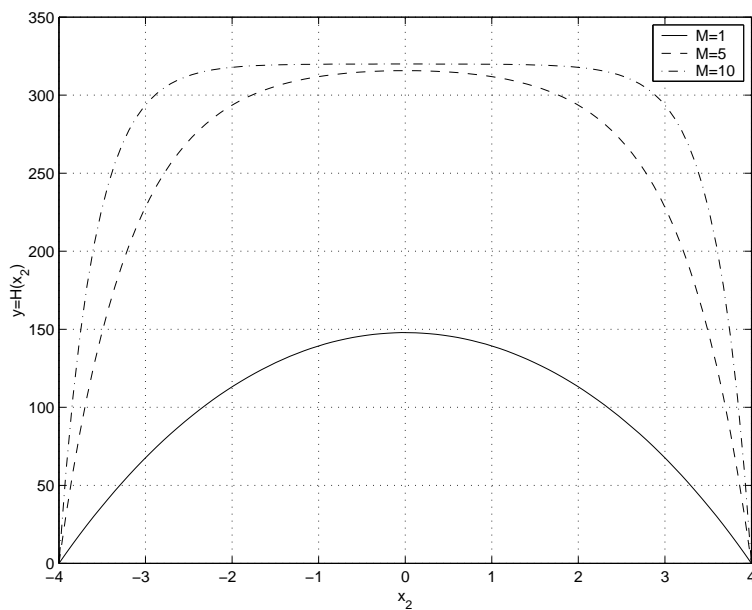


Figura 7.7: grafico del campo magnetico indotto, caso 2

Osservando le figure 7.4, 7.5 vediamo che, come nel moto di Hartmann, per  $M = 1$  l'andamento di  $v_1$  non è molto dissimile dal caso in assenza del campo magnetico, mentre all'aumentare di  $M$  la velocità resta costante in un intervallo la cui ampiezza aumenta al crescere di  $M$ . Infine dalle figure 7.6, 7.7 notiamo che in tal caso l'andamento di  $\widehat{H}$  è diverso dal caso del moto di Hartmann. Infatti vediamo che per  $M = 1$  ha un andamento quasi parabolico, mentre all'aumentare di  $M$ ,  $\widehat{H}$  tende ad essere costante su un intervallo la cui ampiezza aumenta all'aumentare di  $M$ . Questo andamento è conforme al fatto che, per i valori numerici scelti, prevale in maniera rilevante il secondo termine legato al moto traslatorio del piano  $\Pi_2$ .

Come nel paragrafo precedente, vediamo quale espressione assumono  $v_1(x_2)$  e  $\widehat{H}(x_2)$  se  $M \ll 1$ , ossia, a parità di tutti gli altri parametri fisici, se il campo magnetico esterno è di debole intensità.

Per quanto riguarda l'espressione di  $v_1$ , abbiamo

$$\frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong \frac{M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right], \quad \frac{\sinh M + \sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong 1 + \frac{x_2}{h}.$$

Dunque, per  $v_1(x_2)$  otteniamo l'espressione approssimata

$$v_1(x_2) \cong \frac{C h^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right] + \frac{V}{2} \left(1 + \frac{x_2}{h}\right), \quad x_2 \in [-h, h].$$

Il secondo membro della relazione scritta sopra è quanto avevamo ottenuto nel moto di Couette in assenza del campo magnetico esterno.

Mostriamo ora che se  $M \ll 1$ ,  $\widehat{H}(x_2) \cong 0$ .

Infatti

$$\frac{\sinh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} - \frac{x_2}{h} \cong 0, \quad \frac{\cosh M - \cosh\left(M\frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M} \cong \frac{M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right]$$

$$\widehat{H}(x_2) \cong \frac{V\sqrt{\mu\sigma_e}}{2} \frac{M}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right] \cong 0,$$

essendo  $M$  molto piccolo.

## 7.5 Appendice sulle unità di misura.

Unità fondamentali nel Sistema Internazionale (SI)

Grandezza fisica	Simbolo grandezza	Nome unità	Simbolo unità
lunghezza	$l$	metro	m
massa	$M$	chilogrammo	kg
intervallo di tempo	$t$	secondo	s
intensità di corrente	$I, i$	ampere	A
temperatura assoluta	$T$	kelvin	K
quantità di sostanza	$n$	mole	mol
intensità luminosa	$I_V$	candela	cd

### Dimensioni fisiche di grandezze elettromagnetiche

- Intensità del campo elettrico

$$[E] = l M t^{-3} I^{-1}$$

- Intensità del campo di induzione elettrica

$$[D] = l^{-2} t I$$

- Intensità del campo magnetico

$$[H] = l^{-1} I$$

- Intensità del campo di induzione magnetica

$$[B] = M t^{-2} I^{-1}$$

- Permeabilità elettrica

$$[\epsilon] = l^{-3} M^{-1} t^4 I^2$$

- Coefficiente di conducibilità elettrica

$$[\sigma_e] = l^{-3} M^{-1} t^3 I^2$$



- Permeabilità magnetica

$$[\mu_e] = l M t^{-2} I^{-2}.$$

### Unità di misura di grandezze elettromagnetiche nel Sistema Internazionale

- Intensità del campo elettrico = volt/metro =  $V \text{ m}^{-1} = \text{m kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
- Intensità del campo di induzione elettrica = ampere-secondo/metro quadrato =  $\text{A s m}^{-2}$
- Intensità del campo magnetico = ampere/metro =  $\text{A m}^{-1}$
- Intensità del campo di induzione magnetica = tesla =  $\text{T} = \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
- Permeabilità elettrica = farad/metro =  $\text{F m}^{-1} = \text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
- Coefficiente di conducibilità elettrica = siemens/metro =  $\text{S m}^{-1} = \text{m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$
- Permeabilità magnetica = henry/metro =  $\text{H m}^{-1} = \text{m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ .



# Capitolo 8

## Termomeccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale

### 8.1 Analisi della deformazione per un corpo continuo.

Richiamiamo in primo luogo la definizione di configurazione di un corpo continuo tridimensionale.

**Definizione 8.1.** *Considerato il corpo continuo tridimensionale  $\mathcal{C}$ , una sua configurazione è un omeomorfismo  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow S$  dove  $S$  è la chiusura di un aperto dello spazio geometrico  $\mathcal{E}$ .*

Ad ogni corpo continuo, per definizione, è associata una famiglia  $\Phi$  di configurazioni, detta *famiglia delle sue configurazioni possibili*.

Introduciamo ora la definizione di **deformazione** di un corpo continuo.

Sia dato il corpo continuo  $\mathcal{C}$  e siano  $\phi_0$  e  $\phi$  due sue possibili configurazioni:

$$\phi_0 : \mathcal{C} \rightarrow S_0$$

$$X \mapsto P_0 = \phi_0(X)$$

$$\phi : \mathcal{C} \rightarrow S$$

$$X \mapsto P = \phi(X).$$

Poiché l'applicazione  $\phi_0$  è un omeomorfismo, è invertibile per cui esiste la sua inversa  $\phi_0^{-1}$  e

$$P_0 = \phi_0(X) \iff X = \phi_0^{-1}(P_0).$$

**Definizione 8.2.** *Definiamo deformazione del corpo continuo  $\mathcal{C}$  dalla configurazione iniziale  $\phi_0$  alla configurazione finale  $\phi$  l'applicazione:*

$$x = \phi \circ \phi_0^{-1} : S_0 \longrightarrow S$$

$$P_0 \longmapsto P = \phi(\phi_0^{-1}(P_0)).$$

Considerata una generica particella  $X$  del corpo continuo, essa occuperà la posizione  $P_0 = \phi_0(X)$  nella configurazione iniziale e la posizione  $P = \phi(X)$  nella configurazione finale. Avremo perciò:

$$P = \phi(X) = \phi(\phi_0^{-1}(P_0)) = x(P_0).$$

Dunque, data la particella  $X$ , se  $P_0, P$  sono le posizioni occupate da questa nella posizione iniziale, finale rispettivamente, si ha:  $P = x(P_0)$  dove  $x$  è la deformazione di  $\mathcal{C}$  da  $\phi_0$  a  $\phi$ .

Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ .

Se  $P$  è la posizione occupata nella configurazione finale dalla particella che in quella iniziale occupa la posizione  $P_0$ , avremo che il vettore posizione di  $P$  rispetto all'origine del riferimento è dato da:

$$P - O = x(P_0) - O.$$

Se facciamo variare  $P_0$  in  $S_0$ , otteniamo il campo vettoriale definito in  $S_0$  nel modo seguente:

$$\vec{x}(P_0) = x(P_0) - O \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Tale campo vettoriale è detto *campo della deformazione* e il valore che assume in  $P_0$  ci fornisce il vettore posizione della posizione occupata nella configurazione finale  $\phi$  dalla particella che nella configurazione iniziale  $\phi_0$  occupa la posizione  $P_0$ .

Del campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0)$  possiamo considerare la rappresentazione analitica:

$$\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0)$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate cartesiane nel riferimento  $Ox_1x_2x_3$  del generico punto  $P_0$  di  $S_0$ .

Le componenti cartesiane della funzione vettoriale  $\vec{x} = \vec{x}(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  sono le tre funzioni scalari:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \xi(S_0)$$

che ci forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata dopo la deformazione dalla particella che prima della deformazione occupa la posizione  $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

**Definizione 8.3.** Diciamo che una deformazione di un corpo continuo è regolare se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

- 1)  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(S_0)$  o equivalentemente  $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(S_0))$   $i=1,2,3$ ;
- 2)  $\det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] > 0$  in  $\xi(S_0)$ .

Possiamo scrivere la condizione 2) in una forma equivalente se introduciamo il campo scalare  $J = J(P_0)$  così definito:

$$J(P_0) = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad \forall P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S_0.$$

E' allora equivalente alla condizione 2) la seguente:

$$J(P_0) > 0 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Nel seguito supporremo sempre di considerare deformazioni regolari, anche se non lo scriveremo esplicitamente.

**Definizione 8.4.** Dato un corpo continuo che subisce una deformazione regolare, chiamiamo gradiente di deformazione il campo tensoriale del II ordine  $\tilde{F} = \tilde{F}(P_0)$  così definito:

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Le componenti della rappresentazione analitica di  $\tilde{F}$  sono:

$$F_{ij}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}).$$

Vediamo dunque che

$$\det \tilde{F}(P_0) = \det [F_{ij}(P_0)] = J(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Osserviamo che, essendo la deformazione regolare,

$$\det \tilde{F}(P_0) > 0 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

**Definizione 8.5.** Una deformazione regolare si dice omogenea se il gradiente di deformazione è costante in  $S_0$ .

**Definizione 8.6.** Diciamo che un corpo continuo subisce una deformazione rigida dalla configurazione iniziale  $\phi_0$  alla configurazione finale  $\phi$  se, comunque prese due particelle  $X, X' \in \mathcal{C}$ , la distanza tra le posizioni che queste occupano prima e dopo la deformazione rimane invariata, cioè

$$|P_0 - P'_0| = |P - P'|,$$

essendo  $P = x(P_0)$ ,  $P' = x(P'_0)$ .

E' evidente che se  $\mathcal{C}$  è un corpo rigido, gli sono consentite soltanto deformazioni rigide.

Ci proponiamo di mostrare che per una deformazione rigida il campo della deformazione assume una forma particolare.

Facciamo dapprima alcune premesse.

**Definizione 8.7.** Diciamo che un tensore doppio  $\tilde{Q}$  è ortogonale se è invertibile e  $\tilde{Q}^{-1} = \tilde{Q}^T$ .

Osserviamo che se  $\tilde{Q}$  è un tensore doppio ortogonale, presa una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e considerate la matrice  $[Q_{ij}]$  delle componenti di  $\tilde{Q}$ , la matrice  $[Q_{ij}^T]$  delle componenti di  $\tilde{Q}^T$  e la matrice  $[Q_{ij}^{-1}]$  di  $\tilde{Q}^{-1}$ , si ha

$$[Q_{ij}^T] = [Q_{ij}]^T, \quad [Q_{ij}^{-1}] = [Q_{ij}]^{-1}, \quad [Q_{ij}^T] = [Q_{ij}^{-1}].$$

La prima relazione vale per ogni tensore doppio, la seconda per ogni tensore doppio invertibile, mentre l'ultima vale per ogni tensore doppio ortogonale.

Dalle tre relazioni scritte sopra discende

$$[Q_{ij}]^T = [Q_{ij}]^{-1},$$

ossia se  $\tilde{Q}$  è un tensore doppio ortogonale, la matrice delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale è ortogonale.

E' immediato verificare che vale anche il viceversa.

Sussiste dunque la seguente proposizione:

**Proposizione 8.1.** Un tensore doppio è ortogonale se e solo se è ortogonale la matrice delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale.

Notiamo poi che dalla proposizione precedente segue che per ogni tensore ortogonale  $\tilde{Q}$

$$\det \tilde{Q} = +1 \text{ o } -1,$$

da cui discende la definizione:

**Definizione 8.8.** Diciamo che il tensore doppio ortogonale  $\tilde{Q}$  è un tensore ortogonale proprio se  $\det \tilde{Q} = +1$ .

I tensori ortogonali godono di questa ulteriore proprietà:

**Proposizione 8.2.** Se  $\tilde{Q}$  è un tensore doppio ortogonale, allora

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \quad (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dimostrazione

Fissata una base ortonormale ed indicate con  $(u_i)$ ,  $(v_i)$ ,  $(Q_{ij})$  le successioni delle componenti di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\tilde{Q}$  rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{v}) &= Q_{ij} u_j Q_{ir} v_r \\ &= Q_{ji}^T Q_{ir} u_j v_r = Q_{ji}^{-1} Q_{ir} u_j v_r \\ &= \delta_{jr} u_j v_r = u_j v_j = \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

Dalla proposizione 8.2 discende:

$$\forall \vec{u} \quad |\tilde{Q} \cdot \vec{u}|^2 = (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) \cdot (\tilde{Q} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

Stabiliamo il seguente

**Teorema 8.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo subisca una deformazione rigida è che il corrispondente campo della deformazione abbia la forma seguente:*

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0, \quad (8.1.1)$$

dove  $O$  è un punto fissato dello spazio geometrico,  $\tilde{Q}$  è un tensore doppio ortogonale indipendente da  $P_0$ ,  $\vec{c}$  è un vettore pure indipendente da  $P_0$  e  $S_0$  è la regione occupata dal continuo nella configurazione iniziale.

Dimostrazione

Dimostriamo dapprima la condizione sufficiente.

Il corpo continuo subisca una deformazione cui corrisponda un campo della deformazione della forma (8.1.7).

E' immediato provare che la deformazione è rigida. Infatti, prese due particelle arbitrarie  $X$ ,  $X'$  ed indicate con  $P_0$ ,  $P'_0$  le posizioni occupate prima della deformazione e con  $P$ ,  $P'$  le posizioni occupate dopo la deformazione, avremo:

$$\begin{aligned} |P - P'| &= |(P - 0) - (P' - 0)| = |\vec{x}(P_0) - \vec{x}(P'_0)| \\ &= |[\tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c}] - [\tilde{Q} \cdot (P'_0 - O) + \vec{c}]| \\ &= |\tilde{Q} \cdot (P_0 - P'_0)| = |P_0 - P'_0| \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la conseguenza della proposizione 8.2 relativa ai tensori ortogonali.

Dunque la deformazione subita dal corpo continuo è rigida.

Dimostriamo ora la condizione necessaria.

Per ipotesi la deformazione subita dal corpo continuo è rigida e vogliamo provare che il corrispondente campo della deformazione ha la forma (8.1.7).

Fissato il riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ , ci riferiremo alle rappresentazioni analitiche dei campi che interverranno nel corso della dimostrazione.

Osserviamo in primo luogo che, essendo la deformazione rigida, la regione  $S$  occupata dal corpo continuo nella configurazione finale è congruente alla regione  $S_0$ , occupata prima della deformazione.

Consideriamo tre particelle  $X_1, X_2, X_3$  e siano  $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$  le posizioni che le tre particelle occupano nella configurazione iniziale e  $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$  le posizioni che occupano nella configurazione finale. Supponiamo che  $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$  non siano allineati ed osserviamo che, essendo la deformazione rigida, anche i punti  $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$  non sono allineati.

In corrispondenza della regione  $S_0$  introduciamo il riferimento cartesiano ortonormale  $O'x'_1x'_2x'_3$  con

$$O' = P_0^{(1)}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \text{vers}(P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) \\ \vec{e}'_3 &= \text{vers}[(P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) \times (P_0^{(3)} - P_0^{(1)})] \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}'_3 \times \vec{e}'_1\end{aligned}$$

per cui la terna  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  è una terna destra.

In corrispondenza della regione  $S$ , occupata nella configurazione finale, consideriamo il riferimento  $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$  ottenuto in maniera analoga a come abbiamo fissato  $O'x'_1x'_2x'_3$  sfruttando le posizioni  $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$ , occupate dalle particelle  $X_1, X_2, X_3$  nella configurazione  $\phi$ .

Il riferimento  $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$  può essere riguardato come la posizione occupata da  $O'x'_1x'_2x'_3$  dopo la deformazione, se pensiamo quest'ultimo riferimento rigidamente solidale a  $\mathcal{C}$  durante la deformazione rigida.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad una generica particella  $X$  del corpo continuo. Siano  $P_0$  e  $P$  le posizioni che  $X$  occupa prima e dopo la deformazione. Indichiamo con  $(x'_{01}, x'_{02}, x'_{03})$  la terna delle coordinate di  $P_0$  rispetto al riferimento  $O'x'_1x'_2x'_3$  e con  $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$  la terna delle coordinate di  $P$  rispetto al riferimento  $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ .

Poiché le mutue distanze tra le posizioni occupate dalle particelle prima e dopo la deformazione restano invariate, le distanze delle posizioni occupate dalle particelle prima e dopo la deformazione dai piani coordinati dei due riferimenti risultano uguali.

Allora avremo che per la particella  $X$  le coordinate rispetto a  $O'x'_1x'_2x'_3$  della posizione  $P_0$  occupata nella configurazione iniziale sono uguali alle corrispondenti



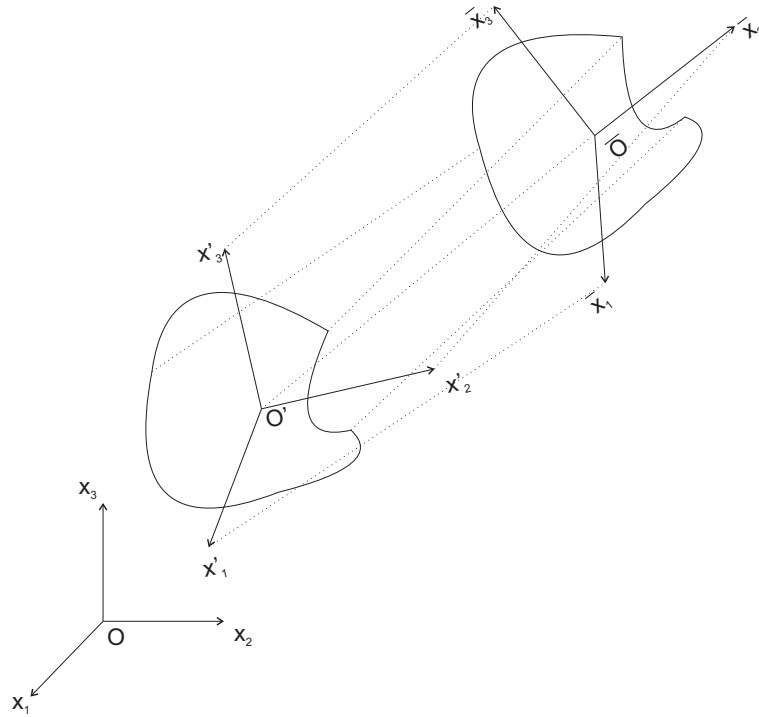


Figura 8.1: Deformazione rigida.

coordinate rispetto a  $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$  della posizione  $P$  occupata nella configurazione finale. Dunque

$$x'_{0h} = \overline{x}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Indichiamo ora con  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  la terna delle coordinate di  $P_0$  rispetto a  $Ox_1x_2x_3$  e con  $(x_1, x_2, x_3)$  le coordinate di  $P$  rispetto a  $Ox_1x_2x_3$ .

Vediamo di trovare il legame tra le coordinate  $(x_i)$  e le coordinate  $(x_{0i})$ .

Sfrutteremo più volte le relazioni tra le coordinate di uno stesso punto rispetto a due diversi riferimenti.

Consideriamo dapprima i riferimenti  $Ox_1x_2x_3$  e  $\overline{O}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$  riguardando il primo come “vecchio” riferimento e il secondo come “nuovo” riferimento.

Allora le “vecchie” coordinate  $(x_i)$  di  $P$  sono legate alle “nuove” coordinate  $(\overline{x}_h)$  nel modo seguente:

$$x_i = \alpha_{ih} \overline{x}_h + x_i(\overline{O}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.1.2)$$

dove

$\alpha_{ih}$  = componente di  $\overrightarrow{e}_h$  rispetto a  $\overrightarrow{e}_i$

$(x_i(\overline{O}))$  = terna delle coordinate rispetto ad  $Ox_1x_2x_3$  del punto  $\overline{O}$ .

Poiché, come abbiamo osservato sopra,

$$x'_{0h} = \bar{x}_h \quad h = 1, 2, 3,$$

nelle (8.1.2) possiamo sostituire  $\bar{x}_h$  con  $x'_{0h}$ , ottenendo:

$$x_i = \alpha_{ih} x'_{0h} + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.1.3)$$

Ora assumiamo come “vecchio” riferimento  $O'x'_1x'_2x'_3$  e come “nuovo” riferimento  $Ox_1x_2x_3$ .

Esprimiamo le “vecchie” coordinate ( $x'_{0h}$ ) di  $P_0$  tramite le sue “nuove” coordinate ( $x_{0i}$ ):

$$x'_{0h} = \beta_{hj} x_{0j} + x'_h(O) \quad h = 1, 2, 3 \quad (8.1.4)$$

dove

$\beta_{hj}$  = componente di  $\vec{e}'_j$  rispetto ad  $\vec{e}'_h$

( $x'_h(O)$ ) = terna delle coordinate rispetto ad  $O'x'_1x'_2x'_3$  del punto  $O$ .

Sostituendo le (8.1.4) nelle (8.1.3), otteniamo:

$$x_i = \alpha_{ih} \beta_{hj} x_{0j} + \alpha_{ih} x'_h(O) + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.1.5)$$

D'altra parte

$\alpha_{ih} \beta_{hj}$  = elemento che sta nella  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna della matrice  $\mathbb{A}\mathbb{B}$ , con  $\mathbb{A} = [\alpha_{ih}]$  e  $\mathbb{B} = [\beta_{hj}]$ .

Poiché le matrici  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono entrambe ortogonali, anche il loro prodotto lo è. Se allora poniamo:

$$Q_{ij} = \alpha_{ih} \beta_{hj},$$

la matrice  $[Q_{ij}]$  risulta ortogonale.

Osserviamo tra l'altro che, avendo considerato solo basi che sono terne destre,  $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B} = 1$  par cui  $\det [Q_{ij}] = 1$ .

Facendo l'ulteriore posizione:

$$c_i = \alpha_{ih} x'_h(O) + x_i(\bar{O}) \quad i = 1, 2, 3,$$

le (8.1.5) si scrivono nella forma:

$$x_i = Q_{ij} x_{0j} + c_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.1.6)$$

Se ora introduciamo il tensore doppio  $\tilde{Q}$  che ha come matrice delle sue componenti rispetto alla base  $\vec{e}_i$  la matrice  $[Q_{ij}]$ , questo sarà un tensore ortogonale perché è ortogonale la matrice delle sue componenti; inoltre  $\tilde{Q}$  è indipendente da  $P_0$  così come è indipendente da  $P_0$  il vettore  $\vec{c}$  avente come terna delle sue componenti

rispetto alla base  $\vec{e}_i$  la terna  $(c_1, c_2, c_3)$ . Allora le tre equazioni (8.1.6), tenendo presente che  $(x_1, x_2, x_3)$  sono le coordinate del punto  $P = x(P_0)$  dove  $P_0$  di coordinate  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la posizione occupata prima della deformazione dalla generica particella del corpo continuo, sono equivalenti all'equazione vettoriale:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0$$

con  $\tilde{Q}$  e  $\vec{c}$  tensore doppio ortogonale e vettore entrambi indipendenti da  $P_0$ . Il teorema risulta così dimostrato.

**Ossevazione 8.1.** Il tensore  $\tilde{Q}$  risulta un tensore ortogonale proprio, poiché, come abbiamo visto dalla dimostrazione,  $\det \tilde{Q} = 1$ .

**Definizione 8.9.** Se si ha una deformazione rigida tale che  $\tilde{Q} = \tilde{a}$  per cui il corrispondente campo della deformazione si presenta nella forma:

$$\vec{x}(P_0) = (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0,$$

con  $\vec{c}$  vettore indipendente da  $P_0$ , questa è detta una traslazione.

Se si ha una deformazione rigida tale che  $\vec{c} = \vec{0}$  per cui il corrispondente campo della deformazione si presenta nella forma:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) \quad \forall P_0 \in S_0$$

con  $\tilde{Q}$  tensore doppio ortogonale proprio indipendente da  $P_0$ , questa è detta una rotazione.

**Ossevazione 8.2.** Una generica deformazione rigida si ottiene componendo una traslazione con una rotazione o una viceversa una traslazione con una rotazione.

Come è immediato verificare, il teorema 8.1.7 ammette il seguente

**Corollario 8.1.** Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo subisca una deformazione rigida è che il corrispondente campo della deformazione goda della proprietà seguente:

$$\vec{x}(P_0) = \vec{x}(\bar{P}_0) + \tilde{Q} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0, \quad (8.1.7)$$

dove  $\tilde{Q}$  è un tensore doppio ortogonale indipendente da  $P_0$  e  $S_0$  è la regione occupata dal continuo nella configurazione iniziale.

Ci proponiamo ora di vedere quale forma assume in una deformazione rigida il gradiente di deformazione  $\tilde{F} = \tilde{F}(P_0)$ .

Tenendo presente che

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}},$$

dalle (8.1.6) deduciamo

$$F_{ij} = Q_{ij}$$

per cui

$$\tilde{F}(P_0) = \tilde{Q} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dunque in una deformazione rigida il gradiente di deformazione è un tensore ortogonale proprio indipendente da  $P_0$ .

Perciò una deformazione rigida è una deformazione omogenea. Inoltre, poiché per una deformazione rigida  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(S_0)$  e  $J = \det \tilde{F} = \det \tilde{Q} = 1 > 0$  in  $S_0$ , deduciamo che ogni deformazione rigida è regolare.

Introduciamo una nuova definizione.

Sia dato un corpo continuo che subisce una deformazione.

**Definizione 8.10.** *Consideriamo una generica particella  $X$  del corpo continuo che prima della deformazione occupi la posizione  $P_0$  e dopo la deformazione occupi la posizione  $P$ . Allora definiamo spostamento della particella  $X$  il vettore*

$$\vec{u} = P - P_0.$$

D'altra parte:

$$\vec{u} = P - P_0 = (P - O) - (P_0 - O) = \vec{x}(P) - (P_0 - O).$$

Se facciamo variare  $P_0$  in  $S_0$  resta definito su  $S_0$  il campo  $\vec{u}$  dello spostamento:

$$\vec{u}(P_0) = \vec{x}(P_0) - (P_0 - O) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (8.1.8)$$

Dalla (8.1.8) vediamo che in una deformazione regolare  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ .

Possiamo rappresentare il gradiente di deformazione in termini di spostamento. Infatti

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0)$$

e dalla (8.1.8) deduciamo:

$$\vec{x}(P_0) = \vec{u}(P_0) + (P_0 - O),$$

per cui

$$\tilde{F}(P_0) = \text{grad}_0 \vec{u}(P_0) + \text{grad}_0 (P_0 - O) = \text{grad}_0 \vec{u}(P_0) + \tilde{a}.$$

Perciò

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a} \quad \text{in } S_0. \quad (8.1.9)$$

In componenti si ha

$$F_{ij} = u_{i,j} + a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} + \delta_{ij}.$$

Introduciamo un nuovo campo tensoriale che viene usato nell'analisi delle deformazioni per un corpo continuo.

**Definizione 8.11.** *Prende il nome di tensore destro di Cauchy-Green il campo tensoriale del secondo ordine  $\tilde{C} = \tilde{C}(P_0)$  così definito :*

$$\tilde{C}(P_0) = \tilde{F}^T(P_0) \tilde{F}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Il tensore destro di Cauchy-Green è simmetrico in  $S_0$ .

Infatti

$$\tilde{C}^T = (\tilde{F}^T \tilde{F})^T = \tilde{F}^T (\tilde{F}^T)^T = \tilde{F}^T \tilde{F} = \tilde{C}.$$

Ovviamente le componenti del tensore destro di Cauchy-Green sono date da:

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$$

con la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

E' possibile scrivere  $\tilde{C}$  in termini di spostamento, tenendo presente come si scrive in termini di spostamento  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{C} = (\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a})^T (\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}.$$

**Definizione 8.12.** *Definiamo tensore di deformazione finita il campo tensoriale del secondo ordine  $\tilde{d} = \tilde{d}(P_0)$  dato da:*

$$\tilde{d}(P_0) = \frac{1}{2} [\tilde{C}(P_0) - \tilde{a}] \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Come si può facilmente verificare:

$$\tilde{d} = \tilde{d}^T \quad \text{in } S_0.$$

Il tensore di deformazione finita si può esprimere in termini di  $\tilde{F}$  e di  $\vec{u}$ :

$$\tilde{d} = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{a}) = \frac{1}{2} (\text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u}).$$

In componenti abbiamo:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{k,i}u_{k,j} + u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Si potrebbe provare che il tensore di deformazione finita descrive in maniera completa tutte le caratteristiche geometriche di una deformazione.

