

# Fisica Matematica - II modulo

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2015/2016



# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sui fluidi viscosi classici</b>	<b>1</b>
1.1	Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici . . . . .	1
1.2	Problema del moto per un fluido viscoso classico . . . . .	5
1.3	Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido newtoniano incomprimibile . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Fluidi micropolari</b>	<b>19</b>
2.1	Premesse . . . . .	19
2.2	Grandezze cinetiche e forze agenti nei fluidi micropolari . . . . .	20
2.3	I e II equazione indefinita della meccanica per i fluidi micropolari	25
2.4	Assiomi della termodinamica per un fluido micropolare . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Fluidi micropolari viscosi lineari</b>	<b>37</b>
3.1	Equazioni costitutive per i fluidi micropolari viscosi lineari . . . . .	37
3.2	Equazione dell'energia per un fluido micropolare viscoso lineare .	41
3.3	Equazioni costitutive per un fluido micropolare viscoso lineare dal p.d.v. termodinamico . . . . .	43
3.4	Problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare . . .	46
<b>4</b>	<b>Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido micro- polare viscoso lineare incomprimibile</b>	<b>51</b>
4.1	Premesse . . . . .	51
4.2	Moto di Poiseuille per un fluido micropolare viscoso lineare in- comprimibile . . . . .	52
4.3	Moto di Poiseuille-Couette per un fluido micropolare viscoso lin- eare incomprimibile ed omogeneo . . . . .	65



# Capitolo 1

## Richiami sui fluidi viscosi classici

### 1.1 Equazioni costitutive dei fluidi viscosi classici

Il nostro scopo è quello di studiare una classe di fluidi, i *fluidi micropolari*, che si differenziano notevolmente dai fluidi viscosi classici.

La differenza sostanziale tra le due classi costitutive è rappresentata dal fatto che nei fluidi micropolari agiscono, oltre che forze di massa e forze di contatto, anche coppie sia di massa che di contatto, mentre nei fluidi classici possono agire solo forze e non coppie. I fluidi micropolari sono perciò *corpi continui polari* ed i fluidi classici *corpi continui non polari*.

La presenza di coppie ha come conseguenza la non simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy e la necessità di introdurre anche un secondo tensore degli sforzi, detto *tensore degli sforzi di coppia*.

Poiché è molto interessante confrontare il comportamento di un fluido micropolare con quello di un fluido viscoso classico nella stessa situazione fisica, prima di sviluppare la teoria dei fluidi micropolari premettiamo alcuni richiami sui fluidi viscosi classici.

I fluidi viscosi classici rientrano nella classe dei fluidi propriamente detti. Ricordiamo che un *fluido propriamente detto* è un corpo continuo caratterizzato, dal punto di vista puramente meccanico, in ambito spaziale, dalla seguente relazione sforzo - deformazione:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + \tilde{\hat{T}}, \quad (1.1.1)$$

dove  $\tilde{T}$  è il tensore degli sforzi di Cauchy,  $p$  è la pressione, mentre  $\tilde{\hat{T}}$  è una funzione tensoriale del 2° ordine, simmetrica ( $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}^T$ ),  $\tilde{\hat{T}} = \tilde{\hat{T}}(\tilde{D}, \vartheta)$ , con  $\tilde{D}$  tensore di velocità di deformazione, dato dalla parte simmetrica del gradiente della velocità e  $\vartheta$  temperatura assoluta, e tale che  $\tilde{\hat{T}}(\tilde{0}, \vartheta) = \tilde{0}$ .

La presenza di tale funzione è quella che dà luogo a sforzi di taglio, che però non sono presenti se il fluido si muove di moto rigido o è in quiete.

$\tilde{T}$ , fornita dall'esperienza, è definita *parte viscosa del tensore degli sforzi di Cauchy*.

Un fluido propriamente detto per il quale  $\tilde{T}$  è identicamente nulla, qualunque sia il suo moto, viene chiamato *non viscoso*.

**Definizione 1.1.** *Un fluido viscoso classico, detto anche fluido linearmente viscoso, è un fluido viscoso propriamente detto per il quale  $\tilde{T}$  è lineare rispetto a  $\tilde{D}$  ed ha la forma seguente:*

$$\tilde{T} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D} \quad (1.1.2)$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$ , detti coefficienti di viscosità, sono forniti dall'esperienza e dipendono dalla temperatura:

$$\lambda = \lambda(\vartheta), \quad \mu = \mu(\vartheta).$$

Se  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti, il fluido viscoso classico è detto *newtoniano*.

Dunque la relazione sforzo-deformazione che caratterizza un fluido viscoso classico è data da:

$$\tilde{T} = (\lambda \operatorname{div} \vec{v} - p) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (1.1.3)$$

Osserviamo che se un fluido viscoso classico è incomprimibile, in ogni punto ed in ogni istante abbiamo

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \operatorname{tr}(\tilde{D}) = 0$$

e dunque per un fluido viscoso incomprimibile la relazione sforzo-deformazione si riduce a

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu \tilde{D}. \quad (1.1.4)$$

I fluidi viscosi classici incomprimibili sono perciò caratterizzati da un solo coefficiente di viscosità.

Per caratterizzare completamente un fluido viscoso lineare dobbiamo assegnare anche le equazioni costitutive che ne descrivono il comportamento termodinamico. A tal fine dobbiamo distinguere tra fluidi comprimibili ed incomprimibili.

Le equazioni costitutive che caratterizzano la natura termodinamica di un fluido viscoso classico comprimibile sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ p &= \widehat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}) \\ h &= \widehat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di stato} \quad (1.1.5)$$

cui associamo la **legge di propagazione del calore**

$$\vec{q} = -\beta \text{grad} \vartheta. \quad (1.1.6)$$

Nelle (1.1.5) si ha:

$\psi$  = energia libera specifica,  $\mathcal{V} = 1/\rho$  = volume specifico,  $\vartheta$  = temperatura assoluta,  $h$  = entropia specifica.

Le funzioni  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$  e  $\widehat{h}$  sono funzioni note fornite dall'esperienza dette *funzioni risposta*.

Poiché l'esperienza mostra che nei gas, descritti dai fluidi perfetti comprimibili, la pressione è sempre maggiore di zero, la funzione risposta  $\widehat{p}$  per la pressione deve essere strettamente positiva.

Assumiamo poi  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{h}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  da cui discende  $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^2$ .

Le cinque grandezze che intervengono nelle tre equazioni di stato prendono il nome di variabili di stato;  $\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  sono variabili di stato fondamentali, mentre  $\psi$ ,  $p$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive.

La funzione risposta  $\widehat{\psi}$  è detta *potenziale termodinamico*, perchè tramite le sue derivate siamo in grado di determinare le altre due funzioni risposta e la prima equazione di stato è chiamata *equazione di stato fondamentale*, perchè tramite questa si ricavano le altre due.

$p$ ,  $\mathcal{V}$  e  $h$ ,  $\theta$  costituiscono coppie di *variabili di stato coniugate*.

Per quanto riguarda la legge di propagazione del calore,  $\vec{q}$  è il vettore flusso di calore, metre  $\beta = \beta(\vartheta, \text{grad} \vartheta, P)$  è detto *coefficiente di conducibilità termica* e la sua espressione si ottiene sperimentalmente. Da tale legge vediamo che in ogni punto e in ogni istante  $\vec{q}$  è parallelo a  $\text{grad} \vartheta$ ; quando si verifica tale condizione, si dice che la *propagazione del calore è isotropa*. L'isotropia della propagazione del calore traduce in termini matematici l'osservazione sperimentale che nei corpi reali schematizzati con il modello considerato le proprietà termiche sono indipendenti dalla direzione.

Se il coefficiente di conducibilità termica  $\beta$  è costante, la legge di propagazione del calore (1.1.6) prende il nome di *legge di Fourier*.

Si potrebbe mostrare che nelle (1.1.5) è possibile assumere come variabile di stato

fondamentale  $h$  in luogo di  $\vartheta$  ed in tal caso il potenziale termodinamico non è più la funzione risposta per l'energia libera specifica, ma quella per l'energia interna specifica  $k = \psi + \vartheta h$  oppure assumere come variabile di stato fondamentale  $p$  in luogo di  $\mathcal{V}$  ed in tal caso il potenziale termodinamico è la funzione risposta per l'entalpia libera specifica  $G = k + p\mathcal{V} - \vartheta h = \psi + p\mathcal{V}$ , ma su ciò non insistiamo.

Assegnamo ora le equazioni di stato e la legge di propagazione del calore per un fluido viscoso classico incomprimibile. Dapprima osserviamo che, qualunque sia il suo moto, deve essere soddisfatta la condizione di incomprimibilità:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

da cui dunque l'equazione di continuità della massa assume la forma:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathcal{V}} = 0.$$

Di conseguenza  $\mathcal{V} = 1/\rho$  non è più variabile di stato, e quindi non è più variabile di stato nemmeno la sua coniugata  $p$ , che diventa così una grandezza puramente meccanica e non è più strettamente positiva come nei fluidi comprimibili. Le variabili di stato si riducono a 3:  $\psi$ ,  $\vartheta$  e  $h$  e le equazioni di stato assumono allora la forma:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \widehat{\psi}(\vartheta), \\ h &= \widehat{h}(\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} \widehat{\psi}(\vartheta), \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$

cui associamo la legge di propagazione del calore ancora data da:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta \quad \text{con} \quad \beta = \beta(\vartheta, \operatorname{grad} \vartheta, P).$$

Lo stato termodinamico di un fluido viscoso classico incomprimibile è quindi individuato da tre variabili di stato:  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $h$ ;  $\vartheta$  è variabile di stato fondamentale, mentre  $\psi$  e  $h$  sono variabili di stato costitutive. Il potenziale termodinamico è  $\widehat{\psi}$  e la sua derivata rispetto a  $\vartheta$ , cambiata di segno, è la funzione risposta per  $h$ . Come per i fluidi comprimibili, possiamo sostituire  $h$  a  $\vartheta$  come variabile di stato fondamentale e le equazioni di stato sono allora:

$$\left. \begin{aligned} k &= \bar{k}(h), \\ \vartheta &= \bar{\vartheta}(h) = \frac{d}{dh} \bar{k}(h) \end{aligned} \right\} \text{nuove equazioni di stato}$$

Concludiamo il paragrafo richiamando il seguente



**Teorema 1.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido viscoso classico comprimibile siano compatibili con il II Assioma della termodinamica è che*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

*L'analogha condizione necessaria e sufficiente per un fluido viscoso classico incomprimibile è*

$$\mu \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

## 1.2 Problema del moto per un fluido viscoso classico

Dapprima ci proponiamo di impostare il problema del moto per i fluidi viscosi classici comprimibili.

Assumiamo che il moto avvenga nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , denotiamo con  $S(t)$  la regione occupata dal fluido all'istante  $t$  durante il moto e poniamo:

$$\mathcal{S} = \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Se supponiamo  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$ , (ossia che  $\vec{v}$  in  $\mathcal{S}$  rispetto a  $P$  ammetta gradiente primo e secondo continui e che rispetto a  $t$  ammetta derivata prima continua),  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ ,  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ ,  $\vec{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , la prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui, data da

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}, \quad (1.2.1)$$

tenendo conto della relazione sforzo - deformazione, assume la forma

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2\operatorname{div}(\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p. \quad (1.2.2)$$

Nel caso in cui il fluido sia newtoniano la (1.2.1) è la seguente:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} - \operatorname{grad} p. \quad (1.2.3)$$

Tale equazione è nota come **equazione di Navier - Stokes** per i fluidi newtoniani comprimibili.

A questo punto, vediamo se per un fluido viscoso classico comprimibile è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.

In tale ambito alla prima equazione indefinita possiamo associare soltanto l'equazione di continuità della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Facendo il bilancio fra numero di equazioni a disposizione e numero di incognite, abbiamo in totale 5 incognite scalari:  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$  (più eventualmente  $\vartheta$  se il fluido non è newtoniano), ma solo quattro equazioni scalari; di conseguenza non è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico comprimibile rimanendo in ambito puramente meccanico, ma dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Dunque in primo luogo dobbiamo associare alle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2\operatorname{div}(\mu \tilde{D}) - \operatorname{grad} p,\end{aligned}$$

l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica che per un generico corpo continuo è la seguente

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \tilde{D}.$$

D'altra parte, come si verifica facilmente,

$$\tilde{T} \cdot \tilde{D} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}),$$

dove

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2}[\lambda(\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}],$$

per cui l'equazione indefinita conseguenza del I assioma della termodinamica per un fluido viscoso classico comprimibile, se si sfrutta la relazione sforzo-deformazione, è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}),$$

che viene chiamata **equazione dell'energia**.

Alle equazioni meccaniche e all'equazione dell'energia associamo inoltre le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore.

Le incognite del problema sono ora  $v_i$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $k$ , (o  $\psi$  o  $G$ ),  $\vartheta$ ,  $h$ ,  $q_i$ , e quindi sono in totale 11. Ma anche le equazioni scalari sono 11. Di conseguenza il problema termomeccanico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Ora, per determinare effettivamente l'evoluzione del corpo reale schematizzato dal nostro modello, ossia per avere l'unicità della soluzione del problema, alle equazioni dovremo associare le condizioni ai limiti ossia le **condizioni iniziali** e le **condizioni al contorno**.

Ci limitiamo ad enunciare soltanto una condizione al contorno relativa al campo

della velocità  $\vec{v}$ , che viene utilizzata spesso.

Supponiamo che  $\partial S(t)$ , ossia la frontiera della regione  $S(t)$  occupata dal fluido all'istante  $t$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  sia costituita da pareti materiali rigide (ad esempio il caso di un fluido contenuto in un recipiente). Sia  $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$ ,  $P \in \partial S(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  l'atto di moto di tali pareti materiali rigide, che supponiamo noto.

L'esperienza ci mostra che, se abbiamo a che fare con un liquido o con un gas viscoso, non solo le sue particelle non possono penetrare attraverso le pareti, cosa che accade anche per un fluido perfetto, ma queste aderiscono alle pareti stesse. Di conseguenza per i fluidi viscosi si richiede che la velocità soddisfi alla condizione seguente, detta di aderenza o anche *no-slip condition*,

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.2.4)$$

Affrontiamo ora lo studio del problema del moto per un fluido viscoso classico incomprimibile. In questo caso la prima equazione indefinita, se sfruttiamo la relazione sforzo deformazione che caratterizza questi fluidi nella quale compare un solo coefficiente di viscosità, assume la forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + 2\text{div}(\mu \tilde{D}) - \text{grad} p. \quad (1.2.5)$$

Se poi il fluido in esame è incomprimibile e newtoniano, ossia  $\mu = \text{costante}$  otteniamo:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p \quad (1.2.6)$$

che è nota come **equazione di Navier-Stokes per i fluidi newtoniani incomprimibili**.

E' immediato dimostrare la seguente:

**Proposizione 1.1.** *Se  $\mu$  è costante oppure il fluido evolve in condizioni isotermitiche, cioè  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost}$  in  $\mathcal{S}$ , è possibile impostare il problema del moto per un fluido viscoso classico incomprimibile in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione.

Oltre all'equazione di Navier-Stokes, in questo caso abbiamo a disposizione le equazioni:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= 0, & \text{condizione di incomprimibilità,} \\ \dot{\rho} &= 0, & \text{equazione di continuità della massa.} \end{aligned}$$

In totale abbiamo 5 incognite scalari, cioè  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$ , a fronte di 5 equazioni scalari, e dunque il problema del moto è impostato in modo completo.

E' importante rilevare che per i fluidi incomprimibili la pressione  $p$  è un'incognita

puramente meccanica e quindi non è definita mediante un'equazione di stato. Naturalmente dobbiamo ora associare le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Se supponiamo  $t_0 = 0$ , le condizioni iniziali, che fanno intervenire solo  $\rho$  e  $\vec{v}$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho(P, 0) &= \rho_0(P) \\ \vec{v}(P, 0) &= \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(0),\end{aligned}$$

con  $\rho_0(P)$  e  $\vec{v}_0(P)$  campi noti.

Inoltre, abbiamo anche la condizione al contorno sul campo  $\vec{v}$ .

Se supponiamo che  $\partial S(t)$  sia formato da pareti materiali rigide di cui conosciamo l'atto di moto  $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$ , con  $P \in \partial S(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , poiché il fluido è viscoso, usualmente si associa la condizione di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V} \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Se invece  $\mu = \mu(\vartheta)$  e non siamo in condizioni isotermitiche, il problema del moto non può essere impostato in maniera completa rimanendo in ambito puramente meccanico, perchè nelle 5 equazioni scalari di cui sopra interviene ora anche l'incognita scalare  $\vartheta$ .

Alle 5 equazioni scritte prima, dunque, è necessario aggiungere l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica per i fluidi viscosi classici incomprimibili:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D}. \quad (1.2.7)$$

Inoltre dobbiamo aggiungere anche le due equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta.$$

Nel complesso abbiamo ottenuto un problema descritto da 11 equazioni scalari in 11 incognite scalari:  $v_i$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $k$  (o  $\psi$ ),  $\vartheta$ ,  $h$ ,  $q_i$ .

A queste equazioni vanno poi associate le condizioni ai limiti (condizioni iniziali e condizioni al contorno).

Un caso particolare di fluido incomprimibile è quello di un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo, ossia tale che la densità di massa  $\rho$  dipende solo da  $t$  e non da  $P$ , ossia  $\rho = \rho(t)$ , anzichè  $\rho = \rho(P, t)$ , da cui segue che  $\operatorname{grad} \rho = \vec{0}$  in  $\mathcal{S}$ . Ora però, essendo il fluido incomprimibile, è automaticamente soddisfatta la condizione:

$$\dot{\rho} = 0.$$

Ma:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \vec{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Di conseguenza se il fluido in esame è omogeneo,  $\rho$  non dipende neanche dal tempo, e dunque in definitiva  $\rho = \text{cost} > 0$  in  $\mathcal{S}$  e quindi non è più un'incognita del problema.

Le equazioni che governano il moto di questo fluido sono puramente meccaniche, e sono date da:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{v}' + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}) &= \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad} p, \\ \text{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Le incognite scalari del problema sono 4:  $v_1, v_2, v_3, p$ .

In tal caso nelle condizioni iniziali interviene solo la velocità:

$$\vec{v}(P, 0) = \vec{v}_0(P) \quad \forall P \in S(0),$$

ed abbiamo la condizione al contorno di aderenza se supponiamo  $\partial S(t)$  costituito da pareti materiali rigide.

Poichè  $\rho = \text{cost} > 0$ , nella (1.2.8) possiamo dividere ambo i membri per  $\rho$ , ottenendo così l'equazione:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (1.2.8)$$

dove si pone  $\nu := \mu/\rho$ , che viene detto *coefficiente di viscosità cinematica*. L'equazione in questa forma è detta **equazione di Navier-Stokes per un fluido newtoniano incomprimibile ed omogeneo**.

Alla (1.2.8) va poi associata l'equazione:

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

Risolvere il problema del moto per questo fluido significa trovare una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$  e  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$  soddisfacente all'equazione (1.2.8), alla condizione di incomprimibilità in  $\mathcal{S}$  e alle corrispondenti condizioni ai limiti.