Dimostriamo la seguente proposizione:

**Proposizione 8.3.** *Se un corpo continuo subisce una deformazione rigida, allora*

$$\tilde{d}(P_0) = \tilde{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

#### Dimostrazione

Come sappiamo, se la deformazione di un corpo continuo è rigida, si ha:

$$\vec{x}(P_0) = \tilde{Q} \cdot (P_0 - O) + \vec{c} \quad \forall P_0 \in S_0 \implies \tilde{F}(P_0) = \tilde{Q} \quad \forall P_0 \in S_0$$

con  $\tilde{Q}$  = tensore ortogonale indipendente da  $P_0$ .

Dunque in  $S_0$  si ha

$$\tilde{d} = \frac{1}{2}(\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{Q}^T \tilde{Q} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{Q}^{-1} \tilde{Q} - \tilde{a}) = \frac{1}{2}(\tilde{a} - \tilde{a}) = \tilde{0}.$$

Dalla proposizione 8.3 concludiamo che il tensore di deformazione finita è in un certo senso una misura della deformabilità, ossia della capacità di deformarsi, di un corpo continuo che subisca una deformazione.

Più avanti, accanto al tensore di deformazione finita, introdurremo il tensore di deformazione infinitesima che nell'ambito della teoria delle "piccole" deformazioni svolge lo stesso ruolo che svolge  $\tilde{d}$  nello studio di una generica deformazione.

## 8.2 Condizione di incomprimibilità ed equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Supponiamo di avere un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  rispetto ad un dato osservatore.

Sia  $S_0$  la regione che occupa nella configurazione di riferimento  $\phi_0$  e sia  $S(t)$  la regione che occupa all'istante  $t$  durante il moto, cioè in corrispondenza della configurazione  $\phi_t$ .

Dal punto di vista materiale il moto è descritto in uno dei tre modi seguenti

- mediante l'equazione puntuale:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (8.2.1)$$

che ci fornisce direttamente la posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante l'equazione vettoriale

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \quad (8.2.2)$$

che ci dà il vettore posizione rispetto all'origine del riferimento della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione  $P_0$ ;

- mediante le tre equazioni scalari

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0) \quad (8.2.3)$$

che forniscono le coordinate cartesiane della posizione occupata all'istante  $t$  dalla particella che nella configurazione di riferimento occupa la posizione di coordinate cartesiane  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

Poiché il moto è regolare, sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

- 1)  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  o equivalentemente  $x_i \in \mathcal{C}^2(\xi(\mathcal{S}_0))$   $i=1,2,3$ ;
- 2)  $J = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] > 0$  in  $\mathcal{S}_0$ .

Fissiamo un istante  $t \in [t_0, t_1]$  e consideriamo l'applicazione

$$x(\cdot, t) : S_0 \rightarrow S(t)$$

$$P_0 \mapsto P = x(P_0, t).$$

Poiché  $x(\cdot, t) = \phi_t \circ \phi_0^{-1}$ , si ha che l'applicazione  $x(\cdot, t)$  rappresenta la deformazione che il corpo continuo subisce dalla configurazione  $\phi_0$  alla configurazione  $\phi_t$ .

Osserviamo poi che se il moto è regolare,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  la deformazione che il continuo subisce dalla configurazione  $\phi_0$  alla configurazione  $\phi_t$  è regolare.

Stabiliamo ora un teorema che ci sarà molto utile nel seguito.

**Teorema 8.2.** *Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Se  $f = f(P, t)$  è un campo scalare spaziale continuo in  $\mathcal{S}$ , preso un qualsiasi sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  occupante la regione  $S^*(t)$  all'istante  $t \in [t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{S_0^*} f_m(P_0, t) J(P_0, t) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (8.2.4)$$

dove  $S_0^*$  è la regione occupata da  $C^*$  nella configurazione di riferimento e  $f_m$  è la rappresentazione materiale del campo spaziale  $f$ .

Dimostrazione

Per definizione di integrale esteso a regioni di  $\mathcal{E}$ , abbiamo:

$$\int_{S^*(t)} f(P, t) dS = \int_{\xi(S^*(t))} f^0(x_1, x_2, x_3, t) dx \quad (8.2.5)$$

dove  $\xi(S^*(t))$  è la regione di  $\mathbb{R}^3$  descritta dalla terna  $(x_1, x_2, x_3)$  delle coordinate cartesiane del punto  $P$  al variare di tale punto in  $S^*(t)$ ,  $f^0$  è la rappresentazione analitica del campo  $f$  e  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ .

D'altra parte, per il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione in  $\mathbb{R}^3$ , è possibile trasformare l'integrale scritto sopra esteso a  $\xi(S^*(t))$  in un integrale esteso a  $\xi(S_0^*)$ . Infatti tale teorema è applicabile perché il corpo continuo si muove di moto regolare per cui  $\forall t \in [t_0, t_1]$  l'applicazione:

$$\begin{aligned} \xi(S_0) &\longrightarrow \xi(S(t)) \\ (x_{01} \ x_{02} \ x_{03}) &\longmapsto (x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)) \end{aligned}$$

è sicuramente un diffeomorfismo, cioè un'applicazione invertibile di classe  $\mathcal{C}^1$ . (In realtà è ancora più regolare, essendo di classe  $\mathcal{C}^2$ ). Dunque la (8.2.5) assume la forma:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} f(P, t) dS &= \\ \int_{\xi(S_0^*)} f^0(x_1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), x_3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t), t) \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right] dx_0 &= \\ \int_{S_0^*} f(x(P_0, t), t) J(P_0, t) dS_0 &= \int_{S_0^*} f_m(P_0, t) J(P_0, t) dS_0. \end{aligned}$$

Il teorema risulta così dimostrato.

Il risultato continua a sussistere per campi vettoriali e tensoriali.

Vediamo ora come si esprime dal punto di vista materiale la condizione di incomprimibilità.

Richiamiamo la definizione di moto incomprimibile.

**Definizione 8.13.** *Un corpo continuo  $\mathcal{C}$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  si muove di moto incomprimibile se, preso un suo qualsiasi sottocorpo  $C^*$ , il volume  $V^*(t)$  della regione che esso occupa durante il moto istante per istante non varia al trascorrere del tempo.*

Com'è noto, sussiste la seguente proposizione



**Proposizione 8.4.** *Dal punto di vista spaziale un corpo continuo si muove di moto incompressibile nell'intervallo  $[t_0, t_1]$  se e solo se*

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Ci proponiamo di dedurre l'analogia condizione dal punto di vista materiale.

**Teorema 8.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo continuo nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  si muova di moto incompressibile è che*

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Dimostrazione

**Condizione necessaria**

Supponiamo che in  $[t_0, t_1]$  un generico corpo continuo si muova di moto incompressibile. Dunque per definizione, preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario, il volume  $V^*(t)$  della regione  $S^*(t)$  da esso occupata istante per istante non varia al trascorrere del tempo, ossia:

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{e} \quad \forall \mathcal{C}^*.$$

D'altra parte:

$$V^*(t) = \int_{S^*(t)} dS,$$

ma per il teorema 8.2 sul cambiamento delle variabili d'integrazione deduciamo:

$$V^*(t) = \int_{S_0^*} J(P_0, t) dS_0.$$

Se ora deriviamo rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = \int_{S_0^*} \dot{J}(P_0, t) dS_0 = 0 \quad \forall S_0^* \text{ chiusura di un aperto } \in S_0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per l'arbitrarietà di  $S_0^*$ , per la continuità della funzione integranda e per l'arbitrarietà di  $t$  si ha

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \text{in } S_0 \times [t_0, t_1] = \mathcal{S}_0. \quad (8.2.6)$$

**Condizione sufficiente**

Assumiamo che durante il moto di un corpo continuo valga la (8.2.6). Si prova facilmente che il moto è incompressibile procedendo in senso inverso rispetto a quanto fatto prima.

Osserviamo che

$$\dot{J}(P_0, t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \implies J(P_0, t) = J(P_0) \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Supponiamo di assumere come configurazione di riferimento  $\phi_0$  la configurazione iniziale del moto, cioè  $\phi_{t_0}$ .

Dalle equazioni scalari del moto dal punto di vista materiale :

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3,$$

ponendo  $t = t_0$ , deduciamo:

$$x_{0i} = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t_0) \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque

$$J(P_0, t_0) = 1 \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Se poi il moto è incomprimibile, essendo  $J$  indipendente dal tempo, otteniamo:

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Perciò possiamo enunciare il seguente corollario del teorema 8.3

**Corollario 8.2.** *Se si assume come configurazione di riferimento quella iniziale, un corpo continuo si muove di moto incomprimibile nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  se e solo se*

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1].$$

Ci proponiamo ora di dedurre l'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Ricordiamo che l'equazione di continuità della massa dal punto di vista spaziale è la seguente:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

In primo luogo denotiamo con  $\rho_m = \rho_m(P_0, t)$  la densità di massa dal punto di vista materiale, legata alla densità di massa dal punto di vista spaziale  $\rho = \rho(P, t)$  mediante la nota relazione:

$$\rho_m(P_0, t) = \rho(x(P_0, t), t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Sia poi  $\rho_0 = \rho_0(P_0)$  con  $P_0 \in S_0$  la densità di massa nella configurazione di riferimento che supponiamo sia di classe  $\mathcal{C}^1$  in  $S_0$ .

Consideriamo un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo.

Per definizione di densità di massa, si ha:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}^*) &= \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0, \\ m(\mathcal{C}^*) &= \int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS \quad \forall t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) dS = \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.2.7)$$

Se applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione all'integrale al primo membro della (8.2.7), tale equazione assume la forma:

$$\int_{S_0^*} \rho(x(P_0, t), t) J(P_0, t) dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0(P_0) dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

da cui:

$$\int_{S_0^*} [\rho_m(P_0, t) J(P_0, t) - \rho_0(P_0)] dS_0 = 0 \quad \forall S_0^* \text{ chiusura di un aperto } \in S_0, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Per le usuali assunzioni sui campi che intervengono nello studio del moto di un corpo continuo e per la regolarità del moto stesso, la funzione integranda è continua in  $\mathcal{S}_0$ . Allora grazie all'arbitrarietà di  $S_0^*$  e di  $t$  deduciamo:

$$\rho_m(P_0, t) J(P_0, t) = \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0. \quad (8.2.8)$$

La (8.2.8) rappresenta **l'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale**.

Supponiamo ora che il moto sia anche incomprimibile.

Come sappiamo, dal punto di vista spaziale, sostituendo la condizione di incomprimibilità  $\text{div } \vec{v} = 0$  in  $\mathcal{S}$  nell'equazione di continuità della massa, si ottiene

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Vediamo cosa avviene dal punto di vista materiale.

L'equazione di continuità della massa e la condizione di incomprimibilità sono

$$\begin{aligned} \rho_m(P_0, t) J(P_0, t) &= \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ \dot{J}(P_0, t) &= 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

Deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione di continuità e sfruttiamo la condizione di incomprimibilità:

$$\dot{\rho}_m(P_0, t) J(P_0, t) + \rho_m(P_0, t) \dot{J}(P_0, t) = \dot{\rho}_m(P_0, t) J(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Poiché il moto è regolare,  $J(P_0, t) \neq 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$  per cui dalla relazione precedente deduciamo:

$$\dot{\rho}_m(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Quindi dal punto di vista materiale la condizione di incomprimibilità e l'equazione di continuità della massa forniscono:

$$\dot{J} = 0, \quad \dot{\rho}_m = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Se poi supponiamo che la configurazione di riferimento sia quella iniziale, cioè  $\phi_0 = \phi_{t_0}$ , la condizione di incomprimibilità si riduce a :

$$J(P_0, t) = 1 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

e quindi direttamente dall'equazione di continuità otteniamo:

$$\rho_m(P_0, t) = \rho_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

### 8.3 Prima e seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale.

Vediamo come si scrivono dal punto di vista materiale la prima e la seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Stabiliamo dapprima alcuni risultati preliminari.

Supponiamo di avere un corpo continuo in moto regolare rispetto a un dato osservatore nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ .

Dal punto di vista materiale il moto è descritto in uno dei seguenti modi:

$$P = x(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

o

$$P - O = \vec{x}(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$$

o

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad \forall (x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \in \xi(\mathcal{S}_0).$$

Come abbiamo osservato in precedenza, per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, t_1]$ , l'applicazione  $x(\cdot, t)$  rappresenta la deformazione del corpo continuo dalla configurazione di riferimento a quella relativa all'istante  $t$  e  $\vec{x}(\cdot, t)$  il corrispondente campo della deformazione. Potremo allora introdurre il campo del gradiente di deformazione relativo ad ogni istante  $t$  fissato, che al variare di  $t$  risulterà un campo tensoriale del secondo ordine dipendente dalla variabile reale  $t$ :

$$\tilde{F} = \tilde{F}(P_0, t) \quad \text{con } (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Per definizione

$$\tilde{F}(P_0, t) = \text{grad}_0 \vec{x}(P_0, t)$$

ed essendo il moto regolare

$$\det \tilde{F}(P_0, t) = J(P_0, t) > 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Allora  $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \exists \tilde{F}^{-1}(P_0, t)$ .

Se indichiamo con  $F_{ij}^{-1}$  le componenti di  $\tilde{F}^{-1}$ , si ha

$$[F_{ij}^{-1}] = [F_{ij}]^{-1}.$$

D'altra parte

$$[F_{ij}] = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right]$$

ed inoltre le relazioni

$$\bar{x}_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \quad i = 1, 2, 3$$

sono invertibili per cui è possibile ottenere  $x_{01}, x_{02}, x_{03}$  in funzione di  $(x_1, x_2, x_3, t)$ :

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3.$$

Allora per un noto risultato di Analisi, deduciamo:

$$\left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right]^{-1} = \left[ \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \right]_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)},$$

da cui

$$[F_{ij}^{-1}] = \left[ \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \right]_{x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)}.$$

A questo punto introduciamo un nuovo campo tensoriale, sempre in ambito materiale:  $\tilde{G} = \tilde{G}(P_0, t)$  così definito in  $\mathcal{S}_0$

$$\tilde{G} = (\tilde{F}^{-1})^T.$$

Tenendo presente che

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i(x_{01},x_{02},x_{03},t)},$$

abbiamo che le componenti di  $\tilde{G}$  sono date da

$$G_{ij} = \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_i(x_{01},x_{02},x_{03},t)}.$$

In tutto ciò che segue supponiamo di considerare solo corpi e sottocorpi che occupano regioni che siano la chiusura di domini regolari.

Enunciamo senza dimostrarlo il seguente

**Lemma 8.1.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Se  $f = f(P, t)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(P, t)$ ,  $\vec{t} = \vec{t}(P, t)$  sono rispettivamente un campo scalare, un campo vettoriale e un campo tensoriale spaziali, continui in  $S$ , allora per ogni sottocorpo  $C^*$  si ha  $\forall t \in [t_0, t_1]$ :*

$$\int_{\partial S^*(t)} f \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J f_m (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (8.3.1)$$

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \vec{u}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (8.3.2)$$

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \vec{t}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (8.3.3)$$

dove  $\vec{n}$  e  $\vec{n}_0$  sono i versori della normale esterna nei punti di  $\partial S^*(t)$ ,  $\partial S_0^*$  rispettivamente, mentre  $f_m$ ,  $\vec{u}_m$ ,  $\vec{t}_m$  sono le rappresentazioni materiali dei campi spaziali  $f$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{t}$ .

Sfruttando tale lemma deduciamo la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale.

Dato il corpo continuo  $C$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , consideriamone un sottocorpo arbitrario  $C^*$  ed indichiamo con  $S^*(t)$  la regione da questo occupata al generico istante  $t$  durante il moto.

Scriviamo per  $C^*$  la prima equazione cardinale:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.3.4)$$

Consideriamo l'integrale di volume a primo membro della (8.3.4); tale integrale, esteso alla regione  $S^*(t)$  occupata da  $\mathcal{C}^*$ , può essere trasformato in un integrale esteso a  $S_0^*$ , regione che il sottocorpo occupa nella configurazione di riferimento, utilizzando il teorema sul cambiamento delle variabili d'integrazione:

$$\int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS = \int_{S_0^*} \rho_m \ddot{\vec{x}} J dS_0. \quad (8.3.5)$$

Ma, poiché per l'equazione di continuità della massa (8.2.8) si ha

$$\rho_m J = \rho_0,$$

dove  $\rho_0$  è la densità di massa nella configurazione di riferimento, la (8.3.5) diventa:

$$\int_{S^*(t)} \rho \vec{v} dS = \int_{S_0^*} \rho_0 \ddot{\vec{x}} dS_0. \quad (8.3.6)$$

In maniera analoga si trasforma il primo integrale al secondo membro della (8.3.4):

$$\int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m dS_0. \quad (8.3.7)$$

Per quanto riguarda l'integrale di superficie che compare nella (8.3.4), applichiamo all'integrale esteso a  $\partial S^*(t)$  il lemma 8.1 per cui si ottiene:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0. \quad (8.3.8)$$

Rivolgiamo ora la nostra attenzione al vettore che compare sotto integrale al secondo membro della (8.3.8):

$$J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)$$

e consideriamone la  $i$ -esima componente data da:

$$[J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)]_i = J T_{ik}^{(m)} (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)_k = J T_{ik}^{(m)} G_{kj} n_{0j}, \quad (8.3.9)$$

dove abbiamo denotato con  $(T_{ik}^{(m)})$  la successione delle componenti di  $\tilde{T}_m$ .

Introduciamo a questo punto una nuova definizione.

**Definizione 8.14.** *Dato un corpo continuo in moto regolare, prende il nome di I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff il campo tensoriale materiale del II ordine  $\tilde{S} = \tilde{S}(P_0, t)$  così definito:*

$$\tilde{S}(P_0, t) = J(P_0, t) \tilde{T}_m(P_0, t) \tilde{G}_m(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.$$

Si potrebbe introdurre anche il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, ma tale definizione non è necessaria per i nostri scopi.

Le componenti di  $\tilde{S}$  sono date da:

$$S_{ij} = J T_{ik}^{(m)} G_{kj}.$$

Allora la (8.3.9) diventa:

$$[J \tilde{T}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)]_i = S_{ij} n_{0j} = [\tilde{S} \cdot \vec{n}_0]_i. \quad (8.3.10)$$

Grazie alla (8.3.10), la (8.3.8) si scrive nella forma

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \, d\Sigma_0. \quad (8.3.11)$$

Sostituendo le (8.3.6), (8.3.7), (8.3.11), nella (8.3.5), otteniamo che la prima equazione cardinale diventa:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \ddot{\vec{x}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m \, dS_0 + \int_{\partial S_0^*} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \, d\Sigma_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.3.12)$$

Osserviamo che, essendo il moto regolare,  $J, \tilde{G} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , mentre  $\tilde{T}_m \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0)$  per le usuali ipotesi di regolarità su  $\tilde{T}$ . Allora il tensore di Piola - Kirchhoff, come si vede facilmente dalla sua definizione, gode della seguente proprietà di regolarità:

$$\tilde{S} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0).$$

Grazie a tale proprietà di regolarità, possiamo applicare il teorema della divergenza all'integrale di superficie che compare nella (8.3.12) trasformandolo in un integrale di volume.

La (8.3.12) assume così la forma seguente:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \ddot{\vec{x}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \vec{F}_m \, dS_0 + \int_{S_0^*} \text{div}_0 \tilde{S} \, dS_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.3.13)$$

Riunendo tutto sotto un unico segno di integrale al primo membro, otteniamo:

$$\int_{S_0^*} (\rho_0 \ddot{\vec{x}} - \rho_0 \vec{F}_m - \text{div}_0 \tilde{S}) \, dS_0 = \vec{0} \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (8.3.14)$$

L'equazione (8.3.14) sussiste per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  e quindi per ogni  $S_0^*$  che sia chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S_0$ . Allora, grazie alla continuità del campo vettoriale sotto integrale ed all'arbitrarietà di  $S_0^*$  e di  $t$ , concludiamo che tale campo vettoriale è necessariamente nullo in  $\mathcal{S}_0$ , ossia si ha:

$$\rho_0 \ddot{\vec{x}} = \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.3.15)$$



La (8.3.15) è la **prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale.**

Se confrontiamo la (8.3.15) con la corrispondente equazione dal punto di vista spaziale:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}$$

si vede subito che c'è un'analogia formale tra le due equazioni.

Si noti comunque che nell'equazione dal punto di vista materiale non compare la densità di massa dal punto di vista materiale, ma la densità di massa nella configurazione di riferimento.

Appare poi evidente che il ruolo svolto in ambito spaziale dal tensore degli sforzi di Cauchy è svolto in ambito materiale dal I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

Per quanto riguarda la seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui ricordiamo che dal punto di vista spaziale non l'avevamo mai utilizzata direttamente, ma avevamo sempre fatto uso di una sua conseguenza, cioè la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per tale ragione, dal punto di vista materiale, non ricaveremo la seconda equazione indefinita a partire dalla seconda equazione cardinale, ma ci limiteremo a stabilire come si riflette sul tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per definizione del tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, abbiamo:

$$\tilde{S} = J \tilde{T}_m \tilde{G} = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^{-1})^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1}. \quad (8.3.16)$$

Se allora moltiplichiamo a destra il primo e l'ultimo membro della (8.3.16) per  $\tilde{F}^T$ , otteniamo

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m \tilde{a} = J \tilde{T}_m.$$

Dunque

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m. \quad (8.3.17)$$

D'altra parte, per la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy, si ha  $\tilde{T}_m = \tilde{T}_m^T$ , per cui dalla (8.3.17) deduciamo:

$$(\tilde{S} \tilde{F}^T)^T = (J \tilde{T}_m)^T \implies \tilde{F} \tilde{S}^T = J \tilde{T}_m^T = J \tilde{T}_m = \tilde{S} \tilde{F}^T.$$

In conclusione la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy comporta come conseguenza per il I tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff la relazione seguente

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.3.18)$$

Nel seguito, in luogo della seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui dal punto di vista materiale, faremo uso dell'equazione (8.3.18).

E' evidente che, come dal punto di vista spaziale, anche dal punto di vista materiale, in genere non è possibile impostare il problema del moto di un corpo continuo rimanendo in ambito puramente meccanico.

Le equazioni generali che abbiamo a disposizione sono:

- l'equazione di continuità della massa:

$$\rho_m J = \rho_0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0$$

- la prima equazione indefinita:

$$\rho_0 \ddot{\vec{x}} = \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0$$

- la conseguenza della seconda equazione indefinita:

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T \quad \text{in } \mathcal{S}_0.$$

Poiché siamo dal punto di vista materiale, l'incognita meccanica principale non è più il campo della velocità, bensì il campo  $\vec{x} = \vec{x}(P_0, t)$ . Tuttavia questo usualmente viene sostituito come campo incognito dal campo dello spostamento  $\vec{u} = \vec{u}(P_0, t)$ , correlato al campo  $\vec{x}$  nel modo seguente:

$$\vec{u}(P_0, t) = \vec{x}(P_0, t) - (P_0 - O),$$

per cui

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{u}}, \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{u}}.$$

Allora, preso  $\vec{u}$  come campo incognito al posto di  $\vec{x}$ , le equazioni che abbiamo a disposizione per impostare il problema del moto di un corpo continuo in ambito meccanico dal punto di vista materiale sono:

$$\begin{aligned} \rho_m J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^T. \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \quad (8.3.19)$$

In tali equazioni  $\rho_0$  e  $\vec{F}_m$ , sono campi assegnati, mentre il gradiente di deformazione  $\tilde{F}$  si esprime in funzione di  $\vec{u}$  nel modo seguente:

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$$

e  $J = \det \tilde{F}$ .

I campi scalari incogniti sono:  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\rho_m$ ,  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Dunque le incognite scalari sono in tutto 13.

D'altra parte il sistema di equazioni (8.3.19) equivale a 7 equazioni scalari indipendenti.

Perciò il problema non è determinato, essendo le incognite in numero superiore alle equazioni.

Per ottenere pareggio tra numero di equazioni e numero di incognite dovremmo aggiungere altre 6 equazioni scalari indipendenti. Tali equazioni, come abbiamo visto in un precedente corso relativamente all'ambito spaziale, devono caratterizzare il comportamento meccanico del corpo reale che stiamo schematizzando con il modello di corpo continuo e sono più precisamente le **relazioni sforzo-deformazione** suggerite dall'esperienza. Tuttavia l'esperienza stessa mostra che in esse compaiono, in generale, delle nuove grandezze incognite legate alla termodinamica.

Dunque, in generale, per risolvere il problema del moto di un corpo continuo deformabile, non è sufficiente rimanere in ambito meccanico, ma occorre affrontare un problema più generale: il **problema termomeccanico**.

## 8.4 Equazione e disequazione indefinita conseguenze degli assiomi della termodinamica.

Ci proponiamo in primo luogo di determinare l'equazione indefinita conseguenza del primo assioma della termodinamica. A tal fine richiamiamo l'equazione globale che traduce tale assioma per un corpo continuo.

**Assioma 8.1. I assioma della termodinamica per un corpo continuo.**  
Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora  $\forall t \in [t_0, t_1]$  si ha:

$$\int_{S(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S(t)} \rho r dS - \int_{\partial S(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS, \quad (8.4.1)$$

dove

$k$  = energia interna specifica;

$r$  = densità delle potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore;

$\vec{q}$  = vettore flusso di calore;

$\vec{n}$  = versore normale a  $\partial S(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S(t)$ .

(Non abbiamo specificato le altre grandezze che appaiono nella (8.4.1) perché sono già state usate più volte in precedenza).

Consideriamo ora un sottocorpo arbitrario  $\mathcal{C}^*$  del corpo continuo ed indichiamo con  $S^*(t)$  la regione che questo occupa all'istante  $t$  durante il moto. Scriviamo poi per  $\mathcal{C}^*$  la (8.4.1) ad un istante  $t$  arbitrario appartenente all'intervallo  $[t_0, t_1]$ :

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S^*(t)} \rho r dS - \int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS. \quad (8.4.2)$$

Denotata con  $S_0^*$  la regione che  $\mathcal{C}^*$  occupa nella configurazione di riferimento, applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione all'integrale al primo membro della (8.4.2) ottenendo:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS = \int_{S_0^*} J \rho_m \dot{k}_m dS_0 = \int_{S_0^*} \rho_0 \dot{k}_m dS_0, \quad (8.4.3)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso dell'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale.

Analogamente si deduce:

$$\int_{S^*(t)} \rho r dS = \int_{S_0^*} \rho_0 r_m dS_0. \quad (8.4.4)$$

Inoltre per il lemma 8.1 per l'integrale di superficie si ha:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0 \quad (8.4.5)$$

con  $\vec{n}_0$  versore normale a  $\partial S_0^*$  rivolto verso l'esterno di  $S_0^*$ .

Esprimiamo in componenti  $J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0)$ :

$$J \vec{q}_m \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) = J q_i^{(m)} G_{ij} n_{0j} = (J \vec{q}_m \cdot \tilde{G})_j n_{0j} = q_{0j} n_{0j} = \vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0,$$

avendo posto

$$\vec{q}_0 = J \vec{q}_m \cdot \tilde{G}.$$

Il campo vettoriale  $\vec{q}_0 = \vec{q}_0(P_0, t)$  è detto *vettore flusso di calore materiale*.

Allora la (8.4.5) assume la forma

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\partial S_0^*} \vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0. \quad (8.4.6)$$

Osserviamo che, essendo il moto regolare,  $J, \tilde{G} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}_0)$ , mentre  $\vec{q}_m \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0)$  per le usuali ipotesi di regolarità su  $\vec{q}$  (usualmente si suppone  $\vec{q} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ ). Allora il vettore flusso di calore, come si vede facilmente dalla sua definizione, gode della seguente proprietà di regolarità:

$$\vec{q}_0 \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S}_0).$$

Infine se applichiamo il teorema della divergenza, otteniamo

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_{S_0^*} \operatorname{div}_0 \vec{q}_0 \, dS_0. \quad (8.4.7)$$

Prendiamo ora in esame l'ultimo integrale al secondo membro della (8.4.2) ed applichiamo il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione:

$$\int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} \, dS = \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \, dS = \int_{S_0^*} J \tilde{T}_m \cdot (\operatorname{grad} \vec{v})_m \, dS_0. \quad (8.4.8)$$

Vediamo di trasformare in maniera opportuna la funzione integranda dell'ultimo integrale nella relazione scritta sopra:

$$J \tilde{T}_m \cdot (\operatorname{grad} \vec{v})_m = J T_{ij}^{(m)} (v_{i,j})_m.$$

D'altra parte, come sappiamo:

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{x}_i(x_{01}(x_1, x_2, x_3, t), x_{02}(x_1, x_2, x_3, t), x_{03}(x_1, x_2, x_3, t), t)$$

per cui, grazie al teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j}$$

da cui

$$(v_{i,j})_m = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)}. \quad (8.4.9)$$

Ma

$$\frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)} = G_{jk}.$$

Inserendo tale risultato nella (8.4.9), otteniamo

$$(v_{i,j})_m = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} G_{jk}. \quad (8.4.10)$$

Se sostituiamo la (8.4.10) nella (8.4.8), deduciamo:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} \, dS &= \int_{S_0^*} J T_{ij}^{(m)} G_{jk} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \, dS_0 \\ &= \int_{S_0^*} S_{ik} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \, dS_0 = \int_{S_0^*} \tilde{S} \cdot \operatorname{grad}_0 \dot{\vec{x}} \, dS_0. \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

D'altra parte, essendo il moto regolare,  $\vec{x} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  per cui

$$\begin{aligned} \text{grad}_0 \dot{\vec{x}} &= \text{grad}_0 \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}_0 \vec{x} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \dot{\tilde{F}}. \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Grazie alla (8.4.12), la (8.4.11) si scrive nella forma

$$\int_{S^*(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS = \int_{S_0^*} \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} dS_0. \quad (8.4.13)$$

A questo punto se sostituiamo agli integrali che compaiono nella (8.4.2) le espressioni trovate in (8.4.3), (8.4.4), (8.4.7), (8.4.13) perveniamo alla seguente equazione:

$$\int_{S_0^*} \left( \rho_0 \dot{k}_m - \rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} \right) dS_0 = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.4.14)$$

Poiché la (8.4.2) sussiste per ogni sottocorpo, deduciamo che l'equazione (8.4.14) vale per ogni  $S_0^*$  chiusura di un dominio regolare contenuto in  $S_0$ . Allora, stante l'arbitrarietà della regione d'integrazione e di  $t$ , grazie alla continuità della funzione integranda, per un noto lemma deduciamo:

$$\rho_0 \dot{k}_m = \rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 + \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{F}} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.15)$$

La (8.4.15) è l'**equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica dal punto di vista materiale**.