Si noti comunque, che una volta trovata una soluzione di questo problema, la pressione  $p$  non è individuata mai in maniera univoca, poichè nell'equazione (1.2.8) non compare esplicitamente ma soltanto tramite  $\text{grad} p$ . Dunque  $p$  è determinata a meno di una funzione arbitraria del tempo  $\alpha(t)$ .

Infatti, se

$$p^* = p + \alpha(t), \quad \text{allora} \quad \text{grad} p^* = \text{grad} p$$

e dunque se  $(\vec{v}, p)$  è soluzione del problema, lo è anche  $(\vec{v}, p^*)$ .

### 1.3 Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido newtoniano incomprimibile

Richiamiamo in questo paragrafo due particolari moti di un fluido newtoniano incomprimibile per i quali è possibile determinare la soluzione esatta, poichè sarà interessante successivamente studiare gli stessi moti per un fluido micropolare incomprimibile confrontando la soluzione trovata con quella di un fluido newtoniano.

Sia dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo che si muove di moto stazionario nella regione  $S$  compresa tra due piani  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  paralleli, rigidi, fissi rispetto all'osservatore (vedi Figura 1.1). Perciò

$$\vec{v} = \vec{v}(P), \quad \vec{F} = \vec{F}(P), \quad p = p(P), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{v}} = \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Se supponiamo che sul fluido non agiscano forze esterne di massa, le equazioni che governano tale moto sono dunque:

$$\begin{aligned} \rho \text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v} &= \mu \Delta \vec{v} - \text{grad } p, \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } S \quad (1.3.1)$$

con le condizioni al contorno:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = \vec{0}. \quad (1.3.2)$$

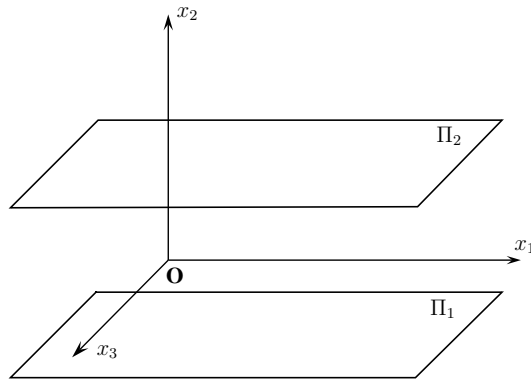


Figura 1.1: Geometria del problema

Sia  $2h$  la distanza tra i due piani e il riferimento associato all'osservatore sia quello in Figura 1.1: l'origine  $O$  è un punto equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$

è parallelo ai due piani,  $Ox_2$  normale ai due piani e  $Ox_3$  orientato di conseguenza. Si ha perciò:

$$\Pi_\alpha = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h \right\} \quad \alpha = 1, 2.$$

Inoltre:

$$S = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h] \right\}.$$

Un *moto di Poiseuille* (stazionario) tra i due piani è una coppia  $(\vec{v}, p)$  con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$  e  $p \in \mathcal{C}^1(S)$  soluzione del problema (1.3.1), (1.3.2) tale che  $\vec{v}(P) = v_1(P)\vec{e}_1$  e la rappresentazione analitica di  $\vec{v}$  sia indipendente da  $x_3$ .

Perciò si richiede:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{v}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S). \quad (1.3.3)$$

Ricordiamo che l'applicazione  $\xi$  è la seguente

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(x_i) &\longmapsto x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Se scriviamo ora le equazioni del moto del fluido per componenti ed in termini di rappresentazioni analitiche, senza tenere conto, per il momento, delle condizioni imposte a  $\vec{v}$ , abbiamo in  $\xi(S)$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j &= \mu \Delta v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Dalla (1.3.4)<sub>1</sub> deduciamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{in } \xi(S).$$

Dunque deve essere

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1,$$

con  $v_1(x_2)$  definita in  $[-h, h]$ .

Di conseguenza, le equazioni (1.3.4)<sub>2,3</sub>, per la forma della rappresentazione analitica di  $\vec{v}$ , forniscono:

$$p = p(x_1) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

mentre la prima equazione si riduce a

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti e il primo membro dell'equazione scritta sopra è una funzione solo di  $x_2$ , mentre il secondo membro è funzione solo di  $x_1$ , affinché l'equazione sia soddisfatta  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$  è necessario che i due membri siano uguali ad una stessa costante, che indichiamo con  $-C$ . Avremo dunque:

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) = \frac{dp}{dx_1}(x_1) = -C \quad \forall x_2 \in [-h, h], \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

da cui otteniamo le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

Se  $C = 0$ , abbiamo:

$$p = p_0 \quad \text{in } \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria, mentre l'integrazione dell'equazione cui soddisfa  $v_1$  fornisce

$$v_1 = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Per determinare i valori di queste due costanti, imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0} & \implies & v_1(-h) = 0, \\ \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0} & \implies & v_1(h) = 0, \end{aligned}$$

per cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1 h + C_2 \\ 0 &= C_1 h + C_2. \end{aligned}$$

Sottraendo e sommando membro a membro queste due equazioni, deduciamo:

$$\begin{aligned} 2C_1 h = 0 & \implies C_1 = 0 \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$p = p_0, \quad \vec{v} = \vec{0}.$$



Se  $C = 0$ , la pressione è costante e il fluido è in quiete.

Supponiamo ora  $C \neq 0$ .

Se integriamo l'equazione cui soddisfa  $p$  abbiamo

$$p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è una costante arbitraria.

E' interessante vedere qual è il significato fisico della costante  $C$ .

Consideriamo i due piani di equazione  $x_1 = a$  e  $x_1 = a + 1$ , con  $a$  costante arbitraria e siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  le intersezioni di  $S$  con tali piani.

Poichè  $p = p(x_1)$ , su  $\Sigma_1$  la pressione  $p$  assume un valore costante, e così pure su  $\Sigma_2$ . Se  $p_1$  e  $p_2$  individuano rispettivamente questi due valori costanti, si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= -C a + p_0 \\ p_2 &= -C (a + 1) + p_0, \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$p_1 - p_2 = C.$$

Dunque  $C$  viene a rappresentare la differenza di pressione fra i punti di due sezioni di  $S$  normali a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  e a distanza unitaria l'una dall'altra. Per questo motivo  $C$  è chiamato *salto di pressione*.

Integrando la seconda equazione deduciamo:

$$v_1 = -\frac{C}{2\mu} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie.

Come prima, per determinare le costanti  $C_1$  e  $C_2$ , sfruttiamo le condizioni al contorno:

$$v_1(-h) = v_1(h) = 0,$$

e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 - C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = -h, \\ 0 &= -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_1 h + C_2 && \text{per } x_2 = h. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione la prima, si ha:

$$2 C_1 h = 0 \quad \implies \quad C_1 = 0$$

ed andando a sostituire nella prima equazione, otteniamo:

$$0 = -\frac{C}{2\mu} h^2 + C_2.$$

Abbiamo dunque:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad x_2 \in [-h, h]. \quad (1.3.5)$$

La velocità viene perciò ad avere un andamento parabolico. Se  $C > 0$  la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, se  $C < 0$ , la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. In ogni caso il vertice  $V$  della parabola ha ascissa  $x_{V2} = 0$ .

**Osservazione 1.1.** Si osservi che in corrispondenza di ogni valore fissato del salto di pressione  $C$  si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 1.2.** *Dato un fluido newtoniano, incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille tra i due piani paralleli rigidi e fissi di equazione  $x_2 = -h$  e  $x_2 = h$  è dato dalla coppia  $(\vec{v}, p)$  tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2),$$

dove la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ .

Se  $C = 0$ , la pressione è costante e il fluido è in quiete.

Consideriamo ora il moto di Poiseuille-Couette (stazionario) di un fluido newtoniano ed omogeneo. Il moto si svolge ancora in assenza di forze di massa nella regione compresa tra due piani rigidi e paralleli, dei quali  $\Pi_1$  è fisso rispetto all'osservatore come nel moto di Poiseuille, mentre  $\Pi_2$  si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità  $\vec{V}$  parallela al piano stesso.

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  avente l'origine  $O$  equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  parallelo e concorde con  $\vec{V}$ , l'asse  $Ox_2$  normale ai due piani.

Con tale scelta si ha:

$$\vec{V} = V \vec{e}_1 \quad \text{con } V = \text{costante} > 0.$$

Un *moto di Poiseuille-Couette* tra i due piani è costituito da ogni coppia  $(\vec{v}, p)$  che sia soluzione del sistema (1.3.1), con  $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$  tale che  $\vec{v}$  soddisfi alla condizione al contorno di aderenza:

$$\vec{v} \Big|_{\Pi_1} = \vec{0}, \quad \vec{v} \Big|_{\Pi_2} = V \vec{e}_1, \quad (1.3.6)$$

ed abbia la rappresentazione analitica della forma:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1.$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo visto per il moto di Poiseuille tra due piani, otteniamo che, per la condizione di incomprimibilità,  $v_1$  dipende solo da  $x_2$ , che  $p$  dipende solo da  $x_1$  e che le due funzioni  $p(x_1)$  e  $v_1(x_2)$  soddisfano alle due equazioni differenziali ordinarie :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}(x_1) &= -C \\ \frac{d^2v_1}{dx_2^2}(x_2) &= -\frac{C}{\mu}. \end{aligned}$$

Se  $C = 0$ , deduciamo

$$p(x_1) = p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1(x_2) = C_1 x_2 + C_2 \quad \forall x_2 \in [-h, h],$$

dove  $p_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  sono costanti arbitrarie. Le due costanti  $C_1$  e  $C_2$  si determinano dalle condizioni di aderenza (4.2.13) che forniscono

$$v_1(-h) = 0 \quad v_1(h) = V. \quad (1.3.7)$$

Come si verifica facilmente si ottiene

$$C_1 = \frac{V}{2h}, \quad C_2 = \frac{V}{2}$$

per cui

$$v_1(x_2) = \frac{V}{2h}(x_2 + h) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Dunque, a differenza di quanto avviene nel caso di Poiseuille, quando la pressione è costante, il fluido non resta in quiete e  $v_1(x_2)$  cresce linearmente da 0 a  $V$ .

Se  $C \neq 0$ , come nel moto di Poiseuille,

$$p(x_1) = -Cx_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

dove  $C$  rappresenta il salto di pressione nella direzione  $Ox_1$  e  $p_0$  è una costante arbitraria inessenziale.

Per quanto riguarda la funzione  $v_1(x_2)$ , se teniamo presente la linearità del problema al contorno cui soddisfa, concludiamo che questa è data dalla somma della velocità nel moto di Poiseuille studiato precedentemente con  $C \neq 0$  e dalla velocità nel moto di Poiseuille-Couette con  $C = 0$  che abbiamo appena ottenuto.

In conclusione l'espressione di  $v_1(x_2)$  è la seguente:

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2) \quad \forall x_2 \in [-h, h].$$

Facciamo alcune osservazioni.

**Osservazione 1.2.** Ad ogni salto di pressione  $C$  corrisponde uno ed un solo moto di Poiseuille-Couette.

**Osservazione 1.3.** Se  $C \neq 0$  l'andamento di  $v_1(x_2)$  è sempre parabolico con la concavità rivolta verso il basso o verso l'alto a seconda che si abbia  $C > 0$  o  $C < 0$ , ma si differenzia da quello del moto di Poiseuille poiché l'ascissa del vertice, che nel moto di Poiseuille è nulla, è data da  $x_{V2} = \frac{\mu V}{2hC}$ . Come si verifica facilmente, nel caso  $C > 0$ , se  $C > \frac{\mu V}{2h^2}$ , allora  $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$  e  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo e poi decresce sino al valore  $V$ , mentre se  $0 < C \leq \frac{\mu V}{2h^2}$ ,  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  è sempre crescente da 0 a  $V$ . Nel caso  $C < 0$   $x_{V2}$  è interno all'intervallo  $[-h, h]$  se  $C < -\frac{\mu V}{2h^2}$  e  $v_1(x_2)$  nell'intervallo  $[-h, h]$  decresce da 0 sino a raggiungere il valore minimo e poi cresce sino al valore  $V$ , mentre se  $-\frac{\mu V}{2h^2} \leq C < 0$ ,  $v_1(x_2)$  è sempre crescente dal valore 0 al valore  $V$ .

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 1.3.** *Dato un fluido viscoso newtoniano incomprimibile ed omogeneo, un moto (stazionario) di Poiseuille-Couette tra due piani paralleli, di cui uno fisso e l'altro in moto traslatorio rettilineo uniforme in una direzione parallela al piano stesso, è dato dalla coppia  $(\vec{v}, p)$  tale che*

$$p(x_1) = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = v_1(x_2) \vec{e}_1 \quad \forall x_2 \in [-h, h]$$

con

$$v_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - x_2^2) + \frac{V}{2h} (h + x_2),$$

dove l'asse  $Ox_1$  ha la direzione della velocità  $\vec{V}$  del piano in moto e la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ .

Ci proponiamo ora di rappresentare graficamente la velocità del fluido sia per il moto di Poiseuille che per il moto di Poiseuille-Couette. Poiché nelle loro

espressioni intervengono numerosi parametri, è conveniente in primo luogo adimensionalizzare le due velocità in modo da ridurre in maniera rilevante il numero di tali parametri.

A tal fine per il moto di Poiseuille poniamo:

$$y = \frac{x_2}{h}, \quad v(y) = \frac{v_1(h y)}{V_0}, \quad V_0 = \frac{C h^2}{\mu}. \quad (1.3.8)$$

Otteniamo perciò che l'espressione della velocità adimensionale in funzione della variabile adimensionale  $y$  è data da:

$$v(y) = \frac{1}{2}(1 - y^2) \quad \forall y \in [-1, 1]. \quad (1.3.9)$$

Ovviamente il grafico di  $v$ , rappresentato in Figura 1.2, è un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso, simmetrico rispetto all'asse delle ordinate con vertice di ascissa  $y_V = 0$ .

Per quanto riguarda il moto di Poiseuille-Couette (con  $C \neq 0$ ), utilizziamo

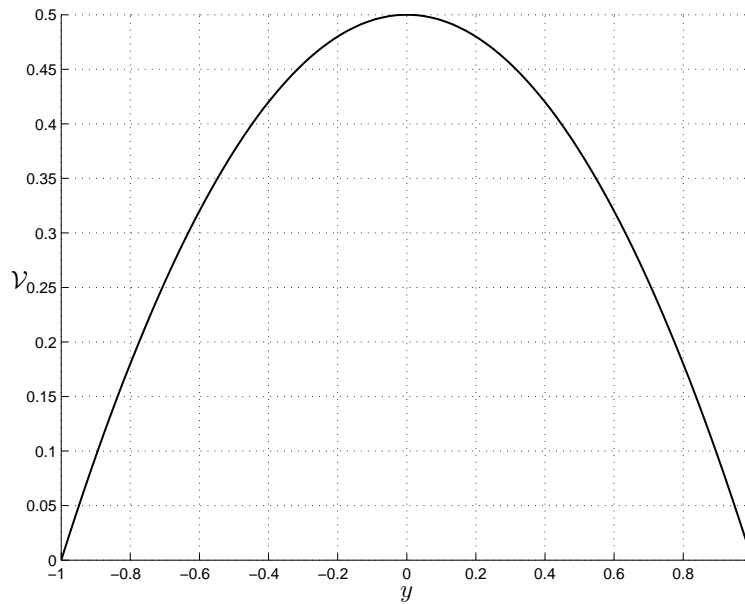


Figura 1.2: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille

l'adimensionalizzazione data in (1.3.8) ponendo inoltre  $v^* = \frac{V}{V_0}$ . In tal caso l'espressione della velocità adimensionale è la seguente:

$$v(y) = \frac{1}{2}[1 - y^2 + v^*(1 + y)] \quad \forall y \in [-1, 1]. \quad (1.3.10)$$

Il grafico è un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice di ascissa  $y_V = \frac{v^*}{2}$ .

Nel caso  $C > 0$ , se  $y_V > 0$  è interno all'intervallo  $[-1, 1]$  ossia se  $\frac{v^*}{2} < 1$ , la funzione  $v(y)$  in  $[-1, 1]$  cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo in  $y_V$  e poi decresce sino al valore  $v^* > 0$ , mentre se  $\frac{v^*}{2} \geq 1$ ,  $v(y)$  è sempre crescente sino al valore  $v^*$ .

Nel caso  $C < 0$ , se  $y_V < 0$  è interno all'intervallo  $[-1, 1]$  ossia se  $\frac{v^*}{2} > -1$ , la funzione  $v(y)$  cresce da 0 sino a raggiungere il valore massimo in  $y_V$  e poi decresce sino al valore  $v^* < 0$ , mentre se  $\frac{v^*}{2} \leq -1$ ,  $v(y)$  è sempre decrescente sino al valore  $v^*$ .

In Figura 1.3 è presentato il grafico di  $v$  per diversi valori di  $v^*$ .

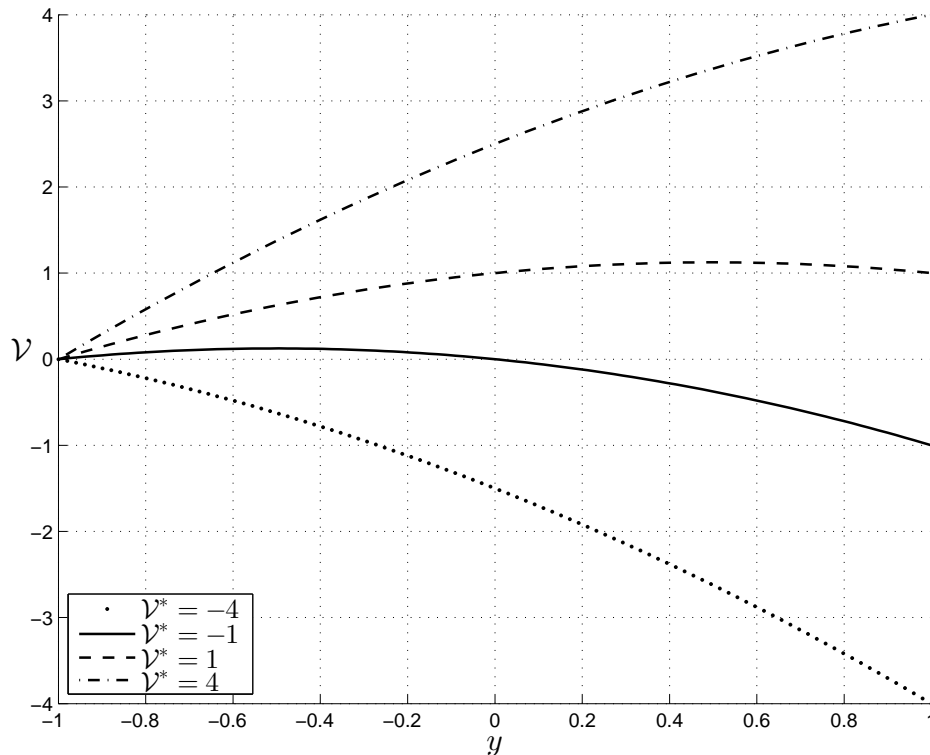


Figura 1.3: Velocità adimensionale nel moto di Couette-Poiseuille per diversi valori di  $v^*$

# Capitolo 2

## Fluidi micropolari

### 2.1 Premesse

Vi sono dei corpi reali che non possono essere schematizzati in modo soddisfacente se non si tiene conto della loro struttura particellare: ad esempio le *sospensioni*, ossia quei fluidi in cui sono sospese delle particelle, come nel caso dei liquidi biologici, le sostanze polimeriche, i cristalli liquidi o più in generale corpi che sono composti.