Ci proponiamo ora di dedurre la disequazione indefinita conseguenza del II assioma della termodinamica.

In primo luogo richiamiamo la disequazione che traduce in forma globale il II assioma della termodinamica per un corpo continuo.

**Assioma 8.2. II assioma della termodinamica.** *Sia dato un corpo continuo in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Allora  $\forall t \in [t_0, t_1]$  si ha:*

$$\int_{S(t)} \rho \dot{h} dS - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma \geq 0, \quad (8.4.16)$$

dove

$h$  = entropia specifica

$\vartheta$  = temperatura assoluta.

Come per dedurre l'equazione indefinita conseguenza del I assioma, scriviamo la (8.4.16) per un sottocorpo arbitrario ad un istante  $t$  arbitrario:

$$\int_{S^*(t)} \rho \dot{h} dS - \int_{S^*(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S^*(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma \geq 0. \quad (8.4.17)$$

Tenendo presente come abbiamo operato per la (8.4.2), trasformiamo gli integrali estesi a  $S^*(t)$  in integrali estesi a  $S_0^*$  applicando il teorema relativo al cambiamento delle variabili d'integrazione e l'integrale esteso a  $\partial S^*(t)$  in un integrale esteso a  $\partial S_0^*$  applicando il lemma 8.1 per cui la (8.4.17) diventa:

$$\int_{S_0^*} \rho_0 \dot{h}_m dS_0 - \int_{S_0^*} \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} dS_0 + \int_{\partial S_0^*} \frac{\vec{q}_0 \cdot \vec{n}_0}{\vartheta_m} d\Sigma_0 \geq 0. \quad (8.4.18)$$

Applichiamo ora il teorema della divergenza all'integrale di superficie nella (8.4.18) e riuniamo tutto sotto un unico integrale esteso a  $S_0^*$  cosicchè otteniamo:

$$\int_{S_0^*} \left[ \rho_0 \dot{h}_m - \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} + \text{div}_0 \left( \frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) \right] dS_0 \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (8.4.19)$$

Per l'arbitrarietà di  $S_0^*$  e di  $t$  e per la continuità della funzione integranda, dalla (8.4.19) discende:

$$\rho_0 \dot{h}_m - \frac{\rho_0 r_m}{\vartheta_m} + \text{div}_0 \left( \frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.20)$$

Per una proprietà dell'operatore divergenza abbiamo:

$$\text{div}_0 \left( \frac{\vec{q}_0}{\vartheta_m} \right) = \frac{1}{\vartheta_m} \text{div}_0 \vec{q}_0 + \text{grad}_0 \left( \frac{1}{\vartheta_m} \right) \cdot \vec{q}_0 = \frac{1}{\vartheta_m} \text{div}_0 \vec{q}_0 - \frac{1}{\vartheta_m^2} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0. \quad (8.4.21)$$

Se sostituiamo la (8.4.21) nella (8.4.20) e moltiplichiamo per  $\vartheta_m$  entrambi i membri della disuguaglianza risultante deduciamo:

$$\rho_0 \vartheta_m \dot{h}_m - \rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.22)$$

Eliminiamo dalla (8.4.22) il termine  $-\rho_0 r_m + \text{div}_0 \vec{q}_0$  sfruttando l'equazione (8.4.15) da cui ricaviamo:

$$\rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 = \rho_0 \dot{k}_m - \tilde{S} \cdot \tilde{F}. \quad (8.4.23)$$

Sostituendo la (8.4.23) nella (8.4.22) otteniamo:

$$\rho_0 (\vartheta_m \dot{h}_m - \dot{k}_m) + \tilde{S} \cdot \tilde{F} - \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.24)$$

La (8.4.24) è la **disequazione conseguenza del II assioma della termodinamica dal punto di vista materiale**.

Tale disuguaglianza si può scrivere anche in un'altra forma.

Infatti introduciamo la rappresentazione materiale dell'energia libera specifica  $\psi_m$  legata alle altre variabili termodinamiche nel modo seguente:

$$\psi_m = k_m - \vartheta_m h_m.$$

Se ne calcoliamo la derivata materiale rispetto al tempo, deduciamo:

$$\dot{\psi}_m = \dot{k}_m - \vartheta_m \dot{h}_m - \dot{\vartheta}_m h_m \implies \dot{k}_m - \vartheta_m \dot{h}_m = \dot{\psi}_m + \dot{\vartheta}_m h_m.$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella (8.4.24) e cambiando di segno ad entrambi i membri nella disuguaglianza risultante abbiamo

$$\rho_0 (\dot{\psi}_m + h_m \dot{\vartheta}_m) - \tilde{S} \cdot \tilde{F} + \frac{1}{\vartheta_m} \text{grad}_0 \vartheta_m \cdot \vec{q}_0 \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.25)$$

La (8.4.25) è nota come **disuguaglianza di Clausius-Duhem dal punto di vista materiale**.

La (8.4.24) (o la (8.4.25)) ad essa equivalente deve essere soddisfatta in  $\mathcal{S}_0$  qualunque sia l'evoluzione del corpo continuo.

Vediamo ora come si imposta il problema termomeccanico per un corpo continuo deformabile dal punto di vista materiale.

Le equazioni generali in ambito meccanico e termodinamico che sussistono per qualsiasi corpo continuo dal punto di vista materiale sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho_m J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F}_m + \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^T \\ \rho_0 \dot{k}_m &= \rho_0 r_m - \text{div}_0 \vec{q}_0 + \tilde{S} \cdot \tilde{F} \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (8.4.26)$$

Al sistema (8.4.26) dobbiamo poi aggiungere le **equazioni costitutive** per caratterizzare il comportamento meccanico e termodinamico del corpo reale che viene schematizzato con il modello di corpo continuo.

Poichè le incognite scalari nel sistema (8.4.26) sono  $\rho_m$ ,  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $k_m$  (sostituita eventualmente da  $\psi_m$ ),  $\vartheta_m$ ,  $h_m$ ,  $q_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ossia in tutto 19, mentre le equazioni scalari indipendenti sono 8, per ottenere il pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni bisogna aggiungere 11 equazioni costitutive scalari, ovviamente scritte in ambito materiale.

In particolare tra queste avremo le 6 relazioni sforzo-deformazione.



# Capitolo 9

## Solidi termoelastici e solidi elastici

### 9.1 Classe costitutiva dei solidi termoelastici.

Nel seguito supporremo sempre di studiare il moto dei corpi continui dal punto di vista materiale ed allora per comodità ometteremo il pedice  $m$  nella rappresentazione materiale dei vari campi coinvolti nel nostro studio.

In questo paragrafo ci proponiamo di definire la classe costitutiva dei solidi termoelastici. Questo modello schematizza i solidi reali che si deformano o perchè vengono sottoposti a sforzi meccanici o perchè ad essi viene fornito o sottratto calore e che manifestano un comportamento elastico, cioè ritornano allo stato iniziale se cessa la causa della deformazione.

I solidi termoelastici sono studiati dal punto di vista materiale.

**Definizione 9.1.** *Sia dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  occupante la regione  $S_0$  nella configurazione di riferimento. Diremo che  $\mathcal{C}$  è un solido termoelastico se, preso un suo qualsiasi moto in un dato intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , i valori assunti in  $(P_0, t) \in S_0 \times [t_0, t_1] = \mathcal{S}_0$  dall'energia libera specifica  $\psi$ , dal tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff  $\tilde{S}$ , dall'entropia specifica  $h$  e dal vettore flusso di calore materiale  $\vec{q}_0$  sono noti se sono noti i valori assunti in  $(P_0, t)$  dal tensore gradiente di deformazione  $\tilde{F}$ , dalla temperatura  $\vartheta$  e dal gradiente di temperatura  $\text{grad}_0 \vartheta$ .*

Un solido termoelastico è dunque un corpo continuo caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ \tilde{S} &= \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ h &= \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0) \\ \vec{q}_0 &= \vec{\tilde{q}}_0(\tilde{F}, \vartheta, \text{grad}_0 \vartheta, P_0)\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

dove  $\widehat{\psi}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widehat{h}$ ,  $\vec{q}_0$  sono dette **funzioni risposta** e sono note dall'esperienza. La seconda delle (9.1.1) rappresenta la **relazione sforzo-deformazione**, l'ultima è la **legge di propagazione del calore**.

Nel seguito per brevità denoteremo il gradiente di temperatura  $\text{grad}_0 \vartheta$  con  $\vec{g}$  per cui riscriviamo le (9.1.1) nella forma

$$\begin{aligned}\psi &= \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ \widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ h &= \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \\ \vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0).\end{aligned}\tag{9.1.2}$$

Indichiamo con  $\mathcal{A}$  l'insieme delle disposizioni ordinate  $(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0)$  dove  $\widetilde{F}$  è un tensore del II ordine tale che  $\det \widetilde{F} > 0$ ,  $\vartheta$  è uno scalare positivo,  $\vec{g}$  è un vettore,  $P_0$  è un punto di  $S_0$ .

Assumeremo che le funzioni risposta  $\widehat{\psi}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widehat{h}$ ,  $\vec{q}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{A})$ .

Inoltre supporremo che la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff soddisfi alla condizione seguente:

$$\widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \quad \forall (\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}, P_0) \in \mathcal{A}, \tag{9.1.3}$$

poiché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff deve essere tale che  $\widetilde{S} \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T$  in conseguenza della seconda equazione indefinita della meccanica dei corpi continui.

Vediamo ora se riusciamo ad impostare in maniera completa il problema termomeccanico per un solido termoelastico facendo uso delle equazioni costitutive (9.1.2).

Le equazioni generali che governano il problema termomeccanico per un corpo continuo dal punto di vista materiale sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \widetilde{S} \\ \widetilde{S} \widetilde{F}^T &= \widetilde{F} \widetilde{S}^T \\ \rho_0 \dot{k} &= \rho_0 r + \text{div}_0 \vec{q}_0 - \widetilde{S} \cdot \dot{\vec{F}}\end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \tag{9.1.4}$$

cui si associano le equazioni costitutive.

Le incognite scalari del problema sono 19:

$$\rho, u_i (i = 1, 2, 3), S_{ij} (i, j = 1, 2, 3), k(\circ\psi), \vartheta, h, q_{0i} (i = 1, 2, 3),$$

mentre le equazioni generali danno luogo a 8 equazioni scalari indipendenti. Per avere pareggio tra numero di incognite e numero di equazioni, le equazioni costitutive devono corrispondere a 11 equazioni scalari indipendenti. In effetti delle equazioni costitutive di un solido termoelastico ve ne sono due scalari (quelle relative all'energia libera specifica ed all'entropia specifica), una vettoriale equivalente a tre equazioni scalari (la legge di propagazione del calore) ed una tensoriale (relativa al tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff) che è equivalente non a nove equazioni scalari indipendenti bensì a sei perchè la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff soddisfa all'equazione tensoriale (9.1.3) equivalente a tre equazioni scalari indipendenti. Dunque le equazioni costitutive corrispondono a 11 equazioni scalari indipendenti.

**Osservazione 9.1.** La densità di massa compare soltanto nell'equazione di continuità della massa per cui è possibile isolare  $\rho$  dalle altre incognite e l'equazione di continuità dalle altre equazioni del problema termomeccanico. Si ottiene così un problema di 18 equazioni scalari in 18 incognite. Una volta risolto tale problema ed in particolare determinato il campo dello spostamento, si determina la densità di massa dall'equazione di continuità.

**Osservazione 9.2.** Come vediamo dalle equazioni costitutive, i valori che le grandezze costitutive assumono in un dato punto ed in un dato istante dipendono solo dai valori che le grandezze fondamentali assumono nello stesso punto e nello stesso istante. Perciò le equazioni costitutive di un solido termoelastico soddisfano agli assiomi dell'azione locale e di determinismo. Tra l'altro i solidi termoelastici non sono dotati di memoria.

Per quanto riguarda l'assioma dell'obiettività per il momento non ce ne occupiamo.

Ci proponiamo ora di stabilire quali restrizioni sono imposte alle equazioni costitutive dalla loro compatibilità con il II assioma della termodinamica.

Premettiamo una definizione ed un lemma.

**Definizione 9.2.** *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (9.1.2), definiamo processo termoelastico ammissibile ogni disposizione ordinata  $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$  dove  $\vartheta, \psi, h$  sono campi scalari,  $\vec{u}, \vec{q}_0$  campi vettoriali,  $\tilde{S}$  campo tensoriale del II ordine definiti in  $\hat{S}_0 \times (t', t'')$  con  $\hat{S}_0$  aperto contenuto in  $S_0$  e  $(t', t'') \subset [t_0, t_1]$  soddisfacenti alle seguenti condizioni:*

- $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\hat{S}_0 \times (t', t''))$
- $\vartheta \in \mathcal{C}^{2,1}(\hat{S}_0 \times (t', t''))$

- $\psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0$  sono definiti mediante le equazioni costitutive (9.1.2) del solido termoelastico con  $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$  e  $\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta$ .

$\hat{S}_0 \times (t', t'')$  è detto dominio del processo termoelastico.

Dimostriamo ora il seguente lemma

**Lemma 9.1.** *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (9.1.2), fissiamo ad arbitrio la disposizione ordinata  $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$  con  $\bar{P}_0$  punto interno di  $S_0$ , l'istante  $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ , lo scalare  $\alpha$ , il vettore  $\vec{a}$ , il tensore del II ordine  $\tilde{A}$ . Allora esiste un processo termoelastico ammissibile tale che:*

$$\tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{F}, \quad \vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vartheta}, \quad \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \vec{g}, \quad (9.1.5)$$

$$\dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{A}, \quad \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \alpha, \quad \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \vec{a}. \quad (9.1.6)$$

Dimostrazione

Cominciamo con l'osservare che, essendo  $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$ , abbiamo:

$$\det \tilde{F} > 0, \quad \bar{\vartheta} > 0.$$

Definiamo in  $S_0 \times [t_0, t_1]$  il campo tensoriale del II ordine (dipendente solo da  $t$ ):

$$\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A}$$

e il campo scalare:

$$\bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\vec{g} + (t - \bar{t})\vec{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0).$$

Osserviamo che in  $(\bar{P}_0, \bar{t})$  il campo tensoriale si riduce a  $\tilde{F}$  e il campo scalare a  $\bar{\vartheta}$ . Poiché entrambi sono continui in  $S_0 \times [t_0, t_1]$ , esistono un intorno di  $\bar{P}_0$ ,  $U(\bar{P}_0) \subset S_0$ , e un intervallo  $(t', t'') \subset [t_0, t_1]$  contenente l'istante  $\bar{t}$  tali che  $\forall (P_0, t) \in U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$  si ha

$$\det [\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A}] > 0,$$

$$\bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\vec{g} + (t - \bar{t})\vec{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0) > 0.$$

Consideriamo ora la disposizione ordinata  $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$  dove  $\vartheta, \psi, h$  sono campi scalari,  $\vec{u}, \vec{q}_0$  campi vettoriali,  $\tilde{S}$  campo tensoriale del II ordine definiti in  $U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$  soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- $\vec{u} = [\tilde{F} + (t - \bar{t})\tilde{A} - \tilde{a}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0)$

- $\vartheta = \bar{\vartheta} + \alpha(t - \bar{t}) + [\bar{\vec{g}} + (t - \bar{t}) \bar{\vec{a}}] \cdot (P_0 - \bar{P}_0)$
- $\psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0$  sono definiti mediante le equazioni costitutive (9.1.2) nelle quali si pone  $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$  e  $\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta$ .

Poiché, come conseguenza della loro definizione,  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(U(\bar{P}_0) \times (t', t''))$ ,  $\vartheta \in \mathcal{C}^{2,1}(U(\bar{P}_0) \times (t', t''))$ , concludiamo che la disposizione ordinata  $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \tilde{S}, h, \vec{q}_0)$  definita sopra è un processo termoelastico ammissibile avente come dominio  $U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$ .

Mostriamo ora che tale processo soddisfa alle (9.1.5), (9.1.6).

Osserviamo in primo luogo che:

$$\text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{F} + (t - \bar{t}) \tilde{A} - \tilde{a} \implies \tilde{F} = \tilde{F} + (t - \bar{t}) \tilde{A} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'').$$

Allora

$$\tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{F}$$

così come si ha

$$\vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vartheta}.$$

Inoltre

$$\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta = \bar{\vec{g}} + (t - \bar{t}) \bar{\vec{a}} \implies \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vec{g}}.$$

Dunque le (9.1.5) sono soddisfatte.

D'altra parte:

$$\tilde{F} = \tilde{A} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'')$$

per cui ovviamente

$$\dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \tilde{A}.$$

Per quanto riguarda  $\vartheta$ , si ha:

$$\dot{\vartheta}(P_0, t) = \alpha + \bar{\vec{a}} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \implies \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \alpha.$$

Infine dall'espressione ottenuta sopra per  $\vec{g}$  si deduce immediatamente:

$$\dot{\vec{g}} = \bar{\vec{a}} \text{ in } U(\bar{P}_0) \times (t', t'') \implies \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) = \bar{\vec{a}}.$$

Perciò sono verificate anche le (9.1.6) e quindi il lemma è dimostrato.

Nel seguito per brevità ometteremo nelle funzioni risposta che compaiono nelle equazioni costitutive la dipendenza da  $P_0$ .

Enunciamo e dimostriamo ora il teorema che fornisce le condizioni di compatibilità delle equazioni costitutive di un solido termoelastico con il II assioma della termodinamica.

**Teorema 9.1.** *Sia dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (9.1.2).*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni processo termoelastico ammissibile soddisfi la disuguaglianza di Clausius-Duhem è che le funzioni risposta che compaiono nelle (9.1.2) verifichino le seguenti condizioni:*

(1)  $\widehat{\psi}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widehat{h}$  sono indipendenti da  $\vec{g} = \text{grad}_0 \vartheta$ ;

(2) la funzione risposta  $\widehat{\psi}$  per l'energia libera specifica determina le funzioni risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff  $\widetilde{S}$  e per l'entropia specifica  $\widehat{h}$  nel modo seguente:

$$\widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad (9.1.7)$$

$$\widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}; \quad (9.1.8)$$

(3) è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{A},$$

detta disuguaglianza del calore.

#### Dimostrazione

Scriviamo la disuguaglianza di Clausius-Duhem dal punto di vista materiale:

$$\rho_0(\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \widetilde{S} \cdot \dot{\widetilde{F}} + \frac{1}{\vartheta} \vec{g} \cdot \vec{q}_0 \leq 0.$$

Consideriamo un processo termoelastico ammissibile  $(\vec{u}, \vartheta, \psi, \widetilde{S}, h, \vec{q}_0)$  con dominio  $\hat{S}_0 \times (t', t'')$ . Questo soddisferà alla disuguaglianza di Clausius-Duhem se e solo se:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[ \dot{\widehat{\psi}}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}) + \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \dot{\vartheta} \right] - \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \dot{\widetilde{F}} \\ + \frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0 \quad \text{in } \hat{S}_0 \times (t', t''). \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

Se applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\dot{\widehat{\psi}} = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial g_i} \dot{g}_i = \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi} \cdot \dot{\widetilde{F}} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \partial_{\vec{g}} \widehat{\psi} \cdot \dot{\vec{g}}. \quad (9.1.10)$$

Sostituendo la (9.1.10) nella (9.1.9), otteniamo che il processo termoelastico ammissibile soddisfa alla disuguaglianza di Clausius-Duhem se e solo se in  $\hat{S}_0 \times (t', t'')$  si ha

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \right] \cdot \dot{\tilde{F}} + \\ & + \rho_0 \left[ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) + \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \right] \dot{\vartheta} + \\ & + \rho_0 \partial_{\vec{g}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \dot{\vec{g}} + \frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Dimostriamo dapprima la condizione sufficiente.

Per ipotesi valgono le condizioni (1), (2), (3) e dobbiamo provare che ogni processo termoelastico ammissibile soddisfa nel suo dominio alla disuguaglianza di Clausius-Duhem, ossia alla disuguaglianza (9.1.11). Ma la dimostrazione di ciò è immediata poiché, preso un qualsiasi processo termoelastico ammissibile, dalla (1) discende

$$\rho_0 \partial_{\vec{g}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \dot{\vec{g}} = 0,$$

la (2) implica

$$\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) = \tilde{0}, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) + \hat{h}(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) = 0$$

per cui il primo membro della (9.1.11) si riduce a

$$\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \vartheta, \vec{g}) \cdot \vec{g}$$

che per la (3) risulta minore o uguale a zero nel dominio del processo.

Dimostriamo ora la condizione necessaria.

Per ipotesi ogni processo termoelastico ammissibile soddisfa nel suo dominio alla disuguaglianza di Clausius-Duhem ossia alla disuguaglianza (9.1.11) e dobbiamo provare che valgono le condizioni (1), (2), (3).

Fissiamo ad arbitrio una disposizione ordinata  $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$  con  $\bar{P}_0$  punto interno di  $S_0$ , un istante  $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ , uno scalare  $\alpha$ , un vettore  $\vec{a}$ , un tensore del II ordine  $\tilde{A}$ . Grazie al lemma 9.1, esiste un processo termoelastico ammissibile tale che

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \tilde{F}, & \vartheta(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \bar{\vartheta}, & \vec{g}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \vec{g}, \\ \dot{\tilde{F}}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \tilde{A}, & \dot{\vartheta}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \alpha, & \dot{\vec{g}}(\bar{P}_0, \bar{t}) &= \vec{a}. \end{aligned}$$

Per ipotesi tale processo termoelastico soddisfa alla disuguaglianza (9.1.10) per ogni  $(P_0, t)$  appartenente al suo dominio di definizione; in particolare tale disuguaglianza è soddisfatta in  $(\bar{P}_0, \bar{t})$  ed assume la forma:

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_0 \partial_{\bar{F}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) - \widetilde{S}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \cdot \widetilde{A} + \\ & + \rho_0 \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta}}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) + \widehat{h}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \alpha + \\ & + \rho_0 \partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{a} + \frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Poiché  $\widetilde{A}$ ,  $\alpha$ ,  $\bar{a}$  sono arbitrari, prendiamo dapprima:

$$\widetilde{A} = \bar{0}, \quad \alpha = 0, \quad \bar{a} = \bar{0}.$$

Con questa scelta la (9.1.12) si riduce a:

$$\frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \quad (9.1.13)$$

La (9.1.13) sussiste per ogni disposizione ordinata  $(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}, \bar{P}_0)$  in  $\mathcal{A}$  con  $\bar{P}_0 \in \overset{\circ}{S}_0$ , ma in realtà per continuità vale anche per  $\bar{P}_0 \in \partial S_0$ . Dunque vale la condizione (3).

Supponiamo ora

$$\widetilde{A} = \bar{0}, \quad \alpha = 0, \quad \bar{a} \text{ arbitrario } \neq \bar{0}$$

Dalla (9.1.12) deduciamo:

$$\rho_0 \partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{a} \leq -\frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \quad \forall \bar{a}. \quad (9.1.14)$$

Il secondo membro della disuguaglianza (9.1.14) per il risultato precedente è un numero fissato non negativo; poiché  $\bar{a}$  è arbitrario, necessariamente si ha

$$\partial_{\bar{g}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) = \bar{0} \quad \forall (\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}, \bar{P}_0) \in \mathcal{A}$$

da cui deduciamo che  $\widehat{\psi}$  non dipende da  $\bar{g}$ . Perciò la disuguaglianza (9.1.12) assume la forma ridotta:

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_0 \partial_{\bar{F}} \widehat{\psi}(\bar{F}, \bar{\vartheta}) - \widetilde{S}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \cdot \widetilde{A} + \\ & + \rho_0 \left[ \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta}}(\bar{F}, \bar{\vartheta}) + \widehat{h}(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \right] \alpha + \\ & + \frac{1}{\vartheta} \bar{q}_0(\bar{F}, \bar{\vartheta}, \bar{g}) \cdot \bar{g} \leq 0. \end{aligned} \quad (9.1.15)$$



Prendiamo ora

$$\tilde{A} = \tilde{0}, \quad \alpha \text{ arbitrario } \neq 0$$

per cui la (9.1.15) diventa:

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}) + \hat{h}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \right] \alpha \leq -\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \cdot \vec{g}. \quad (9.1.16)$$

Poiché  $\alpha$  è arbitrario e il secondo membro della disuguaglianza scritta sopra è un numero fissato non negativo, deduciamo che il termine in parentesi quadra nella (9.1.16) è nullo, per cui grazie all'arbitrarietà della disposizione ordinata  $(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}, \bar{P}_0)$ , concludiamo che  $\hat{h}$  non dipende da  $\vec{g}$  e si ha:

$$\hat{h}(\tilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}.$$

Grazie a questo risultato, la (9.1.15) diventa

$$\left[ \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}) - \tilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \right] \cdot \tilde{A} \leq -\frac{1}{\vartheta} \vec{q}_0(\tilde{F}, \bar{\vartheta}, \vec{g}) \cdot \vec{g} \leq 0.$$

da cui per l'arbitrarietà di  $\tilde{A}$  deduciamo che  $\tilde{S}$  non dipende da  $\vec{g}$  e si ha

$$\tilde{S}(\tilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta) \quad \text{in } \mathcal{A}.$$

Abbiamo così ottenuto in maniera completa anche le condizioni (1) e (2) del teorema.

Nel seguito supporremo sempre che le funzioni risposta del solido termoelastico soddisfino alle condizioni (1), (2), (3).

## 9.2 Proprietà dei solidi termoelastici.

Ci proponiamo ora di mostrare che, nell'ipotesi che le funzioni risposta del solido termoelastico soddisfino alle 3 condizioni del teorema 9.1, è possibile sostituire nelle equazioni costitutive alla temperatura  $\vartheta$  come grandezza fondamentale l'entropia  $h$ , grazie alle osservazioni sperimentali.

Prima di tutto riscriviamo le equazioni costitutive supponendo verificate le condizioni (1), (2), (3):

$$\begin{aligned}
 \psi &= \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta, ) \\
 \widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \widetilde{S}(\widetilde{F}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta) \\
 h &= \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \\
 \vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, \vartheta, \vec{g})
 \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

dove  $\vec{q}_0$  soddisfa alla disuguaglianza del calore.  
Introduciamo la seguente definizione

**Definizione 9.3.** *Dato un solido termoelastico caratterizzato dalle equazioni costitutive (9.2.1), si definisce calore specifico corrispondente a  $\widetilde{F}$  e  $\vartheta$  lo scalare, denotato con  $C(\widetilde{F}, \vartheta)$ , dato da*

$$C(\widetilde{F}, \vartheta) = \vartheta \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta).$$

D'altra parte l'esperienza mostra che

$$C(\widetilde{F}, \vartheta) > 0 \quad \forall (\widetilde{F}, \vartheta),$$

da cui

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \vartheta}(\widetilde{F}, \vartheta) \neq 0.$$

Allora per il teorema sulle funzioni implicite dall'equazione

$$h = \widehat{h}(\widetilde{F}, \vartheta)$$

è possibile ottenere, almeno localmente, la temperatura  $\vartheta$  in funzione di  $h$  in corrispondenza di ogni fissato valore di  $\widetilde{F}$ , ossia è possibile esprimere  $\vartheta$  nella forma

$$\vartheta = \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h).$$

Alle equazioni costitutive (9.2.1) sostituiamo le nuove equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}
 k &= \bar{k}(\widetilde{F}, h) \\
 \widetilde{S} &= \widetilde{S}(\widetilde{F}, h) \quad \text{con} \quad \widetilde{S}(\widetilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \bar{k}(\widetilde{F}, h) \\
 \vartheta &= \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h) \quad \text{con} \quad \bar{\vartheta}(\widetilde{F}, h) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(\widetilde{F}, h) \\
 \vec{q}_0 &= \vec{q}_0(\widetilde{F}, h, \vec{g})
 \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{k}(\tilde{F}, h) &= \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) + h \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) \\ \widetilde{S}(\tilde{F}, h) &= \widetilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) \\ \overrightarrow{q_0}(\tilde{F}, h, \overrightarrow{g}) &= \overrightarrow{q_0}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h), \overrightarrow{g}).\end{aligned}$$

Dunque se si assume  $h$  come grandezza fondamentale in luogo di  $\vartheta$ , le funzioni risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff e per la temperatura sono determinate dalla funzione risposta per l'energia interna specifica.

Dimostriamo che

$$\widetilde{S}(\tilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h).$$

Infatti, se calcoliamo il gradiente rispetto a  $\tilde{F}$  della funzione  $\bar{k}$ , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$\partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h) = \partial_{\tilde{F}} \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) \partial_{\tilde{F}} \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) + h \partial_{\tilde{F}} \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h). \quad (9.2.3)$$

Ma per la condizione (2)

$$\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = -h$$

per cui nella (9.2.3) gli ultimi due termini si elidono. Moltiplicando per  $\rho_0$  la relazione risultante, si deduce:

$$\rho_0 \partial_{\tilde{F}} \bar{k}(\tilde{F}, h) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \widehat{\psi}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = \widetilde{S}(\tilde{F}, \bar{\vartheta}(\tilde{F}, h)) = \widetilde{S}(\tilde{F}, h).$$

Resta così provato ciò che ci proponevamo di dimostrare.