Per poter schematizzare tali corpi composti, tenendo conto della loro struttura, sono state proposte le cosiddette *teorie polari dei corpi continui*. La prima teoria polare è stata formulata da Cosserat ai primi del Novecento.

I *fluidi micropolari* rientrano tra i corpi continui polari e costituiscono una sottoclasse di una classe di fluidi introdotta da Eringen fra il 1970 e il 1980: la classe dei *fluidi micromorfi*. In tale teoria si suppone che le particelle di fluido, pur potendo occupare solo singoli punti dello spazio geometrico, si possano riguardare esse stesse come dei corpi continui deformabili. Una sottoclasse dei fluidi micromorfi è quella dei *fluidi con microstretch*, per i quali le particelle sono corpi deformabili che possono soltanto espandersi o contrarsi. Una sottoclasse di fluidi con microstretch è costituita appunto dai fluidi micropolari, in cui le particelle vengono riguardate come dei corpi rigidi dotati soltanto di atti di moto rotatori. Vogliamo esporre in modo dettagliato la teoria dei fluidi micropolari.

La teoria che qui tratteremo presenta alcune differenze, ma solo di carattere formale, rispetto alla teoria originaria di Eringen, in quanto penseremo tale teoria come a sè stante, e non inserita in un ambito più generale.

Questo modello di fluidi schematizza molto bene il comportamento di quei fluidi reali che sono costituiti da particelle disposte a caso, sospese in un mezzo viscoso, e dotate ognuna di un proprio atto di moto di rotazione indipendente dal moto del mezzo in cui sono immerse. In particolare, i fluidi micropolari vengono

utilizzati per descrivere la circolazione del sangue nei vasi di medie dimensioni. Noi ci occuperemo esclusivamente di fluidi micropolari *isotropi*, che caratterizzano il comportamento di liquidi e gas reali per i quali le proprietà meccaniche e termiche sono indipendenti dalla direzione. I fluidi micropolari anisotropi, che noi non studieremo, schematizzano bene il comportamento dei cristalli liquidi. Un fluido micropolare può essere visto come un fluido viscoso classico ad ogni particella del quale viene associato un corpo rigido che può avere solo atti di moto rotatori.

Lo studio dei fluidi micropolari si effettua sempre dal punto di vista spaziale, ma essendo le particelle dotate di un proprio atto di moto rotatorio, accanto al campo della velocità  $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  si introduce in ambito cinematico un altro campo vettoriale:  $\vec{w} = \vec{w}(P, t)$ , detto *vettore di microrotazione*, che rappresenta la velocità angolare totale delle particelle. Se la velocità  $\vec{v}$  del fluido è un atto di moto rigido,  $\vec{w}$  è dato dalla somma della velocità angolare di tale atto di moto rigido e di quella propria delle particelle.

A questo punto è opportuno introdurre la seguente

**Definizione 2.1.** *Un fluido micropolare occupante la regione  $S(t)$  all'istante  $t$  possiede un atto di moto rigido se:*

1)  $\vec{v}$  è un atto di moto rigido, ossia:

$$\vec{v}(P, t) = \vec{v}(\bar{P}, t) + \vec{w}(t) \times (P - \bar{P}), \quad \forall P, \bar{P} \in S(t);$$

2)  $\vec{w}(P, t) = \vec{w}(t)$ , cioè le particelle non sono dotate di un proprio moto rispetto al fluido, ma seguono il moto del fluido stesso.

Come detto in precedenza, i fluidi micropolari sono in particolare dei corpi continui polari. Come vedremo, la presenza di coppie di forze di massa e di contatto comporta che il tensore degli sforzi di Cauchy non è più simmetrico come nella teoria classica ed inoltre occorre introdurre un nuovo tensore degli sforzi, detto *tensore degli sforzi di coppia*.

## 2.2 Grandezze cinetiche e forze agenti nei fluidi micropolari

Sia dato un fluido micropolare in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  e poniamo

$$\mathcal{S} = \{(P, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid P \in S(t), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Avremo dunque  $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$  ed assumiamo che anche  $\vec{w}$  soddisfi alla medesima condizione di regolarità.



Come ad ogni altro corpo continuo, anche ad un fluido micropolare è associata una distribuzione di massa, indipendente dalle possibili configurazioni del fluido, dotata di densità rispetto alla misura di Lebesgue, detta densità di massa che per definizione dipende dalla configurazione. Perciò risulta definito in  $\mathcal{S}$  il campo spaziale della densità di massa:  $\rho = \rho(P, t)$  che supponiamo di classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ ; come per ogni altro corpo continuo si prova che  $\rho$  soddisfa all'equazione di continuità per la massa data da

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.2.1)$$

Vediamo di definire le principali grandezze cinetiche per un fluido micropolare. Sia  $\mathcal{C}^*$  un sottocorpo e  $S^*(t)$  la regione che esso occupa all'istante  $t$ . L'unica grandezza cinetica la cui definizione rimane invariata rispetto ai corpi continui non polari è la quantità di moto per il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ , data da:

$$\vec{Q}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS. \quad (2.2.2)$$

Analoga definizione sussiste per tutto il corpo continuo  $\mathcal{C}$ .

E' invece necessario modificare la definizione di momento delle quantità di moto.

**Definizione 2.2.** *Il momento delle quantità di moto rispetto ad un polo  $O \in \mathcal{E}$  per un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  è così definito:*

$$\vec{K}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{v}(P, t) dS + \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{\sigma}(P, t) dS,$$

dove il primo integrale a secondo membro è il momento esterno delle quantità di moto rispetto al polo  $O$ , il secondo integrale è il momento interno delle quantità di moto rispetto al polo  $O$ , e  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(P, t)$  è un campo vettoriale detto densità di spin avente la forma seguente:

$$\forall (P, t) \in \mathcal{S}: \quad \vec{\sigma}(P, t) = \tilde{I}(P, t) \cdot \vec{w}(P, t),$$

con  $\tilde{I} = \tilde{I}(P, t)$  tensore di microinerzia.  $\tilde{I}$  è un campo tensoriale del secondo ordine simmetrico, definito positivo, cioè tale che:

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}: \quad \vec{u} \cdot \tilde{I} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad e \quad \vec{u} \cdot \tilde{I} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0.$$

Poichè abbiamo supposto il fluido micropolare isotropo,  $\tilde{I}$  è un tensore isotropo, ossia è della forma:

$$\tilde{I}(P, t) = I(P, t) \tilde{a},$$

dove  $I(P, t)$  è detto coefficiente di microinerzia. In questo caso  $\vec{\sigma}$  si riduce a:

$$\vec{\sigma}(P, t) = I(P, t) \vec{w}(P, t).$$

Ovviamente  $I > 0$ ,  $\forall P \in S(t)$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ . Supponiamo  $I \in C^1(\mathcal{S})$ .

In seguito ad una legge di conservazione su cui non ci soffermiamo si può dimostrare che necessariamente:

$$\dot{I} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S},$$

ossia  $I$  deve soddisfare ad una equazione analoga a quella di continuità della massa.

Anche la definizione di energia cinetica deve essere opportunamente modificata nel caso di un fluido micropolare.

**Definizione 2.3.** *L'energia cinetica di un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  è data da:*

$$T^*(t) = \frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{v}^2(P, t) dS + \frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{w}(P, t) \cdot \tilde{I}(P, t) \cdot \vec{w}(P, t) dS,$$

dove il primo integrale a secondo membro è detto energia cinetica esterna, mentre il secondo integrale è detto energia cinetica interna.

Nel caso di fluidi micropolari isotropi l'energia cinetica interna si riduce a:

$$\frac{1}{2} \int_{S^*(t)} \rho(P, t) I(P, t) w^2(P, t) dS.$$

Introdotte le principali grandezze cinetiche, dobbiamo ora considerare le forze agenti su un fluido micropolare.

Nel seguito supporremo, più che altro per motivi tecnici, che il fluido micropolare  $\mathcal{C}$  ed ogni suo sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  occupino regioni dello spazio geometrico che sono chiusure di domini regolari.

Ad ogni fluido micropolare e ad ogni suo sottocorpo sono applicate sia forze esterne di massa che forze esterne di contatto, sia coppie di massa che coppie di contatto.

Per quanto riguarda le forze di massa e di contatto utilizziamo le stesse ipotesi e le stesse definizioni introdotte per i corpi continui non polari.

Dunque assumiamo che per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  il campo  $\vec{F} = \vec{F}(P, t) \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , detto *densità delle forze esterne di massa agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$*  e per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  chiamiamo *risultante delle forze esterne di massa e momento risultante delle forze esterne di massa rispetto ad un polo  $O$  agenti sul sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$*  i due seguenti integrali di volume:

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS, \quad \int_{S^*(t)} (P - O) \times \rho(P, t) \vec{F}(P, t) dS.$$

Analoghe definizioni si danno per tutto il fluido  $\mathcal{C}$ .

Per quanto concerne le forze di contatto, supponiamo che per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  sia associato un campo vettoriale  $\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*)$ ,  $P \in \partial S^*(t)$ , detto *densità delle forze esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$* , che assumiamo continuo per  $P \in \partial S^*(t)$  e  $t \in [t_0, t_1]$ .

Ovviamente anche a  $\mathcal{C}$  è associata la densità delle forze esterne di contatto.

Inoltre chiamiamo *risultante e momento risultante delle forze esterne di contatto rispetto ad un polo  $O$  agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$*  i due integrali di superficie:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma, \quad \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times \vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

E' immediato estendere la definizione data a tutto il corpo.