In maniera analoga si dimostra:

$$\bar{\vartheta}(\tilde{F}, h) = \frac{\partial \bar{k}}{\partial h}(\tilde{F}, h).$$

Nel §1 avevamo osservato che le equazioni costitutive di un solido termoelastico soddisfano agli assiomi dell'azione locale e di determinismo, ma non avevamo detto nulla riguardo l'assioma dell'obiettività.

Se si considerano le equazioni costitutive nella forma (9.2.1), si potrebbe dimostrare il seguente

**Teorema 9.2.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive (9.2.1) per un solido termoelastico soddisfino all'assioma dell'obiettività è che esse si possano scrivere nella forma ridotta:*

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^*(\tilde{d}, \vartheta, ) \\ \tilde{S} &= \tilde{F} \tilde{S}^*(\tilde{d}, \vartheta) \quad \text{con} \quad \tilde{S}^*(\tilde{d}, \vartheta) = \rho_0 \partial_{\tilde{d}} \psi^*(\tilde{d}, \vartheta) \\ h &= h^*(\tilde{d}, \vartheta) \quad \text{con} \quad h^*(\tilde{d}, \vartheta) = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta}(\tilde{d}, \vartheta) \\ \vec{q}_0 &= \vec{q}_0^*(\tilde{d}, \vartheta, \vec{g})\end{aligned}\tag{9.2.4}$$

dove le funzioni contraddistinte con l'asterisco sono note e fornite dall'esperienza, mentre  $\tilde{d}$  è il tensore di deformazione finita, introdotto nel capitolo precedente.

Omettiamo la dimostrazione del teorema.

E' comunque interessante osservare che dalle (9.2.4) si deduce la simmetria della funzione tensoriale  $\tilde{S}^*$ . Infatti, grazie alla simmetria di  $\tilde{d}$ , in componenti si ha

$$S_{ij}^* = \rho_0 \frac{\partial \psi^*}{\partial d_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^*}{\partial d_{ji}} = S_{ji}^*.$$

Dalla simmetria di  $\tilde{S}^*$ , ne discende che la condizione cui deve soddisfare il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff come conseguenza della seconda equazione indefinita è automaticamente soddisfatta.

Infatti se  $\tilde{S} = \tilde{F} \tilde{S}^*$ , si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{S} \tilde{F}^T &= \tilde{F} \tilde{S}^* \tilde{F}^T \\ \tilde{F} \tilde{S}^T &= \tilde{F} (\tilde{F} \tilde{S}^*)^T = \tilde{F} \tilde{S}^{*T} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^* \tilde{F}^T\end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T,$$

come volevamo dimostrare.

### 9.3 Solidi elastici.

Introduciamo un'importante sottoclasse dei solidi termoelastici, la sottoclasse dei solidi elastici.

**Definizione 9.4.** *Un solido elastico è un solido termoelastico per il quale la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff dipende soltanto da  $\tilde{F}$  per cui:*

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F}, P_0)$$

o equivalentemente

$$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, P_0).$$

Nel seguito ometteremo per brevità la dipendenza di  $\tilde{\tilde{S}}$  da  $P_0$ . Inoltre supporremo  $\tilde{\tilde{S}}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e soddisfacente la condizione:

$$\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}) \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{\tilde{S}}^T(\tilde{F}).$$

Una sottoclasse dei solidi elastici è costituita dai solidi iperelastici.

**Definizione 9.5.** Diciamo che un solido elastico è iperelastico se esiste una funzione a valori reali  $\omega = \omega(\tilde{F}, P_0)$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tale che:

$$\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, P_0) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \omega(\tilde{F}, P_0). \quad (9.3.1)$$

La funzione  $\omega$  è detta potenziale elastico.

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 9.1.** Un solido termoelastico che evolve in condizioni isotermiche o isentropiche si comporta come un solido iperelastico.

Dimostrazione

Supponiamo dapprima di avere un solido termoelastico che nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  evolve in condizioni isoterme, per cui  $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ :

$$\vartheta(P_0, t) = \vartheta_0 \quad \text{con} \quad \vartheta_0 = \text{costante} > 0.$$

Se consideriamo la funzione risposta per l'energia libera specifica  $\hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta)$ , questa viene a dipendere solo da  $\tilde{F}$  (oltre che ovviamente da  $P_0$ ) poiché  $\vartheta$  assume il valore costante  $\vartheta_0$ . Dunque

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta_0).$$

D'altra parte

$$\tilde{\tilde{S}} = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \hat{\psi},$$

per cui

$$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta_0)$$

e quindi la funzione risposta per il tensore di Piola-Kirchhoff viene a dipendere solo da  $\tilde{F}$  e il solido si comporta come un solido elastico. Inoltre  $\tilde{\tilde{S}}(\tilde{F}, \vartheta_0)$  è dato dal prodotto di  $\rho_0$  per il gradiente rispetto a  $\tilde{F}$  di  $\hat{\psi}(\tilde{F}, \vartheta_0)$  per cui il solido termoelastico si comporta come un solido iperelastico avente come potenziale

elastico  $\widehat{\psi}(\widetilde{F}, \vartheta_0)$ .

Supponiamo ora che il solido termoelastico nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  evolva in condizioni isentropiche, per cui  $\forall(P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ :

$$h(P_0, t) = h_0 \quad \text{con} \quad h_0 = \text{costante.}$$

Se consideriamo la funzione risposta per l'energia interna specifica  $\bar{k}(\widetilde{F}, h)$ , questa viene a dipendere solo da  $\widetilde{F}$  (oltre che ovviamente da  $P_0$ ) poiché  $h$  assume il valore costante  $h_0$ . Dunque

$$k = \bar{k}(\widetilde{F}, h_0).$$

D'altra parte

$$\widetilde{S} = \rho_0 \partial_{\widetilde{F}} \bar{k},$$

per cui

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}(\widetilde{F}, h_0)$$

e quindi la funzione risposta per il tensore di Piola-Kirchhoff viene a dipendere solo da  $\widetilde{F}$  e il solido si comporta come un solido elastico. Inoltre  $\widetilde{S}(\widetilde{F}, h_0)$  è il prodotto di  $\rho_0$  per il gradiente rispetto a  $\widetilde{F}$  di  $\bar{k}(\widetilde{F}, h_0)$  per cui il solido termoelastico si comporta come un solido iperelastico avente come potenziale elastico  $\bar{k}(\widetilde{F}, h_0)$ .

Proviamo ora la seguente

**Proposizione 9.2.** *Per un solido elastico è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione

Le equazioni puramente meccaniche (dal punto di vista materiale) che abbiamo a disposizione per studiare il moto di un solido elastico sono le seguenti:

- equazione di continuità della massa

$$\rho J = \rho_0$$

- I equazione indefinita della meccanica dei corpi continui

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \widetilde{S} \quad (9.3.2)$$

- relazione conseguenza della II equazione indefinita

$$\widetilde{S} \widetilde{F}^T = \widetilde{F} \widetilde{S}^T \quad (9.3.3)$$

- relazione sforzo - deformazione

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F}) \quad (9.3.4)$$

cui va associata l'equazione:

$$\tilde{S}(\tilde{F}) \tilde{F}^T = \tilde{F} \tilde{S}^T(\tilde{F}). \quad (9.3.5)$$

Osserviamo che, come per un generico solido termoelastico, la densità di massa  $\rho$  appare solo nell'equazione di continuità per cui possiamo isolare  $\rho$  dalle altre incognite così come l'equazione di continuità dalle restanti equazioni. Una volta risolto il problema del moto utilizzando le altre equazioni, si determina la densità di massa dall'equazione di continuità.

Ci limitiamo dunque a considerare le equazioni (9.3.2), (9.3.3), (9.3.4) insieme alla (9.3.5). Le incognite scalari sono 12:  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Le equazioni scalari indipendenti sono esattamente 12 perché l'equazione tensoriale (9.3.3) equivale a tre equazioni scalari indipendenti e l'equazione tensoriale (9.3.4) non è equivalente a 9 equazioni scalari indipendenti, ma a 6 per la presenza della (9.3.5) che a sua volta è equivalente a 3 equazioni scalari indipendenti ( $9 - 3 = 6$ ).

Dunque il problema del moto per il solido elastico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Se supponiamo che il solido elastico si trovi nella configurazione di riferimento  $\phi_0$ , lo spostamento  $\vec{u}$  è nullo in  $S_0$  e dunque, essendo  $\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}$ , in corrispondenza della configurazione  $\phi_0$  risulta  $\tilde{F} = \tilde{a}$  in  $S_0$ .

Introduciamo la seguente definizione

**Definizione 9.6.** *Prende il nome di sforzo residuo il valore che  $\tilde{S}$  assume nella configurazione di riferimento, ossia  $\tilde{S}(\tilde{a})$ .*

Diamo ora una definizione che svolge un ruolo fondamentale nella teoria dell'elasticità.

**Definizione 9.7.** *Si definisce tensore elastico il tensore del IV ordine  $\tilde{c}$  dato da*

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{S}(\tilde{a}).$$

Le componenti del tensore elastico sono

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

Osserviamo inoltre che, poiché in generale  $\tilde{S}$  dipende anche da  $P_0$ , il tensore elastico risulta un campo tensoriale definito in  $S_0$ , cioè

$$\tilde{c} = \tilde{c}(P_0) \quad \text{con } P_0 \in S_0.$$

Il tensore elastico gode di particolari proprietà di simmetria a seconda delle proprietà di cui gode la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff. Proviamo a tal riguardo tre proposizioni.

**Proposizione 9.3.** *Se lo sforzo residuo è nullo, allora il tensore elastico è simmetrico rispetto alla prima coppia di indici, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{jirs}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Per definizione di tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, si ha

$$\tilde{S} = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^{-1})^T = J \tilde{T}_m (\tilde{F}^T)^{-1}. \quad (9.3.6)$$

Moltiplicando a destra il primo e l'ultimo membro della (9.3.6) per  $\tilde{F}^T$ , otteniamo

$$\tilde{S} \tilde{F}^T = J \tilde{T}_m,$$

da cui discende:

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{J} \tilde{S} \tilde{F}^T. \quad (9.3.7)$$

Tenendo presente che

$$J = \det \tilde{F}, \quad \tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F}),$$

dalla (9.3.7) possiamo ottenere la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Cauchy rappresentato in ambito materiale:

$$\tilde{T}_m(\tilde{F}) = \frac{1}{\det \tilde{F}} \tilde{S}(\tilde{F}) \tilde{F}^T. \quad (9.3.8)$$

Ovviamente  $\tilde{T}_m$  è una funzione tensoriale simmetrica essendo la funzione risposta del tensore degli sforzi di Cauchy.

Per ottenere il risultato desiderato sarà sufficiente far vedere che:

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{T}_m(\tilde{a}). \quad (9.3.9)$$

Infatti, se è vera la (9.3.9), si ha

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}) = \frac{\partial \hat{T}_{ji}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}) = c_{jirs}.$$



Per ottenere la (9.3.9), esplicitiamo dapprima le componenti di  $\widetilde{T}_m$ :

$$\widehat{T}_{ij}^{(m)}(\widetilde{F}) = \frac{1}{\det \widetilde{F}} \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}) F_{jk} = \frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}). \quad (9.3.10)$$

Ora procuriamoci le componenti di  $\partial_{\widetilde{F}} \widetilde{T}_m$  in corrispondenza di un generico valore di  $\widetilde{F}$ :

$$\frac{\partial \widehat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{F}) = \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left( \frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \right) \widehat{S}_{ik}(\widetilde{F}) + \frac{F_{jk}}{\det \widetilde{F}} \frac{\partial \widehat{S}_{ik}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{F}). \quad (9.3.11)$$

Poniamo nella (9.3.11)  $\widetilde{F} = \widetilde{a}$  e teniamo presente che  $\widehat{S}_{ik}(\widetilde{a}) = 0$ :

$$\frac{\partial \widehat{T}_{ij}^{(m)}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = \delta_{jk} \frac{\partial \widehat{S}_{ik}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = \frac{\partial \widehat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\widetilde{a}) = c_{ijrs}. \quad (9.3.12)$$

Dunque abbiamo ottenuto la (9.3.9) come ci proponevamo di ottenere e la proposizione risulta dimostrata.

**Proposizione 9.4.** *Se, dato un solido elastico, lo sforzo residuo è nullo e la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff  $\widetilde{S}$  soddisfa all'assioma dell'obiettività, allora il tensore elastico  $\widetilde{c}$  è simmetrico rispetto alla seconda coppia di indici, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{ijsr}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

#### Dimostrazione

Per ipotesi si ha

$$\widetilde{S}(\widetilde{a}) = \widetilde{0}, \quad \widetilde{S} = \widetilde{F} \widetilde{S}^*(\widetilde{d}),$$

con

$$\widetilde{d} = \frac{1}{2} (\widetilde{F}^T \widetilde{F} - \widetilde{a}).$$

Osserviamo che

$$\widetilde{F} = \widetilde{a} \quad \implies \quad \widetilde{d} = \widetilde{0}.$$

Allora tenendo presenti entrambe le ipotesi della proposizione abbiamo:

$$\widetilde{0} = \widetilde{S}(\widetilde{a}) = \widetilde{a} \widetilde{S}^*(\widetilde{0}) = \widetilde{S}^*(\widetilde{0})$$

ossia

$$\widetilde{S}^*(\widetilde{0}) = \widetilde{0}.$$

La proposizione risulterà dimostrata se riusciremo a provare la seguente relazione:

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{d}} \tilde{S}^*(\tilde{0}). \quad (9.3.13)$$

Infatti se vale la (9.3.13), in componenti si ha:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{sr}}(\tilde{0}) = c_{ijsr}$$

grazie alla simmetria di  $\tilde{d}$ .

Vediamo di dimostrare la (9.3.13).

Per definizione

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{\hat{S}}(\tilde{a}) \implies c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

D'altra parte

$$\hat{S}_{ij}(\tilde{F}) = F_{ik} S_{kj}^*(\tilde{d}).$$

Se deriviamo rispetto a  $F_{rs}$  in corrispondenza di un generico valore di  $\tilde{F}$ , otteniamo:

$$\frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}) = \frac{\partial F_{ik}}{\partial F_{rs}} S_{kj}^*(\tilde{d}) + F_{ik} \frac{\partial S_{kj}^*}{\partial d_{lm}}(\tilde{d}) \frac{\partial d_{lm}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}). \quad (9.3.14)$$

Ma

$$d_{lm}(\tilde{F}) = \frac{1}{2}(F_{nl} F_{nm} - \delta_{lm})$$

per cui

$$\frac{\partial d_{lm}}{\partial F_{rs}}(\tilde{F}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial F_{rs}}(F_{rl} F_{rm}) = \frac{1}{2}(\delta_{ls} F_{rm} + F_{rl} \delta_{ms}) \quad (9.3.15)$$

Poniamo ora  $\tilde{F} = \tilde{a}$  nella (9.3.14) e sostituiamo in essa l'espressione ottenuta in (9.3.15) nella quale pure poniamo  $\tilde{F} = \tilde{a}$ . Tenendo presente che  $S_{kj}^*(\tilde{0}) = 0$ , deduciamo:

$$\begin{aligned} c_{ijrs} &= \delta_{ik} \frac{\partial S_{kj}^*}{\partial d_{lm}}(\tilde{0}) \frac{1}{2}(\delta_{ls} \delta_{rm} + \delta_{rl} \delta_{ms}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{sr}}(\tilde{0}) + \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) \right) = \\ &= \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0}) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la simmetria di  $\tilde{d}$ .

In conclusione abbiamo ottenuto:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial S_{ij}^*}{\partial d_{rs}}(\tilde{0})$$

che è appunto il risultato che ci proponevamo di ottenere.  
Dimostriamo infine la seguente

**Proposizione 9.5.** *Se il solido elastico è iperelastico, nel tensore elastico è possibile scambiare la prima coppia di indici con la seconda, ossia*

$$c_{ijrs}(P_0) = c_{rsij}(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Dimostrazione

Se il solido elastico è iperelastico, esiste una funzione a valori reali  $\omega(\tilde{F})$  tale che:

$$\tilde{S}(\tilde{F}) = \rho_0 \partial_{\tilde{F}} \omega(\tilde{F}).$$

Poiché supponiamo  $\tilde{S} \in \mathcal{C}^1$ , la funzione  $\omega$  è di classe  $\mathcal{C}^2$ .  
D'altra parte, per definizione di tensore elastico, si ha:

$$c_{ijrs} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{rs}}(\tilde{a}).$$

Ma per definizione di solido iperelastico:

$$\hat{S}_{ij}(\tilde{F}) = \rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}}(\tilde{F})$$

da cui

$$\begin{aligned} c_{ijrs} &= \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left( \rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}} \right) (\tilde{a}) = \\ &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial F_{rs}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial F_{ij}} \right) (\tilde{a}) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial F_{rs}} \right) (\tilde{a}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \left( \rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial F_{rs}} \right) (\tilde{a}) = \frac{\partial \hat{S}_{rs}}{\partial F_{ij}}(\tilde{a}) = c_{rsij}. \end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

**Definizione 9.8.** *Sia  $\tilde{c}$  il tensore elastico di un solido elastico. Si definiscono simmetrie minori le seguenti proprietà di simmetria di  $\tilde{c}$ :*

$$c_{ijrs} = c_{jirs}, \quad c_{ijrs} = c_{ijsr}$$

e si definisce simmetria maggiore la seguente:

$$c_{ijrs} = c_{rsij}. \tag{9.3.16}$$

Per quanto stabilito in precedenza, possiamo asserire che se per un solido elastico lo sforzo residuo è nullo e la funzione  $\tilde{S}$  soddisfa all'assioma dell'obiettività, allora il tensore elastico gode delle simmetrie minori. Se poi il solido è iperelastico il tensore elastico gode anche della simmetria maggiore.

Osserviamo che il tensore elastico, essendo un tensore del IV ordine, ha in generale 81 componenti indipendenti, ma il loro numero si riduce notevolmente se gode delle simmetrie minori e della simmetria maggiore.

Infatti, se  $\tilde{c}$  gode delle simmetrie minori, dati due valori arbitrari fissati ai primi due indici e fatti variare gli altri due, si ottengono 6 componenti indipendenti ed analogo risultato si ottiene se fissiamo gli ultimi due indici e facciamo variare i primi due. Perciò nell'ipotesi che sussistano le simmetrie minori il tensore elastico ha in generale 36 componenti indipendenti.

Se  $\tilde{c}$  gode anche della simmetria maggiore, le componenti indipendenti si riducono a 21. Infatti, considerate le 36 componenti indipendenti del tensore, 6 di queste soddisfano automaticamente le (9.3.16) e precisamente quelle nelle quali la prima e la seconda coppia di indici sono uguali. Le restanti 30 sono uguali due a due.

# Capitolo 10

## Solidi elastici lineari

### 10.1 Definizione di solido elastico lineare.

Prima di dare la definizione di solido elastico lineare facciamo alcune osservazioni e premesse.

**Definizione 10.1.** *Sia data una famiglia di tensori di ordine  $r$  dipendente dal parametro reale  $\epsilon \in (0, \epsilon_0) : \{\tilde{t}_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ .*

*Diciamo che*

$$\tilde{t}_\epsilon = o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{se} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{t}_\epsilon}{\epsilon} = \tilde{0}$$

*o equivalentemente se*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\tilde{t}_\epsilon|}{\epsilon} = 0.$$

**Definizione 10.2.** *Sia data una funzione tensoriale  $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{A})$  di ordine  $r$  di una variabile tensoriale  $\tilde{A}$  di ordine  $s$  definita su un sottoinsieme dei tensori di ordine  $s$  per il quale  $\tilde{0}$  sia punto di accumulazione.*

*Diciamo che*

$$\tilde{t}(\tilde{A}) = o(\tilde{A}) \quad \text{per } \tilde{A} \rightarrow \tilde{0} \quad \text{se} \quad \lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{0}} \frac{\tilde{t}(\tilde{A})}{|\tilde{A}|} = \tilde{0}$$

*o equivalentemente se*

$$\lim_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{0}} \frac{|\tilde{t}(\tilde{A})|}{|\tilde{A}|} = 0.$$

Ricordiamo che nel Capitolo 5, studiando le deformazioni di un corpo continuo, abbiamo dato la definizione di tensore di deformazione finita:  $\tilde{d}$ , che in

termini di spostamento ha la seguente espressione:

$$\tilde{d} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}).$$

Introduciamo un nuovo tensore di deformazione, il tensore di deformazione infinitesima.

**Definizione 10.3.** *Definiamo tensore di deformazione infinitesima il seguente tensore del II ordine:*

$$\tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}).$$

Il tensore  $\tilde{e}$  è dunque la parte simmetrica di  $\text{grad}_0 \vec{u}$ .  
Come è immediato verificare:

$$\tilde{d} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \text{grad}_0^T \vec{u} \text{grad}_0 \vec{u}.$$

Dimostriamo la seguente proposizione

**Proposizione 10.1.** *Sia data una famiglia di deformazioni regolari dipendente dal parametro reale  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  :  $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$  tale che lo spostamento  $\vec{u}^{(\epsilon)}$  corrispondente alla deformazione  $x_\epsilon$  soddisfi alla condizione:*

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon \quad \text{con} \quad \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Allora, indicati con  $\tilde{d}^{(\epsilon)}$  e  $\tilde{e}^{(\epsilon)}$  il tensore di deformazione finita e il tensore di deformazione infinitesima relativi a  $x_\epsilon$ , si ha:

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{e}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Inoltre se  $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$  è costituita da deformazioni rigide, allora

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

#### Dimostrazione

Osserviamo dapprima che, qualunque sia la famiglia di deformazioni  $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ , si ha:

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{e}^{(\epsilon)} + \frac{1}{2} \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}.$$

Per provare la prima parte della proposizione è sufficiente dimostrare che se la famiglia di deformazioni soddisfa all'ipotesi su  $\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}$  si ha:

$$\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = o(\epsilon) \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

ossia che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}}{\epsilon} = \tilde{0}. \quad (10.1.1)$$

Operiamo per componenti e teniamo presente che:

$$[\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}]_{ij} = u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}.$$

Per ottenere la (10.1.1) è sufficiente far vedere che per  $i, j = 1, 2, 3$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}|}{\epsilon} = 0. \quad (10.1.2)$$

D'altra parte, se esplicitiamo la somma su  $k$  si ha

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}| = \left| \sum_{k=1}^3 u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)} \right| \leq \sum_{k=1}^3 |u_{k,i}^{(\epsilon)}| |u_{k,j}^{(\epsilon)}| \quad (10.1.3)$$

Ma

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \sqrt{\sum_{l,m=1}^3 u_{l,m}^{(\epsilon)} u_{l,m}^{(\epsilon)}}$$

da cui

$$|u_{l,m}^{(\epsilon)}| \leq |\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon.$$

Perciò

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)}| \leq \epsilon \quad \text{e} \quad |u_{k,j}^{(\epsilon)}| \leq \epsilon.$$

Sostituendo nella (10.1.3), si deduce

$$|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}| \leq 3\epsilon^2$$

e dunque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|u_{k,i}^{(\epsilon)} u_{k,j}^{(\epsilon)}|}{\epsilon} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3\epsilon^2}{\epsilon} = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Supponiamo ora che le deformazioni  $x_\epsilon$  siano rigide per cui

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0. \quad (10.1.4)$$

Ma

$$\tilde{d}^{(\epsilon)} = \frac{1}{2} [\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} + \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}]$$

da cui per la (10.1.4) deduciamo:

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} - \text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}.$$

Ma, come prima abbiamo dimostrato:

$$\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} \text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+$$

e perciò

$$\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)} = -\text{grad}_0^T \vec{u}^{(\epsilon)} + o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

La dimostrazione della proposizione è così completata.

La proposizione asserisce che, data la famiglia di deformazioni  $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$  tale che

$$|\text{grad}_0 \vec{u}^{(\epsilon)}| = \epsilon \quad \text{con } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

a meno di un errore dell'ordine di  $o(\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , i tensori di deformazione finita e di deformazione infinitesima coincidono.

In effetti si potrebbe far vedere che tutte le caratteristiche geometriche delle deformazioni  $x_\epsilon$  sono descritte dal tensore di deformazione infinitesima a meno di un errore dell'ordine di  $o(\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

La proposizione 10.1 inoltre afferma che, a meno di un errore dell'ordine di  $o(\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , il gradiente dello spostamento corrispondente ad una deformazione  $x_\epsilon$  rigida è emisimmetrico.

Le argomentazioni precedenti giustificano la seguente definizione

**Definizione 10.4.** *Definiamo spostamento rigido infinitesimo per un corpo continuo, che subisca una deformazione regolare, un campo vettoriale definito in  $S_0$ , regione occupata dal corpo prima della deformazione, che ammette la seguente rappresentazione:*

$$\vec{u}(P_0) = \vec{u}(\bar{P}_0) + \widetilde{W} \cdot (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0 \quad (10.1.5)$$

dove  $\widetilde{W}$  è un tensore emisimmetrico indipendente da  $P_0$  e  $\bar{P}_0$ .

Dalla (10.1.5) si vede facilmente che  $\text{grad}_0 \vec{u}$  è costante, come avviene in corrispondenza di una generica deformazione rigida ( $\text{grad}_0 \vec{u} = \widetilde{F} - \widetilde{a}$  con  $\widetilde{F}$  tensore ortogonale costante) ed emisimmetrico, come avviene a meno di un termine dell'ordine di  $o(\epsilon)$  per la famiglia di deformazioni rigide  $\{x_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)}$ .

Infatti, fissato  $\bar{P}_0$  in  $S_0$ , indichiamo con  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ ,  $(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03})$  le terne delle coordinate cartesiane di  $P_0, \bar{P}_0$ . Le componenti della rappresentazione analitica del campo dello spostamento soddisfacente alla (10.1.5) sono date da

$$u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = u_i(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03}) + W_{ih}(x_{0h} - \bar{x}_{0h}).$$



Allora

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} = W_{ij}.$$

da cui

$$\text{grad}_0 \vec{u} = \widetilde{W}$$

con  $\widetilde{W}$  indipendente da  $P_0$  ed emisimmetrico.

La (10.1.5) si può scrivere anche in altra forma tenendo presente che, come si può dimostrare, per ogni tensore doppio emisimmetrico  $\widetilde{W}$  esiste un vettore  $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{E}}$  tale che:

$$\widetilde{W} \cdot \vec{a} = \vec{\varphi} \times \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Applicando tale risultato, la (10.1.5) può essere scritta come.

$$\vec{u}(P_0) = \vec{u}(\overline{P}_0) + \vec{\varphi} \times (P_0 - \overline{P}_0) \quad \forall P_0, \overline{P}_0 \in S_0 \quad (10.1.6)$$

dove il vettore  $\vec{\varphi}$  è indipendente da  $P_0$  e  $\overline{P}_0$ .

E' interessante confrontare la (10.1.6) con l'espressione che assume il campo spaziale della velocità in corrispondenza di un atto di moto rigido ad un dato istante  $t$

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\overline{P}, t) + \vec{\omega}(t) \times (P - \overline{P}) \quad \forall P, \overline{P} \in S(t). \quad (10.1.7)$$

C'è un'evidente analogia formale tra la (10.1.6) e la (10.1.7). Al campo dello spostamento definito in  $S_0$  corrisponde il campo della velocità all'istante  $t$  definito in  $S(t)$  ed al vettore  $\vec{\varphi}$ , indipendente da  $P_0$ , e  $\overline{P}_0$ , corrisponde il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}(t)$  indipendente da  $P$  e  $\overline{P}$ .

Osserviamo poi che sussiste un'evidente analogia formale anche tra il tensore di deformazione infinitesima:

$$\tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}),$$

che è la parte simmetrica del gradiente dello spostamento, e il tensore di velocità di deformazione:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}),$$

che è la parte simmetrica del gradiente della velocità spaziale.

Poiché, come è noto, in corrispondenza di un atto di moto rigido della forma (10.1.7)  $\tilde{D} = \tilde{0}$  in  $S(t)$ , per le analogie formali riscontrate possiamo asserire che se  $\vec{u}$  è uno spostamento rigido infinitesimo della forma (10.1.6), allora

$$\tilde{e} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0.$$

In effetti, si potrebbe provare che nell'ipotesi che la regione  $S_0$  occupata dal continuo prima della deformazione sia la chiusura di un dominio, ossia di un aperto connesso, se il tensore di deformazione infinitesima è nullo in  $S_0$ , allora lo spostamento è uno spostamento rigido infinitesimo.

Ci proponiamo ora di dedurre una formula di rappresentazione asintotica per la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff di un solido elastico.

**Proposizione 10.2.** *Sia dato un solido elastico la cui funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff  $\tilde{S}$  goda delle due proprietà seguenti:*

(1) *lo sforzo residuo è nullo, cioè*

$$\tilde{S}(\tilde{a}) = \tilde{0};$$

(2)  *$\tilde{S}$  soddisfa all'assioma dell'obiettività, ossia*

$$\tilde{S}(\tilde{F}) = \tilde{F} \tilde{S}^*(\tilde{d}).$$

Allora  $\tilde{S}$  ammette la seguente formula di rappresentazione asintotica  $\tilde{S}$ :

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \tilde{c} \cdot \tilde{e} + o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per} \quad \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}. \quad (10.1.8)$$

#### Dimostrazione

Consideriamo la funzione risposta del tensore di Piola - Kirchhoff per un dato solido elastico:  $\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{F})$  e ricordiamo che si assume  $\tilde{S}$  di classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dunque  $\tilde{S}$  è differenziabile in corrispondenza di ogni valore di  $\tilde{F}$ . In particolare è differenziabile per  $\tilde{F} = \tilde{a}$  e per definizione di tensore elastico si ha

$$\tilde{c} = \partial_{\tilde{F}} \tilde{S}(\tilde{a}).$$

Se indichiamo con  $L_{\tilde{a}}$  il differenziale di  $\tilde{S}$  in  $\tilde{a}$ , avremo che, preso un qualsiasi tensore  $\tilde{t}$  del II ordine, abbiamo:

$$L_{\tilde{a}}(\tilde{t}) = \tilde{c} \cdot \tilde{t}.$$

Per definizione di differenziabilità possiamo scrivere

$$\lim_{\tilde{F} \rightarrow \tilde{a}} \frac{\tilde{S}(\tilde{F}) - \tilde{S}(\tilde{a}) - L_{\tilde{a}}(\tilde{F} - \tilde{a})}{|\tilde{F} - \tilde{a}|} = \tilde{0}.$$

Ma, se teniamo presente la (1) della proposizione e l'osservazione su  $L_{\tilde{a}}$  e il tensore elastico, la relazione precedente si riduce a

$$\lim_{\tilde{F} \rightarrow \tilde{a}} \frac{\tilde{S}(\tilde{F}) - \tilde{c} \cdot (\tilde{F} - \tilde{a})}{|\tilde{F} - \tilde{a}|} = \tilde{0}. \quad (10.1.9)$$

D'altra parte

$$\tilde{F} = \text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a} \implies \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{F} - \tilde{a}$$

per cui

$$\tilde{F} \rightarrow \tilde{a} \iff \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}.$$

Il limite (10.1.9) si può allora scrivere nella forma:

$$\lim_{\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}} \frac{\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) - \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}}{|\text{grad}_0 \vec{u}|} = \tilde{0}. \quad (10.1.10)$$

da cui discende

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) - \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per } \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}$$

ossia

$$\tilde{S}(\text{grad}_0 \vec{u} + \tilde{a}) = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} + o(\text{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{per } \text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \tilde{0}. \quad (10.1.11)$$

Se decomponiamo  $\text{grad}_0 \vec{u}$  nella somma della sua parte simmetrica che coincide con  $\tilde{e}$  e della sua parte emisimmetrica  $\tilde{E}$ , possiamo scrivere:

$$\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot (\tilde{e} + \tilde{E})$$

che in componenti fornisce:

$$[\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}]_{ij} = c_{ijrs}(e_{rs} + E_{rs}).$$

Ma per le ipotesi (1), (2) della proposizione, il tensore elastico è simmetrico rispetto alla seconda coppia di indici per cui la relazione scritta sopra si riduce a:

$$[\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}]_{ij} = c_{ijrs} e_{rs},$$

poiché la contrazione di due indici di simmetria con due di emisimmetria dà come risultato 0.

Dunque

$$\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot \tilde{e},$$

risultato che, sostituito nella (10.1.11), fornisce la rappresentazione asintotica (10.1.8).

Possiamo fare due osservazioni sulla (10.1.8).

**Osservazione 10.1.** Se sono soddisfatte le due ipotesi della proposizione 10.2, la funzione risposta del tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff risulta una funzione lineare del tensore di deformazione infinitesima  $\tilde{\epsilon}$  a meno di un termine che è  $o(\text{grad}_0 \vec{u})$  per  $\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \vec{0}$ .

**Osservazione 10.2.** Per l'ipotesi (1) della proposizione 10.2 il tensore elastico  $\tilde{c}$  è simmetrico rispetto alla prima coppia di indici per cui

$$[\tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}]_{ij} = c_{ijrs} e_{rs} = c_{jirs} e_{rs} = [\tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}]_{ji}.$$

Si ottiene dunque che, sempre nelle ipotesi (1), (2), la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff risulta simmetrica a meno di un termine che è  $o(\text{grad}_0 \vec{u})$  per  $\text{grad}_0 \vec{u} \rightarrow \vec{0}$ .

Diamo ora la definizione di solido elastico lineare.

**Definizione 10.5.** *Definiamo solido elastico lineare un solido elastico che soddisfa alle tre seguenti condizioni:*

- (i) *la funzione risposta per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff  $\tilde{S}$  soddisfa all'assioma dell'obiettività;*
- (ii) *esiste una configurazione, detta configurazione naturale, che assunta come configurazione di riferimento dà luogo a sforzo residuo nullo;*
- (iii) *assunta come configurazione di riferimento quella naturale, qualunque sia il moto del solido, le componenti del gradiente dello spostamento sono così "piccole" da poter sostituire alla funzione risposta effettiva per il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff la rappresentazione asintotica (10.1.8):*

$$\tilde{S} = \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon}. \quad (10.1.12)$$

Si noti che per un solido elastico lineare il tensore di Piola - Kirchhoff è simmetrico.

Questo modello di continuo schematizza i solidi reali che subiscono piccole deformazioni quando sono soggetti a sforzi meccanici anche rilevanti.

Ovviamente, poiché i solidi elastici lineari sono una sottoclasse dei solidi elastici, anche per essi il problema del moto si imposta in un ambito puramente meccanico.

Scriviamo le equazioni che ne governano il moto, avendo preso come configurazione di riferimento la configurazione naturale:

$$\begin{aligned} \rho J &= \rho_0 \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} && \text{in } S_0 \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} && \text{con } \tilde{S} = \tilde{S}^T. \end{aligned}$$

Come per un qualsiasi solido elastico, nel sistema scritto sopra si isola dalle incognite la densità di massa così come dalle equazioni l'equazione di continuità della massa. Una volta risolto il problema relativo alle restanti equazioni, si determina  $\rho$  dall'equazione di continuità.

Dunque il moto è descritto dalle due ultime equazioni che equivalgono a 9 equazioni scalari (la terza, di carattere tensoriale fornisce 6 equazioni scalari indipendenti per la simmetria di  $\tilde{S}$ ) in 9 incognite scalari, cioè le tre componenti del campo dello spostamento e le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff.

Vediamo quale forma assume la prima equazione indefinita della meccanica per un solido elastico lineare se utilizziamo la relazione sforzo-deformazione.

Poiché per le proprietà di simmetria del tensore elastico si ha:

$$\tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u},$$

deduciamo

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \implies \rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 (\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}). \quad (10.1.13)$$

In componenti la (10.1.13) fornisce

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 F_i + (c_{ijrs} u_{r,s})_{,j}. \quad (10.1.14)$$

Supponiamo ora che per il solido elastico lineare considerato si abbia:

$$\rho_0 = \text{costante} > 0 \quad \text{in } S_0$$

e che il tensore elastico non dipenda da  $P_0$  per cui

$$\tilde{c} = \widetilde{\text{cost}} \quad \text{in } S_0.$$

Diremo che il solido elastico è omogeneo. Allora le (10.1.14) si riducono a:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 F_i + c_{ijrs} u_{r,sj}. \quad (10.1.15)$$

## 10.2 Sottoclassi di solidi elastici lineari.

Introduciamo una prima sottoclasse dei solidi elastici lineari, quella dei solidi elastici lineari isotropi.

**Definizione 10.6.** *Un solido elastico lineare si dice isotropo se il suo tensore elastico è isotropo.*

Un solido elastico lineare isotropo schematizza un solido reale le cui proprietà meccaniche sono indipendenti dalla direzione.

Poichè il tensore elastico per un solido elastico lineare gode delle simmetrie minori, se è isotropo ha la stessa forma che ha il tensore di viscosità per un fluido viscoso classico (vedi Capitolo 2, §2) e dunque le sue componenti si esprimono mediante due soli scalari:

$$c_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu(\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})$$

dove  $\lambda = \lambda(P_0)$  e  $\mu = \mu(P_0)$  sono detti **moduli di Lamé**.

Se il solido elastico lineare considerato, oltre ad essere isotropo, è anche omogeneo i due coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti e prendono il nome di **costanti di Lamé**.

Ci proponiamo ora di stabilire quale forma assume la relazione sforzo - deformazione per un solido elastico lineare ed isotropo. Possiamo a tal riguardo utilizzare i calcoli che abbiamo svolto nel Capitolo 2 per i fluidi viscosi classici; infatti la funzione risposta per il tensore di Piola - Kirchhoff si esprime tramite il tensore di deformazione infinitesima  $\tilde{e}$  come si esprime la parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy  $\tilde{T}$  per un fluido viscoso classico tramite il tensore di velocità di deformazione  $\tilde{D}$ .

Si ha perciò:

$$\tilde{S} = \lambda (\text{tr } \tilde{e}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{e}.$$

Tenendo poi presente l'analogia formale, già osservata in precedenza, tra  $\tilde{e}$  e  $\tilde{D}$ , deduciamo che per un solido elastico lineare ed isotropo la (10.1.13) assume la forma:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{grad}_0 (\lambda \text{div}_0 \vec{u}) + 2\text{div}_0 (\mu \tilde{e}). \quad (10.2.1)$$

Se il solido elastico lineare ed isotropo è anche omogeneo, la (10.2.1) diviene:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad}_0 \text{div}_0 \vec{u} + \mu \Delta_0 \vec{u}. \quad (10.2.2)$$

La (10.2.2) è nota come **equazione di Navier**.

Se un solido elastico lineare è isotropo, come si può verificare facilmente, il tensore elastico gode della simmetria maggiore.

Consideriamo ora la sottoclasse dei solidi elastici lineari tali che  $\tilde{c}$  goda della simmetria maggiore. I solidi elastici lineari ed isotropi sono ovviamente contenuti in tale sottoclasse.

Per tali solidi introduciamo la forma quadratica:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \forall \tilde{e} = \text{tensore doppio simmetrico.}$$

Esplicitando le componenti di  $\tilde{e}$  e  $\tilde{c}$ , la forma quadratica si esprime nel modo seguente:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}.$$

D'altra parte, se  $\tilde{e}$  è il tensore di deformazione infinitesima del solido elastico considerato, essendo questo lineare, si ha

$$\tilde{\hat{S}} = \tilde{c} \cdot \tilde{e},$$

ossia in componenti

$$\hat{S}_{ij} = c_{ijrs} e_{rs},$$

per cui in tal caso

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \hat{S}_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\hat{S}} \cdot \tilde{e}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 10.3.** *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, si ha*

$$\tilde{\hat{S}}(\tilde{e}) = \partial_{\tilde{e}} \omega(\tilde{e}) \quad \text{ossia} \quad \hat{S}_{hk}(\tilde{e}) = \frac{\partial \omega}{\partial e_{hk}}(\tilde{e}).$$

Dimostrazione

Consideriamo le componenti di  $\partial_{\tilde{e}} \omega(\tilde{e})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial e_{hk}}(\tilde{e}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e_{hk}} (c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{ijhk} e_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{hkij} e_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (c_{hkrs} e_{rs} + c_{hkrs} e_{rs}) \\ &= c_{hkrs} e_{rs} = \hat{S}_{hk}(\tilde{e}). \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

Nella dimostrazione abbiamo sfruttato la simmetria maggiore del tensore elastico.

Osserviamo che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, il solido elastico lineare si può riguardare come iperelastico poiché la funzione risposta del tensore di Piola - Kirchhoff, dipendente da  $\tilde{e}$ , è data dalla derivata rispetto ad  $\tilde{e}$  della forma quadratica  $\omega(\tilde{e})$ .

**Definizione 10.7.** *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, definiamo densità di volume dell'energia di deformazione elastica relativa al punto  $P_0 \in S_0$  ed all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  la forma quadratica  $\omega(\tilde{e}(P_0, t))$  dove  $\tilde{e}(P_0, t)$  è il tensore di deformazione infinitesima in  $(P_0, t)$ .*

*Fissato  $t \in [t_0, t_1]$ , definiamo energia di deformazione elastica del solido all'istante  $t$  la seguente grandezza scalare:*

$$\Omega(t) = \int_{S_0} \omega(\tilde{e}(P_0, t)) dS_0.$$

Dimostriamo il seguente

**Teorema 10.1.** *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = -\Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dimostrazione

Poiché il moto è regolare, possiamo derivare rispetto al tempo sotto il segno di integrale ottenendo  $\forall t \in [t_0, t_1]$ :

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{S_0} \omega(\tilde{e}(P_0, t)) dS_0 = \int_{S_0} \dot{\omega}(\tilde{e}(P_0, t)) dS_0 \quad (10.2.4)$$

D'altra parte per la proposizione 10.3:

$$\dot{\omega}(\tilde{e}) = \frac{\partial \omega}{\partial e_{ij}}(\tilde{e}) \dot{e}_{ij} = S_{ij} \dot{e}_{ij} = \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{e}}. \quad (10.2.5)$$

Ma, essendo  $\vec{u}$  di classe  $\mathcal{C}^2$ ,

$$\dot{\tilde{e}} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}) \cdot = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \dot{\vec{u}} + \text{grad}_0^T \dot{\vec{u}}),$$

ossia  $\dot{\tilde{e}}$  è la parte simmetrica di  $\text{grad}_0 \dot{\vec{u}}$ .

Allora, per la simmetria di  $\tilde{S}$ , sostituendo l'ultimo risultato nella (10.2.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(\tilde{e}) &= \tilde{S} \cdot \text{grad}_0 \dot{\vec{u}} = \tilde{S} \cdot (\text{grad}_0 \dot{\vec{u}}) \cdot \\ &= \tilde{S} \cdot (\tilde{F} - \tilde{a}) \cdot = \tilde{S} \cdot \tilde{F}. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$



Se sostituiamo la (10.2.6) sotto integrale nella (10.2.4), deduciamo:

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t) \cdot \tilde{\dot{F}}(P_0, t) dS_0 = -\Pi_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Il teorema risulta così dimostrato.

Tale teorema ha due corollari che ora proveremo.

**Corollario 10.1.** *Sia dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ . Considerato l'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$ , il lavoro delle forze interne in tale intervallo dipende soltanto dai valori assunti dal tensore di deformazione infinitesima negli istanti  $t'$  e  $t''$  ed è indipendente dal modo in cui il solido passa dalla configurazione all'istante  $t'$  alla configurazione all'istante  $t''$ .*

Dimostrazione

Considerato l'intervallo di tempo  $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$  dove  $[t_0, t_1]$  è l'intervallo di moto per il solido elastico, si ha

$$\begin{aligned} L_{i, [t', t'']} &= \int_{t'}^{t''} \Pi(t) dt = - \int_{t'}^{t''} \frac{d\Omega}{dt}(t) dt \\ &= \Omega(t') - \Omega(t'') = \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t')) dS_0 - \int_{S_0} \omega(\tilde{\epsilon}(P_0, t'')) dS_0, \end{aligned}$$

da cui discende immediatamente la tesi.

**Corollario 10.2.** *Dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , ad ogni istante  $t \in [t_0, t_1]$  si ha:*

$$\frac{d(T + \Omega)}{dt}(t) = \Pi_e(t),$$

dove  $\Pi_e$  è la potenza delle forze esterne.

Dimostrazione

Per il teorema dell'energia cinetica,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  abbiamo

$$\frac{dT}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t) = \Pi_e(t) - \frac{d\Omega}{dt}(t), \quad (10.2.7)$$

dove abbiamo sfruttato il teorema 10.1.

Se nella (10.2.7) portiamo al primo membro la derivata rispetto al tempo dell'energia di deformazione elastica, otteniamo:

$$\frac{d(T + \Omega)}{dt}(t) = \Pi_e(t),$$

ossia la tesi.

Da tale corollario discende immediatamente il seguente **teorema di conservazione dell'energia**:

**Teorema 10.2.** *Dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , se le forze esterne hanno potenza nulla ad ogni istante durante il moto, allora si conserva la somma dell'energia cinetica e dell'energia di deformazione elastica.*

Vediamo ora di introdurre delle condizioni di segno sul tensore elastico di un solido elastico lineare, quando gode della simmetria maggiore.

In tale ipotesi abbiamo definito per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{e}$  la forma quadratica:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs}.$$

Com'è noto, la forma quadratica  $\omega(\tilde{e})$  è detta definita positiva se

$$\omega(\tilde{e}) > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \tilde{0}.$$

Osserviamo che  $\tilde{c} = \tilde{c}(P_0)$  per cui la forma quadratica ha una diversa espressione a seconda del punto  $P_0 \in S_0$ .

Diamo ora la seguente definizione.

**Definizione 10.8.** *Se il tensore elastico  $\tilde{c}$  di un solido elastico lineare gode della simmetria maggiore, diremo che è definito positivo nel punto  $P_0 \in S_0$  se*

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c}(P_0) \cdot \tilde{e} > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \tilde{0}.$$

*Diremo poi che  $\tilde{c}$  è definito positivo in  $S_0$  o (più semplicemente) definito positivo se è definito positivo in ogni punto di  $S_0$ .*

Ovviamente  $\tilde{c}$  è definito positivo se e solo se la corrispondente forma quadratica  $\omega(\tilde{e})$  è definita positiva.

Stabiliamo il seguente teorema

**Teorema 10.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché il tensore elastico di un solido elastico lineare ed isotropo sia definito positivo è che i due moduli di Lamé soddisfino alle seguenti condizioni di segno:*

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{in } S_0$$

Dimostrazione

Se il solido elastico lineare è isotropo, il suo tensore elastico è isotropo e il tensore degli sforzi di Piola - Kirchhoff ha la forma seguente:

$$\tilde{S} = \lambda (\text{tr}\tilde{e}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{e}.$$

Se teniamo presente che

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} c_{ijrs} e_{ij} e_{rs} = \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{S} \cdot \tilde{e},$$

nel nostro caso avremo:

$$\omega(\tilde{e}) = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr}\tilde{e}) \tilde{a} \cdot \tilde{e} + 2\mu \tilde{e} \cdot \tilde{e}] = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr}\tilde{e})^2 + 2\mu \tilde{e} \cdot \tilde{e}] \quad (10.2.8)$$

poiché

$$\tilde{a} \cdot \tilde{e} = \text{tr}\tilde{e}.$$

La forma quadratica  $\omega(\tilde{e})$  ha formalmente la stessa espressione in funzione di  $\tilde{e}$  che ha la forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$  in funzione di  $\tilde{D}$  che interviene nella potenza delle forze interne per un fluido viscoso classico. Come abbiamo visto nel §2 del Capitolo 2, la forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$  è semidefinita positiva se e solo se i coefficienti di viscosità  $\lambda$  e  $\mu$  soddisfano alle due condizioni di segno:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Procedendo in maniera analoga a quanto abbiamo fatto per ottenere tale risultato per  $\omega(\tilde{D})$ , si arriva ad affermare che la forma quadratica  $\omega(\tilde{e})$  è definita positiva se e solo se i moduli di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  soddisfano alle due condizioni di segno:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Il teorema è quindi dimostrato poiché il tensore elastico è definito positivo se e solo se  $\omega(\tilde{e})$  è definita positiva.

Osservazioni sperimentali mostrano che per i solidi reali che possiamo schematizzare con il modello di solido elastico lineare il tensore elastico è definito positivo.

Tuttavia, come vedremo, nello studio della propagazione ondosa nei solidi elastici lineari, si ottengono dal punto di vista matematico ottimi risultati imponendo al tensore elastico una condizione di segno meno restrittiva, cioè richiedendo che  $\tilde{c}$  sia fortemente ellittico. Introduciamo tale definizione.

**Definizione 10.9.** Dato un solido elastico lineare, diciamo che il suo tensore elastico è fortemente ellittico nel punto  $P_0 \in S_0$  se

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c}(P_0) \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (10.2.9)$$

Si dice poi che  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico in  $S_0$  o (più semplicemente) fortemente ellittico se è fortemente ellittico in tutti i punti di  $S_0$ .

Ci proponiamo di dimostrare il seguente

**Teorema 10.4.** Dato un solido elastico lineare ed isotropo, condizione necessaria e sufficiente affinché il suo tensore elastico  $\tilde{c}$  sia fortemente ellittico è che i moduli di Lamé soddisfino alle seguenti disuguaglianze:

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{in } S_0.$$

#### Dimostrazione

Prima di distinguere tra condizione sufficiente e condizione necessaria, vediamo quale particolare espressione assume

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b})$$

dove  $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}}$ , se si tiene presente l'isotropia di  $\tilde{c}$ .

Siano  $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{\mathcal{E}}$  e consideriamo:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) &= c_{ijrs} a_i b_j a_r b_s \\ &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu(\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})] a_i b_j a_r b_s \\ &= \lambda(a_i b_i)(a_r b_r) + \mu(a_i a_i b_j b_j + a_i b_i b_r a_r) \\ &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu \left[ |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \right] \\ &= (\lambda + \mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu \left( |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \right) \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu \left[ |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \right]. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

dove  $\varphi$  è l'angolo tra i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

Sostituendo nella precedente relazione otteniamo

$$\begin{aligned} (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu \left[ |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi \right] \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi \\ &= (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu (\vec{a} \times \vec{b})^2, \end{aligned}$$

che è l'espressione che ci proponevamo di ottenere.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente.

Ipotesi:  $\lambda + 2\mu > 0$ ,  $\mu > 0$ .

Tesi:  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico.

Grazie al risultato ottenuto sopra e all'ipotesi, abbiamo  $\forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ :

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0$$

poiché i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (non nulli) non possono essere simultaneamente ortogonali e paralleli e quindi non si possono annullare simultaneamente il loro prodotto scalare e il loro prodotto vettoriale. La condizione sufficiente è dunque provata.

Dimostriamo la condizione necessaria.

Ipotesi:  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico

Tesi:  $\lambda + 2\mu > 0$ ,  $\mu > 0$ .

Per ipotesi, si ha:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0},$$

ossia, per quanto abbiamo visto in precedenza

$$(\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (10.2.10)$$

Per l'arbitrarietà di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , possiamo dapprima prendere i due vettori ortogonali; allora da (10.2.10) deduciamo:

$$\mu(\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0 \quad \implies \mu > 0.$$

Prendiamo ora i due vettori  $\vec{a}, \vec{b}$  paralleli; allora da (10.2.10) discende:

$$(\lambda + 2\mu)(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 > 0 \quad \implies \lambda + 2\mu > 0.$$

La dimostrazione del teorema è così completata.

Proviamo la seguente

**Proposizione 10.4.** *Per il tensore elastico  $\tilde{c}$ , la condizione di forte ellitticità è più debole della condizione che  $\tilde{c}$  sia definito positivo.*

Dimostrazione

In primo luogo mostriamo che se  $\tilde{c}$  è definito positivo, allora è fortemente ellittico.

Dunque

Ipotesi:  $\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} > 0 \quad \forall \tilde{e} \neq \vec{0}$

Tesi:  $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$

Prendiamo due vettori arbitrari  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  e poniamo

$$\tilde{A} = \vec{a} \otimes \vec{b}.$$

Allora

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = \tilde{A} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}.$$

Ma  $\tilde{c}$  è simmetrico rispetto alla prima ed alla seconda coppia di indici per cui, indicata con  $\tilde{A}_S$  la parte simmetrica di  $\tilde{A}$ , abbiamo

$$\tilde{A} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A} = \tilde{A}_S \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}_S.$$

Se  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , si può provare che  $\tilde{A}$  e  $\tilde{A}_S \neq \vec{0}$ . Ma allora, essendo  $\tilde{c}$  definito positivo, si ha

$$\tilde{A}_S \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{A}_S > 0,$$

ossia  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico.

Perché la proposizione risulti provata in maniera completa, dobbiamo mostrare che esistono tensori  $\tilde{c}$  che sono fortemente ellittici ma che non sono definiti positivi. Possiamo utilizzare il teorema che abbiamo dimostrato per i solidi elastici lineari ed isotropi. Supponiamo che i moduli di Lamè  $\lambda$  e  $\mu$  siano tali che

$$\lambda = -\mu, \quad \mu > 0.$$

Allora  $\lambda + 2\mu = \mu > 0$ , mentre  $3\lambda + 2\mu = -3\mu + 2\mu = -\mu < 0$ . Dunque il tensore elastico caratterizzato da questi due moduli di Lamé è fortemente ellittico, ma non definito positivo.

### 10.3 Elastostatica lineare.

L'elastostatica lineare studia la quiete dei solidi elastici lineari.

Premettiamo una definizione che sussiste per qualsiasi corpo continuo il cui moto sia studiato dal punto di vista materiale.

**Definizione 10.10.** *Dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , se  $S_0$  è la regione che occupa nella configurazione di riferimento, definiamo trazione (superficiale) materiale all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  il seguente campo vettoriale:*

$$\vec{f}_0(P_0, t) = \tilde{S}(P_0, t) \cdot \vec{n}_0 \quad \forall P_0 \in \partial S_0,$$

dove  $\vec{n}_0$  è il versore normale in  $P_0$  a  $\partial S_0$  rivolto verso l'esterno di  $S_0$ .

Vediamo di giustificare tale definizione. Ricordiamo che, se si studia il moto di  $\mathcal{C}$  dal punto di vista spaziale, si definisce trazione (superficiale) all'istante  $t \in [t_0, t_1]$  il seguente campo vettoriale:

$$\vec{f}(P, t) = \vec{T}(P, t, \vec{n}) \quad \forall P \in \partial S(t)$$

dove  $\vec{T}(P, t, \vec{n})$  è lo sforzo specifico relativo al punto  $P$  ed all'istante  $t$ , coordinato alla direzione orientata di versore  $\vec{n}$  e  $\vec{n}$  è il versore normale in  $P$  a  $\partial S(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S(t)$ . D'altra per il teorema di Cauchy:

$$\vec{T}(P, t, \vec{n}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{n}$$

per cui il risultante delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$  è dato da:

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma = \int_{\partial S(t)} \tilde{T} \cdot \vec{n} d\Sigma.$$

Applicando il lemma 8.1 unitamente alla definizione di tensore degli sforzi di Piola- Kirchhoff, è possibile trasformare l'integrale esteso a  $\partial S(t)$  in un integrale esteso a  $\partial S_0$ :

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma = \int_{\partial S_0} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0,$$

risultato che giustifica la definizione 10.10.

Consideriamo un solido elastico lineare che sia in quiete in una data configurazione (ovviamente diversa dalla configurazione di riferimento).

Avremo dunque:

$$\vec{u} = \vec{u}(P_0), \quad \tilde{S} = \tilde{S}(P_0), \quad \vec{F} = \vec{F}(P_0) \quad \text{con } P_0 \in S_0.$$

Nel seguito del paragrafo supporremo sempre soddisfatte le seguenti ipotesi:

- i) la configurazione di riferimento è la configurazione naturale;
- ii)  $S_0$  è la chiusura di un dominio regolare;
- iii)  $\rho_0 \in \mathcal{C}(S_0)$ ,  $\vec{F} \in \mathcal{C}(S_0)$ ,  $\tilde{c} \in \mathcal{C}^1(S_0)$ ,  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$ ,  $\tilde{S} \in \mathcal{C}^1(S_0)$ .

L'elastostatica lineare è governata dalle due seguenti equazioni che devono essere soddisfatte in  $S_0$ :

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con } \tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

La prima delle (10.3.1) è la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui con  $\ddot{\vec{u}} = \vec{0}$  poiché il solido è in quiete, la seconda è la relazione sforzo-deformazione del solido elastico lineare.

**Teorema 10.5. Teorema del lavoro e dell'energia.** *Sia dato un solido elastico lineare, il cui tensore elastico  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore, in quiete in una data configurazione. Se  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione in  $S_0$  delle (10.3.1), allora si ha:*

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega \quad (10.3.2)$$

dove  $\Omega$  è l'energia di deformazione elastica.

#### Dimostrazione

In primo luogo ricordiamo che

$$\Omega = \int_{S_0} \omega(\tilde{e}(P_0)) \, dS_0.$$

Per provare la (10.3.2), moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima delle (10.3.1) per  $\vec{u}$  e integriamo su  $S_0$  ottenendo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} \, dS_0 = 0. \quad (10.3.3)$$

Ma

$$\operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} = S_{ij,j} u_i = (S_{ij} u_i)_{,j} - S_{ij} u_{i,j},$$

e

$$S_{ij} u_{i,j} = \tilde{S} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} = \tilde{S} \cdot \tilde{e} = 2\omega(\tilde{e}).$$

Sostituendo i risultati trovati nella (10.3.3), deduciamo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{S_0} (S_{ij} u_i)_{,j} \, dS_0 - 2 \int_{S_0} \omega(\tilde{e}) \, dS_0 = 0. \quad (10.3.4)$$

Se applichiamo al secondo integrale della (10.3.4) le formule integrali di Gauss-Ostrogradski otteniamo:

$$\int_{S_0} (S_{ij} u_i)_{,j} \, dS_0 = \int_{\partial S_0} u_i S_{ij} n_{0j} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{u} \cdot (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0) \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{u} \cdot \vec{f}_0 \, d\Sigma_0. \quad (10.3.5)$$

Inserendo la (10.3.5) nella (10.3.4) e tenendo presente la definizione di energia di deformazione elastica, si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega,$$



ossia la tesi.

Osserviamo che il primo membro della (10.3.2) rappresenta il lavoro delle forze esterne agenti sul solido in corrispondenza del campo dello spostamento  $\vec{u}$ .

**Teorema 10.6. Teorema di reciprocità di Betti.** *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico goda della simmetria maggiore. Se  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione delle equazioni dell'elastostatica lineare relative a tale solido in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa e  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa, allora si ha:*

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0, \quad (10.3.6)$$

dove

$$\vec{f}_0 = \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}, \quad \vec{f}_0 = \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}.$$

#### Dimostrazione

Dall'enunciato del teorema deduciamo che  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione delle (10.3.1), mentre  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione delle equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con} \quad \tilde{e} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad}_0 \vec{u} + \operatorname{grad}_0^T \vec{u} \right). \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $\vec{u}$  entrambi i membri della prima delle (10.3.1) e per  $\vec{u}$  entrambi i membri della prima delle (10.3.7), integrando poi su  $S_0$ .