Supponiamo inoltre che valga il seguente *assioma degli sforzi*:

**Assioma 2.1. Assioma degli sforzi.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  esiste un campo  $\vec{T} = \vec{T}(P, t, \vec{u})$ , definito per  $P \in S(t)$ ,  $\vec{u}$  versore arbitrario, tale che per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  risulti:

$$\vec{t}(P, t; \mathcal{C}^*) = \vec{T}(P, t, \vec{n}),$$

dove  $P \in \partial S^*(t)$ ,  $\vec{n}$  è il versore normale a  $\partial S^*(t)$ , rivolto verso l'esterno di  $S^*(t)$ .  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  è detto *sforzo specifico relativo a  $P$  e a  $t$ , e coordinato alla direzione orientata di versore  $\vec{u}$* . Inoltre  $\vec{T}(P, t, \vec{n})$ , con  $P \in \partial S(t)$  ed  $\vec{n}$  il versore normale esterno a  $\partial S(t)$ , è detto *trazione superficiale* e viene denotato con  $\vec{f}(P, t)$ .

Si assume  $\vec{T}(P, t, \vec{u})$  continuo rispetto ad ogni suo argomento e che fissati  $t$  ed  $\vec{u}$  ad arbitrio, il campo  $\vec{T}(\cdot, t, \vec{u}) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

Diamo ora invece ipotesi e definizioni nuove riguardanti le coppie.

**Ipotesi 2.1.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo vettoriale  $\vec{G} = \vec{G}(P, t)$ , con  $\vec{G} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , detto *densità del momento delle coppie esterne di massa agenti su  $\mathcal{C}$  all'istante  $t$* .

**Definizione 2.4.** Dato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo *momento risultante delle coppie esterne di massa agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$*  l'integrale:

$$\int_{S^*(t)} \rho(P, t) \vec{G}(P, t) dS.$$

La definizione si estende in maniera ovvia a tutto  $\mathcal{C}$ .

**Ipotesi 2.2.** Per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ad ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  sia associato un campo vettoriale  $\vec{c} = \vec{c}(P, t; \mathcal{C}^*)$ , con  $P \in \partial S^*(t)$ ,  $\vec{c}$  continuo rispetto a  $P \in \partial S^*(t)$  e a  $t \in [t_0, t_1]$ , che chiamiamo *densità del momento delle coppie esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$* . Analoga definizione vale per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 2.5.** Dato il sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , chiamiamo momento risultante delle coppie esterne di contatto agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$  l'integrale:

$$\int_{\partial S^*(t)} \vec{c}(P, t; \mathcal{C}^*) d\Sigma.$$

Analogha definizione vale per tutto  $\mathcal{C}$ .

Introduciamo ora l'assioma:

**Assioma 2.2. Assioma degli sforzi delle coppie di contatto.** Supponiamo che per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  sia definito in  $S(t)$  un campo vettoriale  $\vec{C} = \vec{C}(P, t, \vec{u})$ , con  $\vec{u}$  versore arbitrario, tale che per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  risulti:

$$\vec{c}(P, t; \mathcal{C}^*) = \vec{C}(P, t, \vec{n}),$$

con  $P \in \partial S^*(t)$  e  $\vec{n}$  versore normale a  $\partial S^*(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S^*(t)$ . Chiaramente questa proprietà vale anche per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ . In tal caso si pone:

$$\vec{C}(P, t, \vec{n}) = \vec{g}(P, t), \quad \forall P \in \partial S(t), \forall t \in [t_0, t_1],$$

dove  $\vec{n}$  è il versore normale a  $\partial S(t)$  rivolto verso l'esterno di  $S(t)$ .  $\vec{C}(P, t, \vec{u})$  è detto sforzo specifico di coppia relativo al punto  $P$  e all'istante  $t$  e coordinato alla direzione orientata di versore  $\vec{u}$ .

Facciamo ora le seguenti ipotesi di regolarità:  $\vec{C}$  sia un'applicazione continua rispetto a tutti i suoi argomenti, e per  $t$  e  $\vec{u}$  fissati ad arbitrio si abbia  $\vec{C}(\cdot, t, \vec{u}) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

**Definizione 2.6.** Dato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , definiamo risultante delle forze esterne agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ :

$$\vec{R}^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S^*(t)} \vec{T}(\vec{n}) d\Sigma.$$

Analogha definizione vale per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 2.7.** Dato un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  e un polo  $O \in \mathcal{E}$ , chiamiamo momento risultante delle forze esterne agenti su  $\mathcal{C}^*$  all'istante  $t$ :

$$\vec{\Omega}_O^*(t) = \int_{S^*(t)} [(P - O) \times \rho \vec{F} + \rho \vec{G}] dS + \int_{\partial S^*(t)} [(P - O) \times \vec{T}(\vec{n}) + \vec{C}(\vec{n})] d\Sigma.$$

Analogha definizione vale per tutto il corpo  $\mathcal{C}$ , dove però al posto di  $\vec{T}(\vec{n})$  e  $\vec{C}(\vec{n})$  in genere si inseriscono  $\vec{f}$  e  $\vec{g}$  rispettivamente.

## 2.3 I e II equazione indefinita della meccanica per i fluidi micropolari

Anche per i fluidi i polari, la meccanica è basata sulle due equazioni cardinali, che sussistono per ogni corpo continuo e sono assunte come assiomi.

Dunque, dato un corpo continuo  $\mathcal{C}$  che sia un fluido micropolare in moto regolare, abbiamo che per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt}(t) &= \vec{R}(t), & \text{I equazione cardinale,} \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) &= \vec{\Omega}_O(t), & \text{II equazione cardinale,} \end{aligned}$$

dove  $O$  è un punto fisso dello spazio geometrico.

Vediamo che forma assumono le due equazioni cardinali per un fluido micropolare  $\mathcal{C}$ , sulla base delle definizioni introdotte.

Se teniamo presente il teorema del trasporto che sussiste per ogni corpo continuo e il suo corollario conseguenza dell'equazione di continuità della massa, abbiamo:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt}(t) = \int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS,$$

cosicché la I equazione cardinale assume la forma:

$$\int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} dS = \int_{S(t)} \rho \vec{F} dS + \int_{\partial S(t)} \vec{f} d\Sigma. \quad (2.3.1)$$

Tale equazione è identica a quella dei corpi continui non polari.

La forma che assume la II equazione cardinale differisce invece molto dalla forma in cui si presenta per i corpi continui non polari.

Per definizione:

$$\vec{K}_O(t) = \int_{S(t)} [(P - O) \times \rho \vec{v} + \rho I \vec{w}] dS,$$

da cui, applicando il teorema del trasporto:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) = \int_{S(t)} \left[ (P - O) \cdot \times \rho \vec{v} + (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} + \rho (I \vec{w}) \cdot \right] dS. \quad (2.3.2)$$

D'altra parte:

$$(P - O) = (\vec{x})_s \quad \implies \quad (P - O) \cdot = \left( \dot{\vec{x}} \right)_s = \vec{v}.$$

Inoltre:

$$(I\vec{w})' = \dot{I}\vec{w} + I\dot{\vec{w}} = I\dot{\vec{w}},$$

poichè avevamo osservato che come conseguenza di una legge di conservazione si ha  $\dot{I} = 0$ .

Riscriviamo allora l'equazione (2.3.2) nella forma:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}(t) = \int_{S(t)} \left[ (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} + \rho I \dot{\vec{w}} \right] dS, \quad (2.3.3)$$

Per la (2.3.3) e la definizione di  $\vec{\Omega}_O(t)$ , la seconda equazione cardinale per un fluido micropolare è data da:

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \left[ (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} + \rho I \dot{\vec{w}} \right] dS &= \int_{S(t)} \left[ (P - O) \times \rho \vec{F} + \rho \vec{G} \right] dS + \\ &+ \int_{\partial S(t)} \left[ (P - O) \times \vec{f} + \vec{g} \right] d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Le equazioni cardinali nelle forme così trovate valgono anche per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ , con la sola differenza che a  $S(t)$  si sostituisce  $S^*(t)$ , mentre a  $\vec{f}$  e a  $\vec{g}$  si sostituiscono rispettivamente  $\vec{T}(\vec{n})$  e  $\vec{C}(\vec{n})$ .

Dalla prima equazione cardinale, che ha la stessa forma per tutti i corpi continui, discende il teorema di Cauchy per gli sforzi che dunque sussiste per tutti i corpi continui e quindi anche per i corpi polari ed in particolare per i fluidi micropolari.

**Teorema 2.1. Teorema di Cauchy sugli sforzi.** *Dato un fluido micropolare in moto, per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , per ogni  $P \in S(t)$ , per ogni  $\vec{u}$  versore, si ha:*

$$\vec{T}(P, t, \vec{u}) = \tilde{T}(P, t) \cdot \vec{u},$$

dove  $\tilde{T} = \tilde{T}(P, t)$  è un campo tensoriale del secondo ordine, detto tensore degli sforzi di Cauchy.

Il tensore degli sforzi di Cauchy è l'analogo di quello introdotto per i corpi non polari. Per le ipotesi fatte,  $\tilde{T} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  e per ogni  $t$  fissato,  $\tilde{T}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ . Come conseguenza della seconda equazione cardinale, si potrebbe dimostrare che per i fluidi micropolari sussiste il seguente teorema per gli sforzi di coppia analogo al teorema precedente:

**Teorema 2.2. Teorema di Cauchy sugli sforzi di coppia.** *Dato un fluido micropolare in moto,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ ,  $\forall P \in S(t)$ , per ogni versore  $\vec{u}$ , si ha:*

$$\vec{C}(P, t, \vec{u}) = \tilde{C}(P, t) \cdot \vec{u}$$

dove  $\tilde{C} = \tilde{C}(P, t)$  è un campo tensoriale del secondo ordine, detto tensore degli sforzi di coppia.