Avremo così:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} dS_0 = 0. \quad (10.3.8)$$

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} dS_0 = 0. \quad (10.3.9)$$

Se ora procediamo come nella dimostrazione del precedente teorema, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} dS_0 &= \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} dS_0, \\ \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} \cdot \vec{u} dS_0 &= \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} dS_0. \end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere la (10.3.8) nella forma:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} dS_0, \quad (10.3.10)$$

e la (10.3.9) nella forma:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \tilde{S} \cdot \tilde{e} dS_0. \quad (10.3.11)$$

Ora mostriamo che per la proprietà di simmetria maggiore di cui gode  $\tilde{c}$  si ha

$$\tilde{S} \cdot \tilde{e} = \tilde{S} \cdot \tilde{e} \quad \text{in } S_0. \quad (10.3.12)$$

Infatti:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{e} = S_{ij} \bar{e}_{ij} = c_{ijrs} e_{rs} \bar{e}_{ij} = c_{rsij} e_{rs} \bar{e}_{ij} = c_{ijrs} \bar{e}_{rs} e_{ij} = \bar{S}_{ij} e_{ij} = \tilde{S} \cdot \tilde{e}.$$

Nella relazione scritta sopra abbiamo dapprima scambiato nelle componenti di  $\tilde{c}$  la prima coppia di indici con la seconda e nel passaggio successivo abbiamo scambiato il nome degli indici saturati, denotando con  $i, j$  gli indici  $r, s$  e viceversa con  $r, s$  gli indici  $i, j$ .

Allora le equazioni (10.3.10) e (10.3.11) hanno i secondi membri uguali per cui sono uguali anche i primi membri, ossia si ottiene la tesi.

Si osservi che il teorema ci consente di asserire che, nell'ipotesi che  $\tilde{c}$  goda della simmetria maggiore, il lavoro delle forze esterne relative alla prima soluzione delle equazioni dell'elastostatica lineare in corrispondenza del campo dello spostamento relativo alla seconda soluzione è uguale al lavoro delle forze esterne relative alla seconda soluzione in corrispondenza del campo dello spostamento relativo alla prima.

Enunciamo ora il più generale problema al contorno dell'elastostatica lineare: il **problema misto dell'elastostatica lineare**.

Come abbiamo visto, l'elastostatica lineare è governata dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} &= \vec{0} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con } \tilde{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \vec{u} + \text{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned}$$

Se sostituiamo nella prima equazione la relazione sforzo-deformazione, otteniamo una sola equazione avente come unica incognita vettoriale il campo dello spostamento:

$$\rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0} \quad \text{in } S_0. \quad (10.3.13)$$

All'equazione (10.3.13) vanno associate opportune condizioni al contorno che ora preciseremo.

Siano  $\partial_1 S_0$  e  $\partial_2 S_0$  due porzioni di  $\partial S_0$  che siano superfici regolari o unione di superfici regolari tali che

$$\partial_1 S_0 \cup \partial_2 S_0 = \partial S_0$$

e che non abbiano punti in comune esclusi eventualmente punti del loro bordo. All'equazione (10.3.13) associamo le due seguenti condizioni al contorno:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{\tilde{u}}, \quad \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{\tilde{f}}_0, \quad (10.3.14)$$

dove  $\vec{\tilde{u}}$  e  $\vec{\tilde{f}}_0$  sono campi vettoriali noti.

Si noti che, essendo  $\tilde{c}$  simmetrico rispetto alla prima coppia di indici, si ha

$$(\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \cdot \vec{n}_0 = \vec{n}_0 \cdot (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) = (\vec{n}_0 \cdot \tilde{c}) \cdot \text{grad}_0 \vec{u}.$$

Ciascuno degli ultimi due vettori, essendo uguali, può essere denotato semplicemente con  $\vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}$ .

La seconda condizione al contorno può dunque essere scritta nella forma:

$$\vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{\tilde{f}}_0.$$

Il problema al contorno (10.3.13), (10.3.14) è detto problema misto dell'elastostatica lineare poiché su una parte della frontiera di  $S_0$  è assegnato lo spostamento e sulla parte restante è assegnata la trazione superficiale.

Se  $\partial_1 S_0 = \partial S_0$  e  $\partial_2 S_0 = \emptyset$ , viene assegnato lo spostamento su tutta la frontiera di  $S_0$  ed il problema al contorno è detto **problema dell'elastostatica lineare relativo al solo spostamento**.

Se viceversa  $\partial_2 S_0 = \partial S_0$  e  $\partial_1 S_0 = \emptyset$ , viene assegnata su tutta la frontiera di  $S_0$  la trazione ed il problema al contorno è detto **problema dell'elastostatica lineare relativo alla sola trazione**.

Il problema misto dell'elastostatica lineare consiste nel determinare in  $S_0$  il campo vettoriale  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$  che è soluzione in  $S_0$  dell'equazione (10.3.13) e soddisfa alle condizioni al contorno (10.3.14).

Ovviamente, affinché il problema ammetta soluzione, i dati al contorno devono necessariamente soddisfare ad opportune condizioni di regolarità e di compatibilità negli eventuali punti in comune dei bordi di  $\partial_1 S_0$  e  $\partial_2 S_0$ .

**Teorema 10.7. Teorema di unicità della soluzione del problema misto dell'elastostatica lineare.** *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico  $\tilde{c}$  goda della simmetria maggiore e sia definito positivo. Se il problema misto dell'elastostatica relativo a tale solido ammette soluzione, questa è unica*

a meno di uno spostamento rigido infinitesimo, ossia se  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  sono soluzioni dello stesso problema misto, allora

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{s},$$

dove  $\vec{s}$  è uno spostamento rigido infinitesimo.

### Dimostrazione

Supponiamo che esistano due soluzioni  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  dello stesso problema misto e poniamo

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Vediamo di quali proprietà gode  $\vec{u}$  essendo differenza di due soluzioni dello stesso problema misto.

In primo luogo  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0)$  poiché lo sono  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ . Inoltre, essendo  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  soluzioni in  $S_0$  della stessa equazione con la stessa densità delle forze esterne di massa, la loro differenza è soluzione in  $S_0$  della corrispondente equazione omogenea, ossia:

$$\operatorname{div}_0(\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0}. \quad (10.3.15)$$

Infine  $\vec{u}$  soddisfa a condizioni al contorno omogenee:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{0}, \quad \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0} = \vec{0}. \quad (10.3.16)$$

Poiché  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore, possiamo applicare il teorema del lavoro e dell'energia alla coppia  $(\vec{u}, \tilde{S} = \tilde{c} \cdot \tilde{e})$  tenendo presente che è soluzione delle due equazioni dell'elastostatica lineare in corrispondenza di forze esterne di massa nulle per cui

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 2\Omega = \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \, dS_0. \quad (10.3.17)$$

D'altra parte

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial_1 S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 + \int_{\partial_2 S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0.$$

Ma l'integrale esteso a  $\partial_1 S_0$  è nullo per la prima delle (10.3.16) e l'integrale esteso a  $\partial_2 S_0$  è nullo per la seconda delle (10.3.16). Dunque

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \, d\Sigma_0 = 0$$

e la (10.3.17) si riduce a

$$\int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \, dS_0 = 0. \quad (10.3.18)$$

Ma, essendo  $\tilde{c}$  definito positivo, la funzione integranda nella (10.3.18) è non negativa in  $S_0$ ; essendo anche continua ne discende:

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = 0 \quad \text{in } S_0.$$

D'altra parte la forma quadratica  $\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e}$  è definita positiva e dunque otteniamo

$$\tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} = 0 \quad \text{in } S_0 \implies \tilde{e} = \tilde{0} \quad \text{in } S_0.$$

Per quanto visto sulle proprietà del tensore di deformazione infinitesima concludiamo che  $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  è uno spostamento rigido infinitesimo cvd.

Ci proponiamo ora di provare che se  $\partial_1 S_0 \neq \emptyset$  c'è unicità della soluzione. Dimostriamo dapprima il seguente

**Lemma 10.1.** *Se il campo di uno spostamento rigido infinitesimo  $\vec{s} = \vec{s}(P_0)$  definito in  $S_0$  è nullo in tre punti non allineati, allora è identicamente nullo in  $S_0$ .*

Dimostrazione

Per definizione di spostamento rigido infinitesimo, abbiamo

$$\vec{s}(P_0) = \vec{s}(\bar{P}_0) + \vec{\varphi} \times (P_0 - \bar{P}_0) \quad \forall P_0, \bar{P}_0 \in S_0. \quad (10.3.19)$$

Per ipotesi  $\vec{s} = \vec{0}$  nei tre punti  $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$ , non allineati, ossia

$$\vec{s}(P_0^{(i)}) = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\vec{s}(P_0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Nella (10.3.19) prendiamo  $\bar{P}_0 = P_0^{(1)}$  per cui otteniamo:

$$\vec{s}(P_0) = \vec{\varphi} \times (P_0 - P_0^{(1)}) \quad \forall P_0 \in S_0.$$

Ora nella relazione scritta sopra prendiamo  $P_0$  coincidente dapprima con  $P_0^{(2)}$  e poi con  $P_0^{(3)}$ . Deduciamo allora:

$$\vec{s}(P_0^{(2)}) = \vec{\varphi} \times (P_0^{(2)} - P_0^{(1)}) = \vec{0}, \quad (10.3.20)$$

$$\vec{s}(P_0^{(3)}) = \vec{\varphi} \times (P_0^{(3)} - P_0^{(1)}) = \vec{0}. \quad (10.3.21)$$

Dalla (10.3.20) si ha che

$$\vec{\varphi} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{\varphi} \parallel (P_0^{(2)} - P_0^{(1)})$$

e analogamente dalla (10.3.21) discende

$$\vec{\varphi} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{\varphi} \parallel (P_0^{(3)} - P_0^{(1)}).$$

Ma poiché i punti  $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0^{(3)}$ , non sono allineati, i vettori  $(P_0^{(2)} - P_0^{(1)})$  e  $(P_0^{(3)} - P_0^{(1)})$  non sono paralleli e quindi  $\vec{\varphi} = \vec{0}$  per cui

$$\vec{s}(P_0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0.$$

**Teorema 10.8. Teorema di unicità vera e propria** Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 10.7 ed inoltre si abbia  $\partial_1 S_0 \neq \emptyset$ . Allora, se esiste una soluzione del problema misto dell'elastostatica lineare, questa è unica.

Dimostrazione

Siano  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  due soluzioni dello stesso problema e poniamo  $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ . Per il teorema precedente  $\vec{u}$  è uno spostamento rigido infinitesimo. D'altra parte,

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0} = \vec{0}.$$

Poiché  $\partial_1 S_0$ , essendo una superficie regolare o l'unione di più superfici regolari, contiene sicuramente tre punti non allineati, per il lemma 10.1 concludiamo che

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0} \quad \implies \quad \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{in } S_0.$$

Il teorema di unicità è così dimostrato.

Se il problema che si considera in elastostatica lineare è relativo alla sola trazione, per quanto visto nel primo teorema di unicità, la soluzione è unica a meno di uno spostamento rigido infinitesimo.

Ricordiamo che tale problema si ottiene associando all'equazione:

$$\rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 (\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}) = \vec{0} \quad \text{in } S_0 \quad (10.3.22)$$

la condizione al contorno

$$\tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial S_0} = \vec{f}_0. \quad (10.3.23)$$

Ci proponiamo di dimostrare la seguente

**Proposizione 10.5.** *Condizione necessaria affinché il problema relativo alla sola trazione dell'elastostatica lineare (10.3.22), (10.3.23) ammetta soluzione è che*

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0 &= \vec{0} \\ \int_{S_0} (P_0 - O) \times \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{\partial S_0} (P_0 - O) \times \vec{f}_0 d\Sigma_0 &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (10.3.24)$$

essendo  $O$  un punto arbitrario fisso rispetto all'osservatore.

Dimostrazione

Osserviamo che la prima delle (10.3.24) ci dice che il risultante delle forze esterne è nullo, la seconda che è nullo il momento risultante delle forze esterne rispetto al punto  $O$ .

Per ottenere le (10.3.24) integriamo su  $S_0$  entrambi i membri della (10.3.22):

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \vec{0}, \quad (10.3.25)$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} = \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{S}.$$

Ma per il teorema della divergenza e la condizione al contorno (10.3.23) si ottiene:

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \int_{\partial S_0} \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 d\Sigma_0.$$

Sostituendo nella (10.3.25) tale risultato, ricaviamo la prima delle due relazioni da dimostrare.

Per ottenere la seconda, moltiplichiamo vettorialmente a sinistra entrambi i membri della (10.3.22) per il vettore  $(P_0 - O)$  e poi integriamo su  $S_0$ :

$$\int_{S_0} (P_0 - O) \times \rho_0 \vec{F} dS_0 + \int_{S_0} (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \vec{0}. \quad (10.3.26)$$

Consideriamo ora la  $i$ -esima componente del vettore sotto il secondo integrale al primo membro della (10.3.26) rispetto alla base relativa al riferimento  $O x_1 x_2 x_3$  associato all'osservatore:

$$\begin{aligned} \left[ (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} \right]_i &= \theta_{ijl} x_{0j} \left( \operatorname{div}_0 \tilde{S} \right)_l = \theta_{ijl} x_{0j} S_{lr,r} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} x_{0j,r} S_{lr} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} \delta_{jr} S_{lr} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} - \theta_{ijl} S_{lj} \\ &= (\theta_{ijl} x_{0j} S_{lr})_{,r} \end{aligned} \quad (10.3.27)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che i due indici di emisimmetria  $j, l$  del tensore di Ricci sono contratti con i due indici corrispondenti di simmetria di  $\tilde{S}$ .

Sfruttando il risultato ottenuto in (10.3.27), applicando le formule integrali di Gauss-Ostrogradski e usando la condizione al contorno (10.3.23), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left[ (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} \right]_i dS_0 &= \int_{\partial S_0} \theta_{ijl} x_{0j} S_{lr} n_{0r} d\Sigma_0 \\ &= \int_{\partial S_0} \theta_{ijl} x_{0j} \hat{f}_{0l} d\Sigma_0 \\ &= \int_{\partial S_0} \left[ (P_0 - O) \times \vec{\hat{f}}_0 \right]_i d\Sigma_0, \end{aligned}$$

ossia

$$\int_{S_0} (P_0 - O) \times \operatorname{div}_0 \tilde{S} dS_0 = \int_{\partial S_0} (P_0 - O) \times \vec{\hat{f}}_0 d\Sigma_0. \quad (10.3.28)$$

L'inserimento della (10.3.28) nella (10.3.26) fornisce la seconda delle (10.3.24). La proposizione è così dimostrata.

## 10.4 Elastodinamica lineare.

Sia dato un solido elastico lineare in moto nell'intervallo di tempo  $[0, t_1]$  o  $[0, +\infty)$ . Prendiamo come configurazione di riferimento quella naturale ed indichiamo con  $S_0$  la regione occupata in tale configurazione, che assumiamo essere la chiusura di un dominio regolare.

Le equazioni che ne governano il moto in  $\mathcal{S}_0 = S_0 \times [0, t_1]$  o  $S_0 \times [0, +\infty)$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} \quad \text{con} \quad \tilde{e} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}_0 \vec{u} + \operatorname{grad}_0^T \vec{u}). \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

Le (10.4.1) sono note come **equazioni dell'elastodinamica lineare**.

Nel seguito supporremo soddisfatte le seguenti ipotesi:

$$\rho_0 \in \mathcal{C}(S_0), \quad \vec{F} \in \mathcal{C}(S_0), \quad \tilde{c} \in \mathcal{C}^1(S_0), \quad \vec{u} \in \mathcal{C}^2(S_0), \quad \tilde{S} \in \mathcal{C}^{1,0}(S_0).$$

In base a quanto visto nel §2, sussiste il seguente

**Teorema 10.9. Teorema della potenza e dell'energia.** *Dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico gode della simmetria maggiore, in moto nell'intervallo di tempo  $[0, t_1]$  o  $[0, +\infty)$ , si ha:*

$$\frac{d}{dt} (T + \Omega)(t) = \Pi_e(t) \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ o } [0, +\infty). \quad (10.4.2)$$



Il nostro scopo è ora quello di esprimere  $T$  e  $\Pi_e$  nell'ambito dell'impostazione materiale.

Consideriamo dapprima l'energia cinetica  $T$ ; applicando il teorema del cambiamento delle variabili d'integrazione deduciamo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS = \frac{1}{2} \int_{S_0} J \rho_m \dot{\vec{x}}^2 dS_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_0} J \rho_m \dot{\vec{u}}^2 dS_0 = \frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0. \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

Per ottenere la (10.4.3) abbiamo trasformato l'integrale esteso a  $S(t)$  in un integrale esteso a  $S_0$ , abbiamo tenuto presente l'equazione di continuità della massa dal punto di vista materiale e che  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{u}}$ .

Consideriamo ora la potenza delle forze esterne

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma.$$

Per quanto riguarda la potenza delle forze esterne di massa, applicando il teorema sul cambiamento delle variabili d'integrazione e procedendo in maniera analoga a quanto fatto per l'energia cinetica, deduciamo:

$$\int_{S(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dS = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}_m \cdot \dot{\vec{u}} dS_0. \quad (10.4.4)$$

Trasformiamo ora la potenza delle forze esterne di contatto, ricordando che  $\vec{f} = \tilde{T} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S(t)}$  e applicando il lemma 8.1 enunciato nel Capitolo 5 relativo alle superfici materiali:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Sigma &= \int_{\partial S(t)} (\tilde{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} d\Sigma \\ &= \int_{\partial S(t)} (\vec{v} \cdot \tilde{T}) \cdot \vec{n} d\Sigma \\ &= \int_{\partial S_0} J(\dot{\vec{u}} \cdot \tilde{T}_m) \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) d\Sigma_0. \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

Scriviamo in componenti il campo scalare sotto l'integrale esteso a  $\partial S_0$  che compare nella (10.4.5):

$$\begin{aligned} J(\dot{\vec{u}} \cdot \tilde{T}_m) \cdot (\tilde{G} \cdot \vec{n}_0) &= J \dot{u}_i T_{ij}^{(m)} G_{jk} n_{0k} \\ &= J T_{ij}^{(m)} G_{jk} n_{0k} \dot{u}_i \\ &= S_{ik} n_{0k} \dot{u}_i = (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0)_i \dot{u}_i. \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Sostituendo la (10.4.6) nella (10.4.5), otteniamo:

$$\int_{\partial S(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma = \int_{\partial S_0} (\tilde{S} \cdot \vec{n}_0) \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (10.4.7)$$

In conclusione, dalle (10.4.4), (10.4.7) deduciamo:

$$\Pi_e = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}_m \cdot \dot{\vec{u}} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (10.4.8)$$

Nel seguito per brevità, come del resto abbiamo sempre fatto dal Capitolo 6, omettiamo il pedice  $m$  nella densità delle forze esterne di massa.

A questo punto possiamo esplicitare in maniera completa la (10.4.2) nell'ambito dell'impostazione materiale:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 \, dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} \, dS_0 \right] = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F} \cdot \dot{\vec{u}} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} \, d\Sigma_0. \quad (10.4.9)$$

Il nostro scopo è ora dimostrare un teorema di reciprocità per l'elastodinamica lineare analogo al teorema di reciprocità di Betti stabilito in elastostatica lineare. Introduciamo dapprima la definizione di convoluzione.

**Definizione 10.11.** Siano  $f = f(t)$ ,  $g = g(t)$  due funzioni a valori reali definite  $\forall t \in [0, t_1]$  (o  $[0, +\infty)$ ), continue nell'intervallo di definizione.

Si definisce convoluzione di  $f$  e  $g$  la funzione scalare  $f * g$  tale che:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \, d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (\text{o } [0, +\infty)).$$

Come si può verificare facilmente, effettuando un cambiamento della variabile d'integrazione, si ha:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau = (g * f)(t) \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (\text{o } [0, +\infty)).$$

Si può anche provare facilmente, sempre con un opportuno cambiamento della variabile d'integrazione, che se  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sono funzioni scalari continue in  $[0, t_1]$  (o  $[0, +\infty)$ ), allora

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

**Definizione 10.12.** Siano  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(t)$ ,  $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$  una funzione scalare, una funzione vettoriale, una funzione tensoriale definite  $\forall t \in [0, t_1]$  (o  $[0, +\infty)$ ), continue nell'intervallo di definizione.

Si definiscono convoluzione di  $\alpha$  e  $\vec{u}$  e convoluzione di  $\alpha$  e  $\tilde{A}$  le due funzioni, una vettoriale ed una tensoriale  $\alpha * \vec{u}$ ,  $\alpha * \tilde{A}$  tali che:

$$(\alpha * \vec{u})(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)),$$

$$(\alpha * \tilde{A})(t) = \int_0^t \alpha(t - \tau) \tilde{A}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)).$$

Siano  $\vec{u} = \vec{u}(t)$ ,  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  due funzioni vettoriali e  $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ ,  $\tilde{B} = \tilde{B}(t)$  due funzioni tensoriali dello stesso ordine, definite  $\forall t \in [0, t_1]$  (o  $[0, +\infty)$ ), continue nell'intervallo di definizione.

Si definiscono convoluzione di  $\vec{u}$  e di  $\vec{v}$  e convoluzione di  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  le due funzioni scalari  $\vec{u} * \vec{v}$ ,  $\tilde{A} * \tilde{B}$  tali che:

$$(\vec{u} * \vec{v})(t) = \int_0^t \vec{u}(t - \tau) \cdot \vec{v}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)),$$

$$(\tilde{A} * \tilde{B})(t) = \int_0^t \tilde{A}(t - \tau) \cdot \tilde{B}(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (o \quad [0, +\infty)).$$

Le definizioni date continuano a sussistere se consideriamo campi scalari, vettoriali o tensoriali dipendenti da  $t$ . La convoluzione sarà anch'essa, a seconda dei casi, un campo scalare, vettoriale o tensoriale, dipendente da  $t$ .

**Osservazione 10.1** La convoluzione di funzioni del tempo scalari, vettoriali o tensoriali continue in  $[0, t_1]$  o in  $[0, +\infty)$  è una funzione continua in  $[0, t_1]$  o in  $[0, +\infty)$ .

La convoluzione di campi scalari, vettoriali o tensoriali continui in  $S_0 \times [0, t_1]$  o in  $S_0 \times [0, +\infty)$  è un campo scalare, vettoriale o tensoriale continuo in  $S_0 \times [0, t_1]$  o in  $S_0 \times [0, +\infty)$ .

Dimostriamo ora la seguente

**Proposizione 10.6.** La coppia  $(\vec{u}, \tilde{S})$  soddisfa l'equazione:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0 \quad (10.4.10)$$

e per  $\vec{u}$  sussistano le seguenti condizioni iniziali:

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (10.4.11)$$

Allora  $(\vec{u}, \tilde{S})$  soddisfa anche l'equazione:

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \text{div}_0 \tilde{S} \quad \text{in } \mathcal{S}_0, \quad (10.4.12)$$

dove

$$\begin{aligned}\vec{F}^*(P_0, t) &= (j * \vec{F})(P_0, t) + t \vec{v}_0(P_0) + \vec{u}_0(P_0) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0 \\ j &= j(t) = t. \\ \vec{F}^* &\text{ è detta densità delle pseudoforze di massa.}\end{aligned}$$

Dimostrazione

Consideriamo la convoluzione della funzione  $j = j(t)$  con entrambi i membri della (10.4.10):

$$j * \rho_0 \ddot{\vec{u}} = j * \rho_0 \vec{F} + j * \operatorname{div}_0 \tilde{S}. \quad (10.4.13)$$

Poiché  $\rho_0$  è indipendente dal tempo, possiamo scrivere la (10.4.13) nella forma:

$$\rho_0 j * \ddot{\vec{u}} = \rho_0 j * \vec{F} + j * \operatorname{div}_0 \tilde{S}. \quad (10.4.14)$$

Consideriamo la convoluzione al primo membro della (10.4.14) ed integriamo per parti tenendo presenti le (10.4.11):

$$\begin{aligned}(j * \ddot{\vec{u}})(P_0, t) &= \int_0^t (t - \tau) \ddot{\vec{u}}(P_0, \tau) d\tau \\ &= (t - \tau) \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) d\tau \\ &= -t \dot{\vec{u}}(P_0, 0) + \vec{u}(P_0, t) - \vec{u}(P_0, 0) \\ &= \vec{u}(P_0, t) - t \vec{v}_0(P_0) - \vec{u}_0(P_0).\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (10.4.14), deduciamo:

$$\begin{aligned}\rho_0(P_0) \vec{u}(P_0, t) &= \rho_0(P_0) \left[ (j * \vec{F})(P_0, t) + t \vec{v}_0(P_0) + \vec{u}_0(P_0) \right] + (j * \operatorname{div}_0 \tilde{S})(P_0, t) \\ &= \rho_0(P_0) \vec{F}^*(P_0, t) + (j * \operatorname{div}_0 \tilde{S})(P_0, t) \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0.\end{aligned}$$

La proposizione è così dimostrata.

Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema di reciprocità di Graffi per l'elastodinamica lineare.

**Teorema 10.10. Teorema di reciprocità di Graffi.** *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico goda della simmetria maggiore. Inoltre sia  $(\vec{u}, \tilde{S})$  soluzione delle equazioni dell'elastodinamica lineare relative a tale solido in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa con  $\vec{u}$  soddisfacente alle condizioni iniziali:*

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0 \quad (10.4.15)$$

e sia  $(\vec{u}, \vec{S})$  soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa con  $\vec{u}$  soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{u}_0(P_0), \quad \dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0. \quad (10.4.16)$$

Allora in  $[0, t_1]$  (o in  $[0, +\infty)$ ) si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0, \quad (10.4.17)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{F}^* &= j * \vec{F} + t \vec{v}_0 + \vec{u}_0, & \vec{f}_0 &= \vec{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0} \\ \vec{F}^* &= j * \vec{F} + t \vec{v}_0 + \vec{u}_0, & \vec{f}_0 &= \vec{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial S_0}. \end{aligned}$$

Se

$$\vec{u}_0, \vec{u}_0 \equiv \vec{0}, \quad e \quad \vec{v}_0, \vec{v}_0 \equiv \vec{0},$$

allora in  $[0, t_1]$  (o in  $[0, +\infty)$ ) si ha:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0. \quad (10.4.18)$$

#### Dimostrazione

Se  $(\vec{u}, \vec{S})$  è soluzione delle equazioni dell'elastodinamica lineare in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa con  $\vec{u}$  soddisfacente alle condizioni iniziali (10.4.15) e  $(\vec{u}, \vec{S})$  è soluzione delle stesse equazioni in corrispondenza della densità  $\vec{F}$  delle forze esterne di massa con  $\vec{u}$  soddisfacente alle condizioni iniziali (10.4.16), per la proposizione 10.6 si ha:

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \operatorname{div}_0 \vec{S} \quad \text{in } S_0 \quad (10.4.19)$$

$$\rho_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{F}^* + j * \operatorname{div}_0 \vec{S} \quad \text{in } S_0. \quad (10.4.20)$$

Dalla (10.4.19), considerandone la convoluzione di entrambi i membri con  $\vec{u}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{u} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + (j * \operatorname{div}_0 \vec{S}) * \vec{u} \\ &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}). \end{aligned} \quad (10.4.21)$$

Analogamente dalla (10.4.20), considerandone la convoluzione di entrambi i membri con  $\vec{u}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_0 \vec{u} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + (j * \operatorname{div}_0 \vec{S}) * \vec{u} \\ &= \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}). \end{aligned} \quad (10.4.22)$$

Ma per una proprietà delle convoluzioni

$$\vec{u} * \vec{u} = \vec{u} * \vec{u}$$

per cui in  $\mathcal{S}_0$  si ha:

$$\rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) = \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}). \quad (10.4.23)$$

Integriamo su  $S_0$  entrambi i membri della (10.4.23):

$$\int_{S_0} \left[ \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = \int_{S_0} \left[ \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0. \quad (10.4.24)$$

D'altra parte, poiché  $j$  non dipende da  $P_0$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left[ j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] (P_0, t) dS_0 &= \int_{S_0} \left\{ \int_0^t \left[ (t - \tau) (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, \tau) \right] d\tau \right\} dS_0 \\ &= \int_0^t (t - \tau) \left[ \int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, \tau) dS_0 \right] d\tau, \end{aligned}$$

ossia

$$\int_{S_0} \left[ j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0.$$

Analogamente si ha:

$$\int_{S_0} \left[ j * (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u}) \right] dS_0 = j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0.$$

Sostituendo nella (10.4.24), deduciamo

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} + j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0. \quad (10.4.25)$$

Ora consideriamo  $\forall t \in [t_0, t_1] \quad o \in [t_0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} &\int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, t) dS_0 = \\ &= \int_{S_0} \left( \int_0^t \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau \right) dS_0 = \\ &= \int_0^t \left( \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Occupiamoci per il momento della funzione integranda dell'integrale di volume:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) &= S_{ij,j}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) \\ &= [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} - S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_{i,j}(P_0, \tau) \\ &= [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} - S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale di volume otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{S_0} [S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau)]_{,j} dS_0 - \int_{S_0} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) n_{0j} d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} f_{0i}(P_0, t - \tau) \bar{u}_i(P_0, \tau) d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\Sigma_0 - \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{S_0} (\operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u})(P_0, t) dS_0 &= \int_0^t \left( \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau = \\ &= \int_0^t \left( \int_{\partial S_0} \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\Sigma_0 \right) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left( \int_{S_0} \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) dS_0 \right) d\tau = \\ &= \int_{\partial S_0} \left( \int_0^t \vec{f}_0(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau \right) d\Sigma_0 \\ &\quad - \int_{S_0} \left( \int_0^t \tilde{S}(P_0, t - \tau) \cdot \tilde{e}(P_0, \tau) d\tau \right) dS_0 = \\ &= \int_{\partial S_0} (\vec{f}_0 * \vec{u})(P_0, t) d\Sigma_0 - \int_{S_0} (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) dS_0. \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{S} * \vec{u} dS_0 = j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0. \quad (10.4.26)$$

Procedendo in maniera analoga si deduce:

$$j * \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \tilde{\tilde{S}} * \vec{u} dS_0 = j * \int_{\partial S_0} \vec{\tilde{f}}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{\tilde{S}} * \tilde{e} dS_0. \quad (10.4.27)$$

Sostituiamo le (10.4.26), (10.4.27) nella (10.4.25) ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0 = \\ \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 - j * \int_{S_0} \tilde{S} * \tilde{e} dS_0. \end{aligned} \quad (10.4.28)$$

D'altra parte, poiché  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore, è facile provare che:

$$\tilde{S} * \tilde{e} = \tilde{S} * \tilde{e}. \quad (10.4.29)$$

Infatti

$$(\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) = \int_0^t S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) d\tau. \quad (10.4.30)$$

Ma

$$\begin{aligned} S_{ij}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) &= c_{ijrs}(P_0) e_{rs}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) \\ &= c_{rsij}(P_0) e_{rs}(P_0, t - \tau) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) \\ &= c_{rsij}(P_0) \bar{e}_{ij}(P_0, \tau) e_{rs}(P_0, t - \tau) \\ &= c_{ijrs}(P_0) \bar{e}_{rs}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau) \\ &= \bar{S}_{ij}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau). \end{aligned}$$

Se andiamo a sostituire nella (10.4.30), otteniamo:

$$\begin{aligned} (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t) &= \int_0^t \bar{S}_{ij}(P_0, \tau) e_{ij}(P_0, t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \bar{S}_{ij}(P_0, t - \tau) e_{ij}(P_0, \tau) d\tau \\ &= (\tilde{S} * \tilde{e})(P_0, t), \end{aligned}$$

che è il risultato che ci proponevamo di ottenere.

Allora, grazie alla (10.4.29), la (10.4.28) si riduce a:

$$\int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0 = \int_{S_0} \rho_0 \vec{F}^* * \vec{u} dS_0 + j * \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma_0,$$

che è la prima delle due relazioni che dovevamo dimostrare, cioè la (10.4.17).

Ora supponiamo che  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}$  soddisfino a condizioni iniziali nulle e stabiliamo la (10.4.18).

A tal fine consideriamo la convoluzione con  $\vec{u}$  di entrambi i membri della prima equazione dell'elastodinamica lineare di cui è soluzione la coppia  $(\vec{u}, \tilde{S})$  ed



analogamente consideriamo la convoluzione con  $\vec{u}$  di entrambi i membri della prima equazione dell'elastodinamica lineare di cui è soluzione la coppia  $(\vec{u}, \vec{S})$ :

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\vec{u}} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F} * \vec{u} + \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}, \\ \rho_0 \ddot{\vec{u}} * \vec{u} &= \rho_0 \vec{F} * \vec{u} + \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u}.\end{aligned}\quad (10.4.31)$$

Consideriamo  $\forall (P_0, t) \in \mathcal{S}_0$ :

$$\begin{aligned}(\ddot{\vec{u}} * \vec{u})(P_0, t) &= \int_0^t \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) \cdot \vec{u}(P_0, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \ddot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \vec{u}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \vec{u}(P_0, t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \dot{\vec{u}}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \dot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \vec{u}(P_0, \tau) \cdot \ddot{\vec{u}}(P_0, t - \tau) d\tau = \\ &= (\ddot{\vec{u}} * \vec{u})(P_0, t).\end{aligned}$$

Dunque le due equazioni (10.4.31) hanno uguali i primi membri per cui sono uguali anche i due secondi membri che integriamo su  $S_0$ :

$$\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0. \quad (10.4.32)$$

Ma, per quanto visto nella dimostrazione della prima parte del teorema:

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0 \quad (10.4.33)$$

$$\int_{S_0} \operatorname{div}_0 \vec{S} * \vec{u} dS_0 = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0. \quad (10.4.34)$$

Se sostituiamo le (10.4.33) e (10.4.34) nella (10.4.32), deduciamo:

$$\begin{aligned}\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0 &= \\ = \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma - \int_{S_0} \vec{S} * \vec{e} dS_0.\end{aligned}\quad (10.4.35)$$

Ma sempre nella prima parte della dimostrazione abbiamo dedotto:

$$\tilde{S} * \tilde{e} = \tilde{S} * \tilde{e},$$

per cui la (10.4.35) si riduce a :

$$\int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma = \int_{S_0} \rho \vec{F} * \vec{u} dS_0 + \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 * \vec{u} d\Sigma,$$

che è appunto la relazione (10.4.18) che ci proponevamo di dimostrare.

Il teorema di reciprocità è così provato in maniera completa.

Ora formuliamo il più generale problema ai limiti dell'elastodinamica lineare:  
il **problema misto dell'elastodinamica lineare**.

Come abbiamo visto, l'elastodinamica lineare è governata dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u} \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

Se sostituiamo nella prima equazione la relazione sforzo deformazione, otteniamo una sola equazione avente come unica incognita vettoriale il campo dello spostamento:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho_0 \vec{F} + \operatorname{div}_0(\tilde{c} \cdot \operatorname{grad}_0 \vec{u}) \quad \text{in } \mathcal{S}_0. \quad (10.4.36)$$

All'equazione (10.4.36) associamo opportune condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{u}(P_0, 0) &= \vec{u}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0 \\ \dot{\vec{u}}(P_0, 0) &= \vec{v}_0(P_0) \quad \forall P_0 \in S_0, \end{aligned} \quad (10.4.37)$$

cioè sono assegnati all'istante iniziale lo spostamento  $\vec{u}_0(P_0)$  e la velocità  $\vec{v}_0(P_0)$ . Per quanto riguarda le condizioni al contorno, sono analoghe a quelle del problema misto dell'elastostatica lineare.

Siano  $\partial_1 S_0$  e  $\partial_2 S_0$  due porzioni di  $\partial S_0$  che siano superfici regolari o unione di superfici regolari tali che

$$\partial_1 S_0 \cup \partial_2 S_0 = \partial S_0$$

e non abbiano punti in comune esclusi eventualmente punti del loro bordo.

All'equazione (10.4.36) associamo le due seguenti condizioni al contorno:

$$\vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \cup (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{u} \quad (10.4.38)$$

$$\tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \cup (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{n}_0 \cdot \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \cup (\circ \times [0, +\infty))} = \vec{f}_0, \quad (10.4.39)$$

dove  $\vec{u}$  e  $\vec{f}_0$  sono campi vettoriali noti.

Il problema ai limiti (10.4.36), (10.4.37), (10.4.38), (10.4.39) è detto problema misto dell'elastodinamica lineare poiché su una parte della frontiera di  $S_0$  è assegnato lo spostamento e sulla parte restante è assegnata la trazione superficiale. Se  $\partial_1 S_0 = \partial S_0$  e  $\partial_2 S_0 = \emptyset$ , viene assegnato lo spostamento su tutta la frontiera di  $S_0$  ed il problema ai limiti è detto **problema dell'elastodinamica lineare relativo al solo spostamento**.

Se viceversa  $\partial_2 S_0 = \partial S_0$  e  $\partial_1 S_0 = \emptyset$ , viene assegnata su tutta la frontiera di  $S_0$  la trazione ed il problema ai limiti è detto **problema dell'elastodinamica lineare relativo alla sola trazione**.

Il problema misto dell'elastodinamica lineare consiste nel determinare in  $S_0$  il campo vettoriale  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  che è soluzione in  $S_0$  dell'equazione (10.4.36) e soddisfa alle condizioni iniziali (10.4.37) ed alle condizioni al contorno (10.4.38), (10.4.39).

Ovviamente affinché il problema ammetta soluzione i dati iniziali e al contorno devono necessariamente soddisfare ad opportune condizioni di regolarità e compatibilità su cui non insistiamo.

**Teorema 10.11. Teorema di unicità della soluzione del problema misto dell'elastodinamica lineare.** *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico  $\tilde{c}$  goda della simmetria maggiore e sia semidefinito positivo. Se il problema misto dell'elastodinamica lineare relativo a tale solido ammette soluzione, questa è unica.*

#### Dimostrazione

Supponiamo che esistano due soluzioni  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  dello stesso problema misto e poniamo

$$\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Vediamo di quali proprietà gode  $\vec{u}$  essendo differenza di due soluzioni dello stesso problema misto.

In primo luogo  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_0)$  poiché lo sono  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ . Inoltre, essendo  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  soluzioni in  $S_0$  della stessa equazione con la stessa densità delle forze esterne di massa, la loro differenza è soluzione in  $S_0$  della corrispondente equazione omogenea, ossia:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \text{div}_0(\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}). \quad (10.4.40)$$

Inoltre  $\vec{u}$  soddisfa a condizioni iniziali omogenee:

$$\begin{aligned} \vec{u}(P_0, 0) &= \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0 \\ \dot{\vec{u}}(P_0, 0) &= \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0, \end{aligned} \quad (10.4.41)$$

e a condizioni al contorno omogenee:

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0} \\ \tilde{S} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (10.4.42)$$

Poiché il tensore degli sforzi di Piola-Kirchoff associato a  $\vec{u}$  è dato da  $\tilde{S} = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}$ , allora la coppia  $(\vec{u}, \tilde{S})$  è soluzione delle due equazioni dell'elastodinamica lineare corrispondenti a forze di massa nulle, cioè:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\vec{u}} &= \text{div}_0 \tilde{S} \\ \tilde{S} &= \tilde{c} \cdot \tilde{e} = \tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u} \quad \text{in } S_0. \end{aligned}$$

Alla coppia  $(\vec{u}, \tilde{S})$ , tenendo presenti le ipotesi del teorema, è applicabile il teorema della potenza e dell'energia, ossia avremo  $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty))$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 \right] = \int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0, \quad (10.4.43)$$

dove abbiamo tenuto presente che  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Ma

$$\int_{\partial S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 = \int_{\partial_1 S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 + \int_{\partial_2 S_0} \vec{f}_0 \cdot \dot{\vec{u}} d\Sigma_0 = 0, \quad (10.4.44)$$

poiché, a causa delle condizioni al contorno cui soddisfa  $\vec{u}$ :

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0} \implies \dot{\vec{u}} \Big|_{\partial_1 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} = \vec{0} \\ \vec{f}_0 \Big|_{\partial_2 S_0 \times [0, t_1] \text{ (o } \times [0, +\infty))} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pertanto la (10.4.43) si riduce a

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 \right] = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (10.4.45)$$

Dalla (10.4.45) deduciamo:

$$\frac{1}{2} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \frac{1}{2} \int_{S_0} \tilde{e} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{e} dS_0 = \text{costante} \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)).$$

Ma all'istante iniziale si ha

$$\vec{u}(P_0, 0) = \vec{0} \implies \text{grad}_0 \vec{u}(P_0, 0) = \tilde{0} \implies \tilde{e}(P_0, 0) = \tilde{0} \quad \forall P_0 \in S_0$$

ed anche

$$\dot{\vec{u}}(P_0, 0) = \vec{0} \quad \forall P_0 \in S_0$$

cosicché la somma dell'energia cinetica e dell'energia di deformazione elastica è nulla ad ogni istante. Si ha perciò:

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 + \int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} dS_0 = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (10.4.46)$$

Ma  $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)$

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 \geq 0$$

per definizione e

$$\int_{S_0} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} dS_0 \geq 0$$

perché  $\tilde{c}$  è semidefinito positivo (ossia  $\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{\epsilon} \geq 0$  per ogni tensore doppio simmetrico  $\tilde{\epsilon}$ ).

Poiché la (10.4.46) ci dice che la somma dei due integrali è uguale a 0, deduciamo che entrambi sono necessariamente nulli  $\forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)$ ). In particolare abbiamo:

$$\int_{S_0} \rho_0 \dot{\vec{u}}^2 dS_0 = 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \text{ (o } [0, +\infty)). \quad (10.4.47)$$

Questo è l'integrale di un campo continuo e non negativo in  $S_0$  per cui dalla (10.4.47) segue:

$$\rho \dot{\vec{u}}^2 = 0 \quad \text{in } S_0 \implies \dot{\vec{u}}^2 = 0 \implies \dot{\vec{u}} = \vec{0} \quad \text{in } S_0.$$

Perciò  $\vec{u}$  non dipende dal tempo e poiché all'istante iniziale è nullo in  $S_0$ , concludiamo che

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{in } S_0 \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{in } S_0.$$

L'unicità è così provata.



# Capitolo 11

## Propagazione ondosa nei solidi elastici lineari

### 11.1 Premesse

Riguardo al termine "onda" se ne possono dare due definizioni, una più restrittiva ed una più generale.

Vediamo dapprima la definizione più restrittiva.

**Definizione 11.1.** *Si definisce onda ogni campo scalare, vettoriale o tensoriale che sia soluzione dell'equazione delle onde (o di d'Alembert) scalare, vettoriale o tensoriale.*

Ricordiamo che l'equazione delle onde in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  in forma scalare è la seguente:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(P, t) \quad (11.1.1)$$

dove  $V$  è una costante positiva e  $F$  è un campo scalare assegnato.

Se  $F \equiv 0$ , l'equazione (11.1.1) è detta omogenea.

Si scrive in maniera analoga l'equazione delle onde vettoriale o tensoriale. In tal caso il campo incognito è vettoriale o tensoriale ed anche il termine noto al secondo membro è un campo vettoriale o tensoriale.

Diamo ora la definizione più generale.

**Definizione 11.2.** *Definiamo onda una qualsiasi perturbazione, individuata da uno o più campi scalari, vettoriali o tensoriali, che si propaga in un dato mezzo da uno stato perturbato ad uno stato che non lo è.*

Dalla seconda definizione segue che nel mezzo in cui l'onda si propaga c'è una superficie che separa la regione perturbata da quella non perturbata. Tale

superficie è detta **fronte d'onda**.

I campi associati alla perturbazione ed alcune delle loro derivate possono eventualmente presentare delle discontinuità di tipo salto attraverso il fronte d'onda; in tal caso si parla di **onda di discontinuità**.

E' comunque da rilevare che anche nel caso della definizione più restrittiva di onda, a questa è associato un fronte d'onda e la costante  $V$  che compare nell'equazione delle onde (che nei vari fenomeni fisici descritti da tale equazione ha le dimensioni fisiche di una velocità) viene a rappresentare la velocità di propagazione del fronte d'onda.

In questo capitolo noi ci occuperemo della propagazione nei solidi elastici lineari delle onde piane progressive, che come vedremo, rientrano nella definizione 1.

## 11.2 Tensore acustico di un solido elastico lineare.

Introduciamo la definizione di tensore acustico.

**Definizione 11.3.** *Sia dato un solido elastico lineare il cui tensore elastico sia  $\tilde{c} = \tilde{c}(P_0)$ . Per ogni  $P_0 \in S_0$  e per ogni versore  $\vec{m}$ , definiamo tensore acustico del solido elastico relativo al punto  $P_0$  ed al versore  $\vec{m}$  il tensore del secondo ordine, denotato con  $\tilde{A}(P_0, \vec{m})$ , le cui componenti in una qualsiasi base ortonormale sono date da:*

$$A_{ir}(P_0, \vec{m}) = \frac{1}{\rho_0(P_0)} c_{ijrs}(P_0) m_j m_s,$$

dove  $\rho_0 = \rho_0(P_0)$  è la densità di massa del solido elastico nella configurazione di riferimento.

Nel seguito supponiamo di fare riferimento ad un punto  $P_0$  fissato ed ometteremo la dipendenza da  $P_0$  nei vari campi che interverranno nel nostro studio.

Stabiliamo alcune proprietà del tensore acustico correlate a proprietà del tensore elastico.

**Teorema 11.1.** *Dato un solido elastico lineare avente come tensore elastico  $\tilde{c}$ , si ha:*

(a)  $\tilde{A}(\vec{m})$  è simmetrico  $\forall \vec{m} \iff \tilde{c}$  gode della simmetria maggiore;

(b)  $\tilde{A}(\vec{m})$  è definito positivo  $\forall \vec{m} \iff \tilde{c}$  è fortemente ellittico;

(c)  $\tilde{c}$  definito positivo  $\implies \tilde{A}(\vec{m})$  definito positivo  $\forall \vec{m}$ .



Dimostrazione

Dimostriamo (a).

Ipotesi:  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore

Tesi:  $\tilde{A}(\vec{m})$  è simmetrico  $\forall \vec{m}$ .

Per definizione di tensore acustico le sue componenti sono date da:

$$A_{ir}(\vec{m}) = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s = \frac{1}{\rho_0} c_{rsij} m_s m_j = A_{ri}(\vec{m}) \quad \forall \vec{m}.$$

Dunque abbiamo ottenuto la tesi.

Ora invertiamo ipotesi e tesi.

Ipotesi:  $\tilde{A}(\vec{m})$  è simmetrico  $\forall \vec{m}$

Tesi:  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore.

Allora per ipotesi

$$A_{ir}(\vec{m}) = A_{ri}(\vec{m}) \quad \forall \vec{m},$$

da cui  $\forall \vec{m}$ :

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}. \quad (11.2.1)$$

Tenendo presente la definizione di tensore acustico e moltiplicando entrambi i membri per  $\rho_0$ , la (11.2.1) fornisce

$$c_{ijrs} a_i m_j b_r m_s = c_{ijrs} b_i m_j a_r m_s = c_{rsij} b_r m_s a_i m_j \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{m},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo denotato gli indici saturati  $i, j$  con  $r, s$  e viceversa gli indici saturati  $r, s$  con  $i, j$ .

Dalla relazione scritta sopra deduciamo:

$$(c_{ijrs} - c_{rsij}) a_i m_j b_r m_s = 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{m}.$$

Grazie all'arbitrarietà di  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$  ed alle simmetrie minori di cui gode  $\tilde{c}$ , possiamo concludere che  $c_{ijrs} = c_{rsij}$ .

Perciò la (a) è provata.

Dimostriamo (b)

Ipotesi:  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico

Tesi:  $\tilde{A}(\vec{m})$  è definito positivo  $\forall \vec{m}$

Per ipotesi si ha

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) > 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Noi vogliamo provare che

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} > 0 \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}.$$

Preso il vettore  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , consideriamo:

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = A_{ir}(\vec{m}) a_i a_r = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} a_i m_j a_r m_s.$$

D'altra parte,  $a_i m_j$  e  $a_r m_s$  sono le componenti di indici  $i, j$  e  $r, s$  rispettivamente del tensore doppio  $\vec{a} \otimes \vec{m}$ , per cui otteniamo:

$$\vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{\rho_0} (\vec{a} \otimes \vec{m}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{m}) > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Perciò la tesi è dimostrata.

Scambiamo tesi ed ipotesi

Ipotesi:  $\tilde{A}(\vec{m})$  è definito positivo  $\forall \vec{m}$

Tesi:  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico.

Siano  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . Allora

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = c_{ijrs} a_i b_j a_r b_s = |\vec{b}|^2 \rho_0 \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} a_i \frac{b_j}{|\vec{b}|} a_r \frac{b_s}{|\vec{b}|}.$$

Posto  $\vec{m} = \text{vers} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ , la relazione precedente assume la forma:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \tilde{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = \rho_0 |\vec{b}|^2 A_{ir}(\vec{m}) a_i a_r = \rho_0 |\vec{b}|^2 \vec{a} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} > 0,$$

essendo  $\tilde{A}(\vec{m})$  definito positivo. Dunque anche (b) è stata dimostrata.

La dimostrazione di (c) è immediata, poiché se  $\tilde{c}$  è definito positivo è anche fortemente ellittico e dunque  $\tilde{A}$  è definito positivo  $\forall \vec{m}$ .

Il teorema è dunque dimostrato in maniera completa.

### 11.3 Autovalori ed autovettori di un tensore di ordine due simmetrico.

Ricordiamo la definizione di autovalori e autovettori di un tensore doppio  $\tilde{t}$  ed alcune loro proprietà stabilite nel Capitolo 4.

**Definizione 11.4.** Diciamo che  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un autovalore per il tensore doppio  $\tilde{t}$  se esiste un vettore  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tale che

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Il vettore  $\vec{u}$  è detto autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .

Fissata la base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ , sia  $[t_{ij}]$  la matrice  $3 \times 3$  delle componenti del tensore  $\tilde{t}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ .

Ovviamente

$$\tilde{t} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \iff t_{ij} u_j = \lambda u_i.$$

Ne discende la seguente

**Proposizione 11.1.** *Dato il tensore doppio  $\tilde{t}$ ,  $\lambda$  è un autovalore per  $\tilde{t}$  se e solo se è un autovalore per la matrice  $[t_{ij}]$  delle componenti del tensore rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$  e  $\vec{u}$  è un autovettore del tensore  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$  se e solo se la terna  $(u_1, u_2, u_3)$  delle componenti di  $\vec{u}$  rispetto ad  $(\vec{e}_i)$  è un autovettore della matrice  $[t_{ij}]$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .*

Dunque la ricerca degli autovalori e degli autovettori di un tensore doppio è ricondotta alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice  $3 \times 3$  delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale fissata ed è possibile estendere ai tensori doppi tutte le proprietà valide per gli autovalori e gli autovettori delle matrici reali  $3 \times 3$ .

In particolare, sussistono le seguenti proposizioni.

**Proposizione 11.2.** *Se  $\tilde{t}$  è un tensore doppio cui è associata la matrice  $[t_{ij}]$  delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , condizione necessaria e sufficiente affinché  $\lambda$  sia un suo autovalore è che sia soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado:*

$$\det[t_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0. \quad (11.3.1)$$

Si noti che l'equazione (11.3.1) implica:

$$\det(\tilde{t} - \lambda \tilde{a}) = 0$$

e viceversa.

**Proposizione 11.3.** *Se  $\lambda$  è un autovalore del tensore doppio  $\tilde{t}$ , l'insieme di tutti gli autovettori di  $\tilde{t}$  corrispondenti a  $\lambda$ , incluso il vettore nullo, è un sottospazio di  $\vec{\mathcal{E}}$ , detto **autospazio di  $\tilde{t}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$** . Se poi il tensore doppio è simmetrico, la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda$  coincide con la molteplicità algebrica di  $\lambda$  come radice dell'equazione (11.3.1).*

**Proposizione 11.4.** *Gli autovettori di un tensore doppio simmetrico corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Ci proponiamo ora di stabilire un teorema che ci sarà molto utile nel seguito.

**Teorema 11.2. Teorema di decomposizione spettrale per un tensore doppio simmetrico.**

Sia  $\tilde{S}$  un tensore doppio simmetrico. Allora  $\tilde{S}$  ammette tre autovalori (reali):  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e in corrispondenza di questi è possibile trovare una base ortonormale  $(\vec{e}_h)$  tale che sussistano le due relazioni seguenti:

$$(a) \quad \tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3 \quad (\text{non c'è somma sull'indice } h)$$

$$(b) \quad \tilde{S} = \sum_{h=1}^3 \lambda_h \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h.$$

La (b) è detta decomposizione spettrale per il tensore  $\tilde{S}$ .

Viceversa se il tensore simmetrico  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione (b) e  $(\vec{e}_h)$  è una base ortonormale, allora  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono i tre autovalori di  $\tilde{S}$  e il versore  $\vec{e}_h$  è autovettore di  $\tilde{S}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_h$ , per  $h = 1, 2, 3$ .

Inoltre

1) Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , allora l'autospazio associato a ciascun autovalore ha dimensione 1.

2) Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ , allora si ha

$$(c) \quad \tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 (\tilde{a} - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)$$

dove  $\vec{e}_1$  è un versore autovettore di  $\tilde{S}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_1$ .

Viceversa, se il tensore simmetrico  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione (c) e  $(\vec{e}_1)$  è un versore, allora  $\tilde{S}$  ha gli autovalori  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$  e  $\vec{e}_1$  è autovettore di  $\tilde{S}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_1$ .

Inoltre la dimensione dell'autospazio associato a  $\lambda_1$  è 1, mentre la dimensione dell'autospazio associato a  $\lambda_2 = \lambda_3$  è 2 e tale autospazio è il complemento ortogonale dell'autospazio associato a  $\lambda_1$ .

3) Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , allora si ha

$$(d) \quad \tilde{S} = \lambda_1 \tilde{a}.$$

Viceversa, se  $\tilde{S}$  è esprimibile nella forma (d), allora ammette tre autovalori coincidenti  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  e l'autospazio associato è lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Dimostrazione Dimostriamo dapprima (a) e (b).

Osserviamo in primo luogo che, essendo  $\tilde{S}$  simmetrico, fissata una base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , la matrice  $[S_{ij}]$  delle sue componenti è reale e simmetrica e quindi

ammette tre autovalori reali:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Perciò, grazie alla relazione tra tensori doppi e matrici, anche  $\tilde{S}$  possiede gli stessi autovalori.

Inoltre, per noti risultati di algebra lineare, è possibile trovare una base ortonormale  $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\bar{E}_h$  è autovettore della matrice  $[S_{ij}]$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_h$  per  $h = 1, 2, 3$ .

Se denotiamo con  $\mathbb{A}$  la matrice di passaggio dalla base canonica  $(E_1, E_2, E_3)$  alla base  $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ , ossia la matrice delle componenti canoniche dei tre versori della base  $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ , si ha che la matrice

$$[\bar{S}_{hk}] = \mathbb{A}^{-1} [S_{ij}] \mathbb{A}$$

è diagonale e gli elementi della sua diagonale principale coincidono con i tre autovalori della matrice  $[S_{ij}]$ .

Dunque

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

Se ora prendiamo in considerazione il tensore  $\tilde{S}$  e consideriamo in  $\vec{\mathcal{E}}$ , accanto alla base ortonormale  $(\vec{e}_i)$ , la base  $(\vec{e}_h)$  avente  $\mathbb{A}$  come matrice rispetto alla base  $(\vec{e}_i)$ , tale base risulta ortonormale poiché la matrice  $\mathbb{A}$  è ortogonale.

Inoltre, per la proposizione 11.1, il versore  $\vec{e}_h$  è autovettore di  $\tilde{S}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_h$  per  $h = 1, 2, 3$  e dunque sussiste la (a):

$$\tilde{S} \cdot \vec{e}_h = \lambda_h \vec{e}_h \quad h = 1, 2, 3.$$

Per provare che  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione (b), cominciamo con osservare che la matrice diagonale  $[\bar{S}_{hk}]$  è la matrice delle componenti di  $\tilde{S}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$ , come si vede subito tenendo presente come muta al variare della base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$  la matrice delle componenti di un tensore doppio. Dunque le componenti di  $\tilde{S}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  sono date da:

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

D'altra parte, poiché  $(\vec{e}_h)$  è una base per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ , a tale base è associata la base  $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$  per lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}}$ , cioè per lo spazio vettoriale dei tensori doppi. Perciò potremo decomporre  $\tilde{S}$  rispetto a tale base e, per definizione di componenti di un tensore doppio rispetto ad una base ortonormale di  $\vec{\mathcal{E}}$ , la successione  $(\bar{S}_{hk})$  rappresenta proprio la successione delle componenti di  $\tilde{S}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$ .

Avremo allora:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sum_{h,k=1}^3 \bar{S}_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k \\ &= \sum_{h,k=1}^3 \lambda_h \delta_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k \\ &= \sum_{h=1}^3 \lambda_h \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h,\end{aligned}$$

che è appunto la decomposizione spettrale (b).

Dimostriamo ora il viceversa. Per ipotesi, il tensore doppio simmetrico  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione (b) dove  $(\vec{e}_h)$  è una base ortonormale per  $\vec{\mathcal{E}}$ . Dobbiamo provare che  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono i tre autovalori del tensore e che il versore  $\vec{e}_h$  è un autovettore di  $\tilde{S}$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_h$  per  $h = 1, 2, 3$ , ossia dobbiamo dimostrare che sussistono le (a).

Per quanto osservato nella prima parte della dimostrazione, da (b) discende che le componenti  $\bar{S}_{hk}$  di  $\tilde{S}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  sono date da

$$\bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3.$$

Ora scriviamo la  $k$ -esima componente rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  del primo membro delle (a):

$$(\tilde{S} \cdot \vec{e}_h)_k = \sum_{l=1}^3 \bar{S}_{kl} \delta_{hl}$$

dove abbiamo tenuto presente che la componente  $l$ -esima del versore  $\vec{e}_h$  rispetto alla base ortonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , cioè  $\vec{e}_h \cdot \vec{e}_l$ , è data da  $\delta_{hl}$ .

Allora al secondo membro della relazione scritta sopra, la somma su  $l$  si riduce al solo termine in cui  $l = h$  e perciò otteniamo=

$$(\tilde{S} \cdot \vec{e}_h)_k = \bar{S}_{kh} = \bar{S}_{hk} = \lambda_h \delta_{hk} = \lambda_h \vec{e}_h \cdot \vec{e}_k.$$

Dunque i due vettori  $\tilde{S} \cdot \vec{e}_h$  e  $\lambda_h \vec{e}_h$  hanno uguali le componenti rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  e quindi sono uguali.

Dimostriamo ora la 1). E' un'immediata conseguenza della proposizione 11.3. Infatti, se i tre autovalori di  $\tilde{S}$  sono distinti, ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1 e dunque l'autospazio associato ha dimensione 1. Si noti che il versore  $\vec{e}_h$  facente parte della base ortonormale che compare nella decomposizione spettrale è una base per l'autospazio associato all'autovalore  $\lambda_h$  per  $h = 1, 2, 3$ .

Proviamo il punto 2).

Supponiamo dapprima che dei tre autovalori di  $\tilde{S}$ , due siano coincidenti, ossia si abbia:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3.$$

Facciamo vedere che  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione (c).