Per le ipotesi fatte su  $\vec{C}$  si ha che  $\tilde{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , e per ogni  $t$  fissato  $\tilde{C}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(S(t))$ .

Vogliamo ora ottenere due equazioni indefinite per i fluidi micropolari, conseguenze delle due equazioni cardinali (2.3.1) e (2.3.4).

La prima equazione indefinita, tenendo presente che essa deriva dalla prima equazione cardinale (2.3.1) e dal teorema di Cauchy, come per i continui non polari è data da:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \quad \text{in } \mathcal{S}, \quad (2.3.5)$$

dove  $(\operatorname{div} \tilde{T})_i = T_{ij,j}$ .

Dalla seconda equazione indefinita per i corpi non polari discende la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy. Vedremo ora che il tensore degli sforzi di Cauchy per i fluidi micropolari non è simmetrico.

La seconda equazione indefinita è conseguenza della seconda equazione cardinale (2.3.4) e della prima equazione indefinita (2.3.5).

Preso un sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  arbitrario, dato  $t \in [t_0, t_1]$  arbitrario, tenendo conto che, per i teoremi di Cauchy enunciati in precedenza:

$$\vec{T}(\vec{n}) = \tilde{T} \cdot \vec{n}, \quad \vec{C}(\vec{n}) = \tilde{C} \cdot \vec{n},$$

abbiamo dalla seconda equazione cardinale (2.3.4):

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} \left[ (P - O) \times \rho \dot{\vec{v}} + \rho I \dot{\vec{w}} \right] dS &= \int_{S^*(t)} \left[ (P - O) \times \rho \vec{F} + \rho \vec{G} \right] dS + \\ &+ \int_{\partial S^*(t)} \left[ (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) + \tilde{C} \cdot \vec{n} \right] d\Sigma \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Consideriamo l'integrale di superficie a secondo membro della (2.3.6):

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma \right]_i &= \int_{\partial S^*(t)} \left[ (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) \right]_i d\Sigma = \\ &= \int_{\partial S^*(t)} \theta_{ijr} x_j T_{rl} n_l d\Sigma = \\ &= \int_{S^*(t)} (\theta_{ijr} x_j T_{rl})_{,l} dS, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

dove abbiamo tenuto presente che, per  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ ,  $(\vec{u} \times \vec{v})_i = \theta_{ijr} u_j v_r$ , e quindi fissato un riferimento ortonormale con origine in  $O$ :

$$[(P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n})]_i = \theta_{ijr} x_j T_{rl} n_l,$$

con  $\tilde{\theta}$  tensore di Ricci.

Nell'ultima uguaglianza abbiamo applicato le formule di Gauss - Ostrogradsky.

Allora:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma \right]_i &= \int_{S^*(t)} [\theta_{ijr} x_j T_{rl,t} + \theta_{ijr} x_{j,l} T_{rl}] dS = \\ &= \int_{S^*(t)} [\theta_{ijr} x_j (\text{div} \tilde{T})_r + \theta_{ijr} \delta_{jl} T_{rl}] dS = \int_{S^*(t)} \left\{ [(P - O) \times \text{div} \tilde{T}]_i + \theta_{ijr} T_{rj} \right\} dS = \\ &= \int_{S^*(t)} \left\{ [(P - O) \times \text{div} \tilde{T}]_i + (\tilde{\theta} \cdot \tilde{T}^t)_i \right\} dS = \left\{ \int_{S^*(t)} [(P - O) \times \text{div} \tilde{T} + (\tilde{\theta} \cdot \tilde{T}^t)] dS \right\}_i = \\ &= \left\{ \int_{S^*(t)} [(P - O) \times \text{div} \tilde{T} + \vec{T}^{(e)}] dS \right\}_i, \end{aligned}$$

dove  $\vec{T}^{(e)} = \tilde{\theta} \cdot \tilde{T}^t$  è correlato alla parte emisimmetrica di  $\vec{T}$ , non nulla se e solo se  $\vec{T}$  non è simmetrico.

Dunque, in forma vettoriale, abbiamo ottenuto:

$$\int_{\partial S^*(t)} (P - O) \times (\tilde{T} \cdot \vec{n}) d\Sigma = \int_{S^*(t)} [(P - O) \times \text{div} \tilde{T} + \vec{T}^{(e)}] dS. \quad (2.3.8)$$

Inoltre nell'integrale di superficie a secondo membro dell'equazione (2.3.6) abbiamo, applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial S^*(t)} \tilde{C} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{S^*(t)} \text{div} \tilde{C} dS. \quad (2.3.9)$$

Tenendo conto delle (2.3.8) e (2.3.9), riscriviamo l'equazione (2.3.6) nel modo seguente:

$$\int_{S^*(t)} \left[ (P - O) \times (\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \text{div} \tilde{T}) + \rho I \dot{\vec{w}} - \rho \vec{G} - \text{div} \tilde{C} - \vec{T}^{(e)} \right] dS = \vec{0}. \quad (2.3.10)$$

Dalla prima equazione indefinita della meccanica dei corpi continui ricaviamo che:  $\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{F} - \text{div} \tilde{T} = \vec{0}$  e dunque la precedente equazione si riduce a:

$$\int_{S^*(t)} \left[ \rho I \dot{\vec{w}} - \rho \vec{G} - \text{div} \tilde{C} - \vec{T}^{(e)} \right] dS = \vec{0}. \quad (2.3.11)$$

Tale equazione vale per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$  che occupa la regione  $S^*(t)$ , chiusura di un dominio regolare, per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  e dunque sussiste  $\forall S^*(t), \forall t \in [t_0, t_1]$ . Essendo la funzione integranda a primo membro della (2.3.11) di classe  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ , per un noto lemma deduciamo:

$$\rho I \dot{\vec{w}} = \rho \vec{G} + \text{div} \tilde{C} + \vec{T}^{(e)} \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.3.12)$$



La (2.3.12) è la seconda equazione indefinita della meccanica per i fluidi micropolari.

Da tale equazione si desume che il tensore degli sforzi di Cauchy per i fluidi micropolari non è simmetrico.

Abbiamo così ottenuto il seguente:

**Teorema 2.3.** *Dato un fluido micropolare in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , come conseguenze della prima e della seconda equazione cardinale, si ha che:*

$$\begin{aligned}\rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}, \\ \rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + \operatorname{div} \tilde{C} + \vec{T}^{(e)}\end{aligned}\quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Può essere utile ora dedurre il teorema dell'energia cinetica anche per i fluidi micropolari.

Come abbiamo visto, per un fluido micropolare isotropo  $\mathcal{C}$  che occupa la regione  $S(t)$  all'istante  $t$ , l'energia cinetica è data da:

$$T(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{S(t)} \rho \vec{v}^2 dS + \int_{S(t)} \rho I \vec{w}^2 dS \right]. \quad (2.3.13)$$

Nello scrivere il secondo integrale abbiamo sfruttato l'isotropia del fluido, per cui  $\tilde{T} = I\tilde{a}$ .

**Definizione 2.8.** *Definiamo la **potenza delle forze esterne** all'istante  $t$  per un fluido micropolare nel modo seguente:*

$$\Pi_e(t) = \int_{S(t)} \left[ \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \rho \vec{G} \cdot \vec{w} \right] dS + \int_{\partial S(t)} \left[ \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{g} \cdot \vec{w} \right] d\Sigma.$$

Questa definizione vale anche per ogni sottocorpo se sostituiamo nell'integrale di superficie  $\vec{f}$  con  $\vec{T}(\vec{n})$  e  $\vec{g}$  con  $\vec{C}(\vec{n})$ . Si noti che nella prima funzione integranda a secondo membro troviamo il termine aggiuntivo  $\rho \vec{G} \cdot \vec{w}$  rispetto all'espressione della potenza delle forze esterne per un corpo non polare, dovuto alla presenza di coppie di massa. Nella seconda funzione integranda il termine aggiuntivo è  $\vec{g} \cdot \vec{w}$  ed è dovuto alla presenza di coppie di contatto.

**Definizione 2.9.** *Definiamo la **potenza delle forze interne** all'istante  $t$  per un fluido micropolare nel modo seguente:*

$$\Pi_i(t) = - \int_{S(t)} \left[ \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} \right] dS.$$

Osserviamo che il termine  $\tilde{T} \cdot \text{grad } \vec{v}$  è il corrispondente di  $\tilde{T} \cdot \tilde{D}$  nell'espressione della potenza delle forze interne per continui non polari:

$$\Pi_i(t) = - \int_{S(t)} \tilde{T} \cdot \tilde{D} dS.$$

Nel caso di corpi polari  $\tilde{T}$  non è simmetrico, e quindi  $\tilde{T} \cdot \tilde{D} \neq \tilde{T} \cdot \text{grad } \vec{v}$ .

La definizione data ha senso se mostriamo che  $\Pi_i(t) = 0$  in corrispondenza di ogni istante in cui l'atto di moto del fluido micropolare è rigido. Infatti, come è noto, per un sistema materiale rigido  $\Pi_i(t) = 0$  per ogni  $t$  e dunque se in un certo istante un corpo polare ha atto di moto rigido si deve avere in tale istante  $\Pi_i = 0$ .

Ricordiamo che un fluido micropolare ha un atto di moto rigido se:

$$\begin{aligned} \vec{v}(P, t) &= \vec{v}(\bar{P}, t) + \vec{\omega}(t) \times (P - \bar{P}) & \forall P, \bar{P} \in S(t), \\ \vec{w}(P, t) &= \vec{\omega}(t). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

In componenti la (2.3.14)<sub>1</sub> diventa:

$$v_i = \bar{v}_i + \theta_{ihk} \omega_h (x_k - \bar{x}_k) \quad i = 1, 2, 3,$$

avendo posto  $\vec{v} = \vec{v}(\bar{P}, t)$ .