A tal fine scriviamo la (b), tenendo presente l'ipotesi sugli autovalori:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 \left( \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right) \\ &= \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 \left( \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \right). \end{aligned}$$

D'altra parte, se teniamo presente che il tensore fondamentale rispetto alla base  $(\vec{e}_h)$  ha come componenti i simboli di Kronecker  $\delta_{hk}$ , è evidente che se decomponiamo  $\tilde{a}$  rispetto alla base  $(\vec{e}_h \otimes \vec{e}_k)$ , otteniamo

$$\tilde{a} = \sum_{h,k=1}^3 \delta_{hk} \vec{e}_h \otimes \vec{e}_k = \sum_{h=1}^3 \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h.$$

Allora possiamo scrivere

$$\tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 \left( \tilde{a} - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \right)$$

che è appunto la decomposizione (c).

Viceversa ora supponiamo che il tensore  $\tilde{S}$  sia esprimibile mediante la relazione (c) dove  $\vec{e}_1$  è un versore. Possiamo sempre trovare una base ortonormale  $(\vec{e}_h)$  di  $\mathcal{E}$  avente come primo versore  $\vec{e}_1$ . Andiamo a decomporre  $\tilde{a}$  rispetto a tale base e sostituiamo nella (c) tale decomposizione. Otteniamo allora:

$$\tilde{S} = \lambda_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \lambda_2 \left( \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right).$$

Ma allora  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione spettrale (b) con  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Dunque  $\tilde{S}$  ha i suoi tre autovalori dati da  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$  e il versore  $\vec{e}_1$  è un autovettore corrispondente all'autovalore  $\lambda_1$ .

Inoltre, poichè  $\lambda_1$  ha molteplicità algebrica 1, l'autospazio associato ha dimensione 1, mentre all'autovalore  $\lambda_2 = \lambda_3$  che ha molteplicità algebrica pari a 2, è associato un autospazio di dimensione 2. Tale autospazio è il complemento ortogonale di quello associato a  $\lambda_1$  perché i vettori appartenenti a tale sottospazio sono tutti ortogonali ad ogni vettore dell'altro autospazio.

Infine dimostriamo il punto 3).

Supponiamo dapprima che i tre autovalori di  $\tilde{S}$  siano coincidenti, ossia si abbia:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Facciamo vedere che  $\tilde{S}$  ha la forma (d).

A tal fine scriviamo la (b), tenendo presente l'ipotesi sugli autovalori:

$$\tilde{S} = \lambda_1 \left( \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right) = \lambda_1 \tilde{a}$$

che è appunto la (d).

Viceversa, se vale la (d), presa una qualsiasi base ortonormale  $(\vec{e}_h)$ , possiamo scrivere:

$$\tilde{S} = \sum_{h=1}^3 \lambda_1 \vec{e}_h \otimes \vec{e}_h$$

e dunque  $\tilde{S}$  ammette la decomposizione spettrale (b) con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  per cui ha tre autovalori coincidenti. Infine, poiché i tre autovalori di  $\tilde{S}$  sono coincidenti,  $\lambda_1$  ha molteplicità 3 e quindi l'autospazio associato ha dimensione 3. Ma allora l'autospazio è  $\vec{\mathcal{E}}$ , poichè l'unico sottospazio di  $\vec{\mathcal{E}}$  che ha dimensione 3 è lo spazio vettoriale stesso.

Il teorema di decomposizione spettrale è stato provato in maniera completa.

Dimostriamo ora una proposizione che ci sarà utile nel seguito.

**Proposizione 11.5.** *Sia  $\tilde{S}$  un tensore doppio simmetrico e definito positivo. Allora i suoi tre autovalori sono positivi.*

Dimostrazione

Sia  $\lambda$  un autovalore del tensore doppio simmetrico e definito positivo  $\tilde{S}$  e sia  $\vec{u}$  un autovettore corrispondente per cui:

$$\tilde{S} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Poiché, per definizione di autovettore,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , e per ipotesi il tensore è definito positivo, avremo:

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} > 0.$$

D'altra parte:

$$\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u} = \lambda |\vec{u}|^2 \implies \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} > 0,$$



come ci proponevamo di dimostrare.

Concludiamo il paragrafo stabilendo un importante risultato per il tensore acustico di un solido elastico lineare ed isotropo conseguenza del teorema di decomposizione spettrale.

Sia dato un solido elastico lineare ed isotropo. Come abbiamo visto, il suo tensore elastico ha le componenti della forma:

$$c_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}).$$

Allora  $\forall$  versore  $\vec{m}$  il tensore acustico  $\tilde{A}(\vec{m})$  ha le componenti date da:

$$\begin{aligned} A_{ir}(\vec{m}) &= \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s = \frac{1}{\rho_0} [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})] m_j m_s \\ &= \frac{1}{\rho_0} [\lambda m_i m_r + \mu (m_j m_j \delta_{ir} + m_i m_r)] \\ &= \frac{1}{\rho_0} [(\lambda + \mu) m_i m_r + \mu \delta_{ir}]. \end{aligned}$$

Dunque per un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ , il tensore acustico relativo al versore  $\vec{m}$  è dato da:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} \tilde{a} \quad \forall \text{ versore } \vec{m}. \quad (11.3.2)$$

Ora osserviamo che il tensore acustico  $\tilde{A}(\vec{m})$  risulta simmetrico  $\forall$  versore  $\vec{m}$ , come si vede dalla (11.3.2) e come d'altronde deve essere perché  $\tilde{c}$  nel caso di un solido isotropo gode della simmetria maggiore.

Se al secondo membro della (11.3.2) aggiungiamo e togliamo il termine:

$$\frac{\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m},$$

questa assume la forma:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} (\tilde{a} - \vec{m} \otimes \vec{m}) \quad \forall \text{ versore } \vec{m}. \quad (11.3.3)$$

Ma la (11.3.3) rappresenta la decomposizione spettrale del tensore doppio simmetrico  $\tilde{A}(\vec{m})$ .

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione

**Proposizione 11.6.** *Dato un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ , il suo tensore acustico ammette la decomposizione spettrale (11.3.3)*

$\forall$  versore  $\vec{m}$ . Allora se  $\lambda \neq -\mu$ ,  $\tilde{A}(\vec{m}) \forall$  versore  $\vec{m}$  ammette due autovalori:  $\lambda_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  che è autovalore semplice e  $\lambda_2 = \frac{\mu}{\rho_0}$  che è autovalore doppio. L'autospazio associato a  $\lambda_1$ , di dimensione 1, ha come base il versore  $\vec{m}$  e l'autospazio associato a  $\lambda_2$ , di dimensione 2, è il complemento ortogonale di quello associato a  $\lambda_1$ .

**Osservazione 11.1.** Se per un solido elastico lineare ed isotropo con moduli di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ , si ha  $\lambda = -\mu$ , il tensore acustico per ogni versore  $\vec{m}$  ammette un unico autovalore triplo dato da  $\frac{\mu}{\rho_0}$  e il corrispondente autospazio è  $\vec{\mathcal{E}}$ .

## 11.4 Onde piane progressive.

Prima di tutto diamo la definizione di onda piana progressiva.

**Definizione 11.5.** Chiamiamo onda piana progressiva un campo vettoriale  $\vec{u}$  definito in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  nel modo seguente:

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$$

dove  $\psi = \psi(s)$  è una funzione a valori reali definita su  $\mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  tale che  $\frac{d^2\psi}{ds^2}$  non sia identicamente nulla,  $\vec{m}$  e  $\vec{a}$  sono due versori,  $O$  è un punto fissato dello spazio geometrico,  $V$  è una costante positiva.

La direzione orientata di versore  $\vec{m}$  è detta direzione di propagazione dell'onda, la direzione orientata di versore  $\vec{a}$  è detta direzione di moto dell'onda e la costante positiva  $V$  è la velocità di propagazione dell'onda.

Diamo ora la definizione di onda piana progressiva longitudinale e trasversale.

**Definizione 11.6.** Data l'onda piana progressiva

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a},$$

diciamo che è un'onda longitudinale se i due versori  $\vec{m}$  e  $\vec{a}$  sono paralleli, ossia se  $\vec{m} = \vec{a}$  o  $\vec{m} = -\vec{a}$ .

Diciamo che è un'onda trasversale se i due versori  $\vec{m}$  e  $\vec{a}$  sono ortogonali, ossia se  $\vec{m} \cdot \vec{a} = 0$ .

Ci proponiamo ora di dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 11.7.** Ogni onda piana progressiva con velocità di propagazione  $V$  è soluzione in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  dell'equazione vettoriale delle onde omogenea:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \Delta \vec{u} = \vec{0}. \quad (11.4.1)$$

Dimostrazione

Data l'onda piana progressiva

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a},$$

consideriamone le componenti della rappresentazione analitica nel riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$ :

$$u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \psi \left( \sum_{h=1}^3 x_{0h} m_h - V t \right) a_i$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate cartesiane di un generico punto  $P_0$ .

Osserviamo che, essendo  $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , per il teorema di derivazione delle funzioni composte, il campo  $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{E} \times \mathbb{R})$ .

Se deriviamo  $\vec{u}$  rispetto al tempo, otteniamo

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(P_0, t) = -V \frac{d}{ds} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a}$$

che, avendo posto:

$$\psi'(P_0, t) = \left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{s=(P_0-O) \cdot \vec{m} - V t} = \frac{d}{ds} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t),$$

si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(P_0, t) = -V \psi'(P_0, t) \vec{a}. \quad (11.4.2)$$

Derivando ulteriormente rispetto al tempo e ponendo:

$$\psi''(P_0, t) = \left. \frac{d^2\psi}{ds^2} \right|_{s=(P_0-O) \cdot \vec{m} - V t} = \frac{d^2}{ds^2} \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t),$$

dalla (11.4.2) deduciamo

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(P_0, t) = V^2 \psi''(P_0, t) \vec{a}. \quad (11.4.3)$$

Procuriamoci ora le componenti di  $\text{grad}_0 \vec{u}$ :

$$u_{i,j}(P_0, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) = \frac{d}{ds} \psi \left( \sum_{h=1}^3 x_{0h} m_h - V t \right) m_j a_i.$$

Con la posizione fatta sopra, tale relazione si può scrivere nella forma

$$u_{i,j}(P_0, t) = \psi'(P_0, t) a_i m_j. \quad (11.4.4)$$

Notiamo che dall'espressione (11.4.4) delle componenti del gradiente, si deduce:

$$\text{grad}_0 \vec{u}(P_0, t) = \psi'(P_0, t) \vec{a} \otimes \vec{m} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

D'altra parte

$$\Delta u_i(P_0, t) = u_{i,jj}(P_0, t) = \psi''(P_0, t) a_i m_j m_j = \psi''(P_0, t) a_i,$$

da cui

$$\Delta \vec{u}(P_0, t) = \psi''(P_0, t) \vec{a}. \quad (11.4.5)$$

Se sostituiamo la (11.4.3) e la (11.4.3) al primo membro della (11.4.1), otteniamo

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \Delta \vec{u} = \frac{1}{V^2} V^2 \psi'' \vec{a} - \psi'' \vec{a} = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R},$$

come volevamo dimostrare.

Dunque un'onda piana progressiva è un'onda nella sua accezione più restrittiva.

Stabiliamo ora la condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia longitudinale o trasversale.

**Teorema 11.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia longitudinale è che sia irrotazionale in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ , ossia che*

$$\text{rot}_0 \vec{u}(P_0, t) = \vec{0} \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

*Condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva sia trasversale è che sia solenoidale in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ , ossia che*

$$\text{div}_0 \vec{u}(P_0, t) = 0 \quad \forall (P_0, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

#### Dimostrazione

Consideriamo l'onda piana progressiva

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - V t) \vec{a}.$$

Dimostriamo la prima parte del teorema relativa alle onde longitudinali.

A tal fine procuriamoci le componenti del rotore del campo vettoriale  $\vec{u}$  sfruttando le (11.4.4):

$$(\text{rot}_0 \vec{u})_i = \vartheta_{ijr} u_{r,j} = \psi' \vartheta_{ijr} m_j a_r = \psi' (\vec{m} \times \vec{a})_i$$

da cui in forma vettoriale

$$\operatorname{rot}_0 \vec{u} = \psi' \vec{m} \times \vec{a}. \quad (11.4.6)$$

Se teniamo presente che  $\frac{d\psi}{ds}$  e quindi  $\psi'$  non è identicamente nulla poiché per ipotesi non lo è  $\frac{d^2\psi}{ds^2}$ , dalla (11.4.6), concludiamo che  $\vec{u}$  è un'onda longitudinale se e solo se

$$\operatorname{rot}_0 \vec{u} = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, procuriamoci la divergenza di  $\vec{u}$ , sempre sfruttando le (11.4.4):

$$\operatorname{div}_0 \vec{u} = u_{i,i} = \psi' a_i m_i = \psi' \vec{a} \cdot \vec{m}. \quad (11.4.7)$$

Per l'osservazione precedente relativa a  $\psi'$ , dalla (11.4.7), concludiamo che  $\vec{u}$  è un'onda trasversale se e solo se

$$\operatorname{div}_0 \vec{u} = 0 \quad \text{in } \mathcal{E} \times \mathbb{R}.$$

A questo punto vediamo di spiegare il motivo per cui l'onda da noi considerata è detta "piana progressiva".

Fissato l'istante  $t$ , ed il numero reale  $\alpha$ , consideriamo il piano

$$\Pi_t = \{P_0 \in \mathcal{E} : (P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt = \alpha\}.$$

Come è facile verificare,  $\Pi_t$  è il piano normale al versore  $\vec{m}$  passante per il punto  $P_{0,t}^*$  tale che  $P_{0,t}^* - O = (Vt + \alpha)\vec{m}$ .

Infatti si vede subito che  $P_{0,t}^* \in \Pi_t$  e dunque potremo scrivere:

$$\Pi_t = \{P_0 \in \mathcal{E} : (P_0 - P_{0,t}^*) \cdot \vec{m} = 0\}.$$

Data l'onda piana

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a},$$

se all'istante  $t$  fissato ne consideriamo la restrizione al piano  $\Pi_t$ , abbiamo:

$$\vec{u}(\cdot, t)|_{\Pi_t} = \psi(\alpha) \vec{a}$$

cioè  $\vec{u}$  all'istante  $t$  è costante nei punti di  $\Pi_t$ .

Se facciamo variare  $t$  in  $(-\infty, +\infty)$ , otteniamo la famiglia di piani paralleli

$$\{\Pi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

e istante per istante  $\vec{u}$  assume lo stesso valore  $\psi(\alpha) \vec{a}$  nei punti del piano appartenente alla famiglia relativo a tale istante.

Ciò spiega perchè  $\vec{u}$  è detto onda "piana".

D'altra parte, al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ , la famiglia di piani  $\{\Pi_t\}$  può essere riguardata come un unico piano rigido che si muove nello spazio;  $\Pi_t$  viene allora a rappresentare la posizione occupata da tale piano all'istante  $t$ .

Si può vedere facilmente che il piano si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di  $\vec{m}$  con velocità di modulo  $V$ .

Infatti, fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale  $Ox_1x_2x_3$  con l'asse  $Ox_3$  parallelo al versore  $\vec{m}$  e con lo stesso verso. All'istante  $t$  l'equazione cartesiana del piano  $\Pi_t$  è allora:

$$x_{03} = Vt + \alpha.$$

Consideriamo un qualsiasi punto  $\bar{P}_0$  rigidamente solidale al piano e denotiamo con  $(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \bar{x}_{03})$  la terna delle sue coordinate cartesiane. Al variare di  $t$ , mentre le prime sue due coordinate assumono sempre lo stesso valore, la terza varia con la seguente legge temporale:

$$\bar{x}_{03}(t) = Vt + \alpha.$$

Dunque ogni punto solidale al piano si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione e nel verso dell'asse  $Ox_3$ , ossia di  $\vec{m}$ , con velocità di modulo  $V$ . Perciò il piano si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di  $\vec{m}$  con velocità di modulo  $V$ .

Allora  $\vec{u}$  è detto onda piana progressiva perchè assume valore costante nei punti dei piani normali a  $\vec{m}$  che si muovono di moto traslatorio rettilineo ed uniforme nella direzione e nel verso di  $\vec{m}$  con velocità di modulo  $V$ .

## 11.5 Onde piane progressive elastiche.

Consideriamo un solido elastico lineare ed omogeneo: perciò la sua densità di massa  $\rho_0$  nella configurazione naturale, presa come configurazione di riferimento, è una costante positiva ed analogamente il suo tensore elastico  $\tilde{c}$  è costante. Assumiamo che tale solido occupi tutto lo spazio.

**Definizione 11.7.** *Un'onda piana progressiva  $\vec{u} = \vec{u}(P_0, t)$  è detta elastica per il solido elastico considerato se  $\vec{u}$  soddisfa in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$  l'equazione dell'elastodinamica lineare, espressa in termini di solo spostamento, per il solido in assenza di forze di massa, ossia se*

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \text{div}_0 (\tilde{c} \cdot \text{grad}_0 \vec{u}) \quad (11.5.1)$$

dove  $\rho_0$  e  $\tilde{c}$  sono costanti.

Se  $\vec{u}$  è un'onda piana progressiva elastica per un solido elastico lineare soddisfacente le ipotesi prima enunciate, diremo anche che  $\vec{u}$  è un'onda piana progressiva elastica che si propaga nel solido.

Ci proponiamo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinché un'onda piana progressiva si propaghi in un solido elastico lineare.

A tal fine scriviamo in componenti la (11.5.1):

$$\rho_0 \ddot{u}_i = c_{ijrs} u_{r,sj}. \quad (11.5.2)$$

Sia data l'onda piana progressiva:

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a}.$$

Per quanto visto in precedenza, abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= -V \psi' a_i \implies \ddot{u}_i = V^2 \psi'' a_i \\ u_{r,s} &= \psi' a_r m_s \implies u_{r,sj} = \psi'' a_r m_s m_j. \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

Per definizione di onda elastica, l'onda piana progressiva considerata è elastica per il solido elastico se e solo se le sue componenti soddisfano le (11.5.2) in  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ . Sostituendo le (11.5.3) in (11.5.2) e dividendo entrambi i membri per  $\rho_0$ , deduciamo:

$$V^2 \psi'' a_i = \frac{1}{\rho_0} \psi'' c_{ijrs} m_j m_s a_r \iff V^2 a_i = \frac{1}{\rho_0} c_{ijrs} m_j m_s a_r, \quad (11.5.4)$$

dove abbiamo sfruttato l'ipotesi  $\frac{d^2 \psi}{ds^2}$  non identicamente nulla.

D'altra parte, per definizione di tensore acustico, le (11.5.4) forniscono:

$$A_{ir}(\vec{m}) a_r = V^2 a_i \implies \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = V^2 \vec{a}.$$

Abbiamo così ottenuto il seguente teorema

**Teorema 11.4.** *Dato un solido elastico lineare ed omogeneo, condizione necessaria e sufficiente affinché l'onda piana progressiva:*

$$\vec{u}(P_0, t) = \psi((P_0 - O) \cdot \vec{m} - Vt) \vec{a}$$

*sia elastica per tale solido è che sia soddisfatta la condizione:*

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{a} = V^2 \vec{a}, \quad (11.5.5)$$

*detta condizione di Fresnel-Hadamard.*

La condizione di Fresnel-Hadamard ci dice che un'onda piana progressiva avente velocità di propagazione  $V$ , direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$  e direzione di moto di versore  $\vec{a}$  può propagarsi in un solido elastico lineare ed omogeneo se e solo se  $V^2$  è un autovalore del tensore acustico del solido relativo al versore  $\vec{m}$  e  $\vec{a}$  è un autovettore ad esso corrispondente.

Grazie alla condizione di Fresnel-Hadamard, è possibile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 11.5.** *Sia dato un solido elastico lineare ed omogeneo il cui tensore elastico soddisfi alle due condizioni seguenti:*

1) *gode della simmetria maggiore*

2) *è fortemente ellittico.*

*Allora, fissato ad arbitrio il versore  $\vec{m}$ , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche che possono propagarsi nel solido aventi direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$ .*

Dimostrazione

Per le proprietà di cui gode  $\tilde{c}$ , qualunque sia  $\vec{m}$ , il tensore acustico  $\tilde{A}(\vec{m})$  è simmetrico e definito positivo e quindi ammette tre autovalori reali che sono positivi. Per il teorema di decomposizione spettrale, in corrispondenza dei tre autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , è possibile trovare una base ortonormale  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  costituita da autovettori. Dunque, fissato ad arbitrio  $\vec{m}$ , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche, precisamente le tre onde progressive aventi direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$ , direzione di moto rispettivamente di versore  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  e velocità di propagazione rispettivamente  $V_1 = \sqrt{\lambda_1}, V_2 = \sqrt{\lambda_2}, V_3 = \sqrt{\lambda_3}$ .

Supponiamo ora di avere un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo. In tal caso il tensore elastico gode della simmetria maggiore. Aggiungiamo l'ipotesi che  $\tilde{c}$  sia fortemente ellittico per cui le costanti di Lamè  $\lambda$  e  $\mu$  soddisfano alle due disuguaglianze:

$$\lambda + 2\mu > 0 \quad \mu > 0.$$

Dimostriamo la seguente proposizione

**Proposizione 11.8.** *Dato un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo tale che*

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0 \quad \lambda \neq -\mu,$$

*un'onda piana progressiva con velocità di propagazione  $V$ , qualunque sia la sua direzione di propagazione, è elastica per il solido se e solo se  $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  e*

*l'onda è longitudinale oppure  $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$  e l'onda è trasversale.*



Dimostrazione

Come abbiamo visto, qualunque sia il versore  $\vec{m}$ , il tensore acustico ammette la seguente decomposizione:

$$\tilde{A}(\vec{m}) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \vec{m} \otimes \vec{m} + \frac{\mu}{\rho_0} (\tilde{a} - \vec{m} \otimes \vec{m}).$$

Nell'ipotesi della proposizione, qualunque sia il versore  $\vec{m}$ ,  $\tilde{A}(\vec{m})$  ha due autovalori distinti e positivi:  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  che ha molteplicità 1 e  $\frac{\mu}{\rho_0}$  che ha molteplicità 2. L'autospazio associato al primo autovalore ha dimensione 1 ed ha come base  $\vec{m}$ , mentre l'autospazio associato al secondo ha molteplicità 2 ed è il complemento ortogonale dell'altro autospazio, per cui ogni autovettore corrispondente a  $\frac{\mu}{\rho_0}$  è ortogonale a  $\vec{m}$ .

Sia data un'onda piana progressiva elastica con direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$ ; per la condizione di Fresnel-Hadamard tale onda dovrà necessariamente avere  $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  o  $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ .

Nel primo caso, sempre per la condizione di Fresnel-Hadamard, il versore  $\vec{a}$  della direzione di moto è un autovettore di  $\tilde{A}(\vec{m})$  corrispondente all'autovalore  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  e dunque  $\vec{a} = \vec{m}$  o  $-\vec{m}$ . L'onda elastica è perciò longitudinale.

Nel secondo caso, cioè  $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ , il versore  $\vec{a}$  della direzione di moto è un autovettore del tensore acustico  $\tilde{A}(\vec{m})$  corrispondente a tale autovalore e dunque è ortogonale a  $\vec{m}$ . L'onda elastica è perciò in questo caso trasversale.

Viceversa, un'onda piana progressiva con direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$  che ha  $V^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  ed ha come versore della sua direzione di moto  $\vec{m}$  o  $-\vec{m}$  è elastica poiché soddisfa alla condizione di Fresnel-Hadamard ed è chiaramente longitudinale. Analogamente un'onda piana progressiva con direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$  che ha  $V^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$  ed ha come versore  $\vec{a}$  della sua direzione di moto un versore ortogonale a  $\vec{m}$  è elastica poiché soddisfa alla condizione di Fresnel-Hadamard ed è chiaramente trasversale.

La proposizione è così dimostrata.

Osserviamo, come conseguenza della proposizione 11.5, che le onde piane progressive che si propagano in un solido elastico lineare, omogeneo ed isotropo con  $\tilde{c}$  fortemente ellittico e  $\lambda \neq -\mu$  sono solo o longitudinali o trasversali.

A questo punto è naturale chiedersi se in un solido elastico lineare non isotropo si

possono propagare onde piane progressive longitudinali e trasversali. La risposta è affermativa e ci viene data dal teorema di Fedorov - Stippes.

**Teorema 11.6. Teorema di Fedorov - Stippes.** *In un solido elastico lineare ed omogeneo, non isotropo, il cui tensore elastico  $\tilde{c}$  gode della simmetria maggiore ed è fortemente ellittico, si possono propagare onde piane progressive elastiche longitudinali e trasversali.*

Dimostrazione

Come sappiamo, in un solido elastico lineare ed omogeneo soddisfacente alle ipotesi del teorema, fissato il versore  $\vec{m}$ , esistono almeno tre onde piane progressive elastiche che si possono propagare nel solido.

D'altra parte condizione sufficiente affinché esista un'onda piana progressiva longitudinale nel solido, per la condizione di Fresnel-Hadamard, è che esista un versore  $\vec{m}$  che sia un autovettore del tensore acustico relativo allo stesso versore  $\vec{m}$ , cioè tale che

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} = \lambda \vec{m} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (11.5.6)$$

Infatti l'onda piana progressiva che ha come direzione di propagazione di versore  $\vec{m}$ , velocità di propgazione tale che  $V^2 = \lambda$  e il versore  $\vec{a}$  della direzione di moto coincidente con il versore  $\vec{m}$  o con  $-\vec{m}$  è elastica ed è longitudinale.

Il nostro scopo è di far vedere che esiste almeno un versore  $\vec{m}$  per il quale vale la (11.5.6).

Poiché  $\tilde{c}$  è fortemente ellittico, il tensore acustico  $\tilde{A}(\vec{m})$  è definito positivo qualunque sia il versore  $\vec{m}$ , cioè

$$\forall \vec{b} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{b} > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Dunque

$$\vec{m} \cdot \tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} > 0 \quad \forall \vec{m}.$$

Ma allora ne discende:

$$\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} \neq \vec{0} \quad \forall \vec{m}.$$

Ora osserviamo che lo spazio vettoriale  $\vec{\mathcal{E}}$ , essendo normato, è anche uno spazio metrico. Se allora consideriamo il sottoinsieme di  $\vec{\mathcal{E}}$  costituito dai vettori unitari, cioè i versori, questo viene a rappresentare la superficie sferica di  $\vec{\mathcal{E}}$  che ha centro nel vettore nullo e raggio unitario:

$$\{\vec{m} \in \vec{\mathcal{E}} : |\vec{m}| = 1\} = \Sigma_1(\vec{0}).$$

Introduciamo l'applicazione

$$\vec{t} : \Sigma_1(\vec{0}) \longrightarrow \Sigma_1(\vec{0})$$

tale che

$$\forall \vec{m} \in \Sigma_1(\vec{0}) \quad \vec{l}(\vec{m}) = \frac{\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}}{|\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}|}.$$

L'applicazione  $\vec{l}$  è continua, poiché  $\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m} \neq 0 \quad \forall \vec{m}$ .  
Inoltre non esiste alcun versore  $\vec{m}$  tale che:  $\vec{l}(\vec{m}) = -\vec{m}$ .  
Infatti se esistesse un tale versore, dovremmo avere:

$$\vec{m} \cdot \vec{l}(\vec{m}) = -\vec{m} \cdot \vec{m} = -1,$$

il che è assurdo poiché

$$\vec{m} \cdot \vec{l}(\vec{m}) = \vec{m} \cdot \frac{\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}}{|\tilde{A}(\vec{m}) \cdot \vec{m}|} > 0,$$

essendo  $\tilde{A}(\vec{m})$  definito positivo.

Dunque l'applicazione  $\vec{l} : \Sigma_1(\vec{0}) \rightarrow \Sigma_1(\vec{0})$  è continua e non trasforma alcun punto della sfera unitaria nel suo antipodo. Allora ad  $\vec{l}$  è possibile applicare un teorema del punto fisso che ci consente di asserire che esiste un versore  $\vec{m}_1$  che è un punto fisso per  $\vec{l}$ , cioè è tale che  $\vec{l}(\vec{m}_1) = \vec{m}_1$ . Dunque esiste un versore  $\vec{m}_1$  tale che:

$$\frac{\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1}{|\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1|} = \vec{m}_1. \quad (11.5.7)$$

Se poniamo:

$$\lambda_1 = |\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1|,$$

la (11.5.7) si scrive nella forma:

$$\tilde{A}(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_1 = \lambda_1 \vec{m}_1.$$

Perciò esiste un versore  $\vec{m}_1$  che è un autovettore del tensore acustico relativo al versore stesso.

Quindi, se si considera l'onda piana progressiva che ha velocità di propagazione  $V_1$  tale che  $V_1^2 = \lambda_1$ , direzione di propagazione di versore  $\vec{m}_1$  e direzione di moto di versore  $\vec{m}_1$  o  $-\vec{m}_1$ , questa è un'onda elastica ed anche longitudinale.

Per quanto riguarda l'esistenza di onde trasversali, teniamo presente che  $\tilde{A}(\vec{m}_1)$ , essendo simmetrico e definito positivo, ammette tre autovalori positivi:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e che in corrispondenza di questi è possibile trovare una base ortonormale  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  con  $\vec{a}_1 = \vec{m}_1$  e  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$  autovettori corrispondenti agli autovalori  $\lambda_2, \lambda_3$ . Se consideriamo le due onde piane progressive che hanno

direzione di propagazione di versore  $\vec{m}_1$ , velocità di propagazione  $V_2, V_3$  tali che  $V_2^2 = \lambda_2, V_3^2 = \lambda_3$  e direzioni di moto di versori  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$  rispettivamente, queste, per la condizione di Fresnel-Hadamard, sono onde piane progressive elastiche ed anche trasversali.

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.