Dimostriamo quindi il seguente:

**Teorema 2.4.** *Se  $\mathcal{C}$  è un fluido micropolare che evolve nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , e all'istante  $t$  il suo atto di moto è un atto di moto rigido, allora  $\Pi_i(t) = 0$ , cioè la potenza delle forze interne è nulla in quell'istante.*

Dimostrazione. Supponiamo  $P \in S(t)$ ,  $P$  fissato. Procuriamoci le componenti di  $\text{grad } \vec{v}$  che compaiono in  $\Pi_i(t)$ :

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \theta_{ihk} \omega_h \delta_{kj} = \theta_{ihj} \omega_h.$$

Inoltre

$$\text{grad } \vec{w} = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Teniamo poi conto che vale:

$$\vec{T}^{(e)} = \tilde{\theta} \cdot \tilde{T}^T,$$

e quindi:

$$\vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} = \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{\omega} = T_i^{(e)} \omega_i = \theta_{ijh} T_{hj} \omega_i.$$

Dato che, in generale, la funzione integranda in  $\Pi_i(t)$ , in componenti, assume la forma:

$$T_{ij} v_{i,j} + C_{ij} w_{i,j} - \theta_{ijh} T_{hj} w_i,$$

nel nostro caso particolare avremo:

$$T_{ij}\theta_{ihj}\omega_h - \theta_{ijh}T_{hj}\omega_i.$$

La tesi risulta provata se mostriamo che :

$$T_{ij}\theta_{ihj}\omega_h - \theta_{ijh}T_{hj}\omega_i = 0.$$

Ma tenendo conto che  $\tilde{\theta}$  è un tensore emisimmetrico, risulta:

$$T_{ij}\theta_{ihj}\omega_h = -\theta_{hij}T_{ij}\omega_h = \theta_{hji}T_{ij}\omega_h = \theta_{ijh}T_{hj}\omega_i,$$

dove abbiamo scambiato il nome degli indici saturati  $h$  e  $i$ .

La tesi è quindi dimostrata.

Proviamo ora il seguente:

**Teorema 2.5. Teorema dell'energia cinetica.** *Sia  $\mathcal{C}$  un fluido micropolare in moto regolare e supponiamo  $\vec{w} \in \mathcal{C}^1$ . Allora:*

$$\frac{dT}{dt} = \Pi_e(t) + \Pi_i(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Dimostrazione. Sfruttiamo le due equazioni indefinite della meccanica dei fluidi micropolari:

$$\begin{aligned} \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \text{div} \tilde{T}, \\ \rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + \text{div} \tilde{C} + \vec{T}^{(e)} \quad \text{in } \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della prima equazione per  $\vec{v}$  e integriamo su  $S(t)$ :

$$\int_{S(t)} \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \int_{S(t)} \left[ \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \text{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} \right] dS.$$

Analogamente operiamo con la seconda equazione, moltiplicando scalarmente entrambi i membri per  $\vec{w}$  e integrando su  $S(t)$ :

$$\int_{S(t)} \rho I \dot{\vec{w}} \cdot \vec{w} dS = \int_{S(t)} \left[ \rho \vec{G} \cdot \vec{w} + \text{div} \tilde{C} \cdot \vec{w} + \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} \right] dS.$$

Se sommiamo ora membro a membro le due relazioni che abbiamo ottenuto, deduciamo:

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \left[ \rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \rho I \dot{\vec{w}} \cdot \vec{w} \right] dS &= \int_{S(t)} \left[ \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \rho \vec{G} \cdot \vec{w} \right] dS + \\ &+ \int_{S(t)} \left[ \text{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} + \text{div} \tilde{C} \cdot \vec{w} \right] dS + \int_{S(t)} \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} dS. \end{aligned}$$

Se consideriamo l'integrale a primo membro, abbiamo:

$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v}^2) \cdot, \quad \dot{\vec{w}} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (\vec{w}^2) \cdot.$$

Inoltre ricordando che  $\dot{I} = 0$  per una legge di conservazione, possiamo scrivere:

$$I \dot{\vec{w}} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (I \vec{w}^2) \cdot.$$

In definitiva l'integrale a primo membro diventa (per il corollario del teorema del trasporto):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho [(\vec{v}^2) \cdot + (I \vec{w}^2) \cdot] dS &= \frac{1}{2} \int_{S(t)} \rho (\vec{v}^2 + I \vec{w}^2) \cdot dS = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{S(t)} (\rho \vec{v}^2 + \rho I \vec{w}^2) dS \right] = \frac{d}{dt} T(t). \end{aligned}$$

Consideriamo ora il secondo membro dell'uguaglianza ottenuta. Il primo addendo ci fornisce la prima parte dell'espressione di  $\Pi_e(t)$ , mentre il terzo addendo ci fornisce l'ultima parte dell'espressione di  $\Pi_i(t)$ . In definitiva dobbiamo dimostrare che:

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} [\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} + \operatorname{div} \tilde{C} \cdot \vec{w}] dS &= \int_{\partial S(t)} [\vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{g} \cdot \vec{w}] d\Sigma + \\ &\quad - \int_{S(t)} [\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w}] dS. \end{aligned}$$

Tuttavia:

$$\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} + \operatorname{div} \tilde{C} \cdot \vec{w} = T_{ij,j} v_i + C_{ij,j} w_i = (T_{ij} v_i + C_{ij} w_i)_{,j} - T_{ij} v_{i,j} - C_{ij} w_{i,j},$$

per cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} [\operatorname{div} \tilde{T} \cdot \vec{v} + \operatorname{div} \tilde{C} \cdot \vec{w}] dS &= \int_{S(t)} (T_{ij} v_i + C_{ij} w_i)_{,j} dS + \\ &\quad + \int_{S(t)} [\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w}] dS. \end{aligned}$$

A questo punto operiamo sul primo integrale a secondo membro con le formule di Gauss-Ostrogradsky, per ottenere il risultato cercato:

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} (T_{ij} v_i + C_{ij} w_i)_{,j} dS &= \int_{\partial S(t)} (T_{ij} v_i + C_{ij} w_i) n_j d\Sigma = \\ &= \int_{\partial S(t)} [T_{ij} n_j v_i + C_{ij} n_j w_i] d\Sigma = \int_{\partial S(t)} [T_i(\vec{n}) v_i + C_i(\vec{n}) w_i] d\Sigma = \\ &= \int_{\partial S(t)} [\vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{v} + \vec{C}(\vec{n}) \cdot \vec{w}] d\Sigma = \int_{\partial S(t)} [\vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{g} \cdot \vec{w}] d\Sigma. \end{aligned}$$

Siamo così giunti alla tesi.

## 2.4 Assiomi della termodinamica per un fluido micropolare

Vediamo ora se si può impostare il problema del moto per un fluido micropolare in un ambito puramente meccanico.

Abbiamo a disposizione le seguenti equazioni, valide in  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \dot{I} &= 0 \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T} \\ \rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + \operatorname{div} \tilde{C} + \vec{T}^{(e)}.\end{aligned}$$

Le incognite scalari sono  $v_i, w_i, \rho, I, T_{ij}, C_{ij}$ ; in totale abbiamo 26 incognite scalari. Le equazioni scalari invece sono soltanto 8. Occorrono dunque altre 18 equazioni scalari indipendenti per avere pareggio tra numero di incognite scalari ed equazioni scalari. Ma finora non abbiamo introdotto le relazioni sforzo-deformazione per il fluido micropolare che sono fornite dall'esperienza e devono caratterizzare il comportamento meccanico del corpo reale schematizzato dal fluido stesso. Poiché abbiamo due tensori degli sforzi, si devono assegnare due relazioni sforzo-deformazione: una per  $\tilde{T}$  e una anche per  $\tilde{C}$ . Effettivamente queste sono equivalenti a 18 equazioni scalari. Tuttavia l'esperienza mostra che in tali relazioni spesso compaiono nuove incognite di tipo termodinamico, per esempio la temperatura  $\vartheta$ .

Dunque in generale per un fluido micropolare è necessario impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Richiamiamo allora brevemente il primo assioma ed il secondo assioma della termodinamica per i corpi continui, assiomi che sussistono anche per i fluidi micropolari.

Enunciamo il primo assioma della termodinamica per un corpo continuo.

**Assioma 2.3. I assioma della termodinamica.** *Dato un corpo continuo in moto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{dW}{dt}(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t). \quad (2.4.1)$$

Nella (2.4.1)  $W(t)$  è l'energia totale del corpo continuo al tempo  $t$  data da

$$W(t) = T(t) + K(t),$$

dove  $K(t)$  è l'energia interna definita da

$$K(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) k(P, t) dS$$

con  $k$  energia interna specifica.

Inoltre  $\mathcal{Q}(t)$  è la potenza calorica totale del corpo all'istante  $t$  che ha la forma seguente:

$$\mathcal{Q}(t) = \int_{S(t)} [\rho r - \operatorname{div} \vec{q}] dS,$$

dove  $r$  è la densità della potenza calorica dovuta a sorgenti interne di calore e  $\vec{q}$  è il vettore flusso di calore.

Per un fluido micropolare la definizione delle grandezze che intervengono nel primo assioma della termodinamica che non abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti, cioè  $K, k, \mathcal{Q}, r, \vec{q}$  è la stessa che per ogni altro corpo continuo. Nel seguito assumeremo  $k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}), r \in \mathcal{C}(\mathcal{S}), \vec{q} \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ .

Osserviamo ora che il primo assioma della termodinamica può essere enunciato in forma ridotta tenendo presente l'equazione che traduce il teorema dell'energia cinetica che, come prima abbiamo visto, sussiste anche per un fluido micropolare

$$\frac{d}{dt} T(t) = \Pi_e(t) + \Pi_i(t)$$

Poiché  $W = T + K$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} (T + K)(t) = \Pi_e(t) + \mathcal{Q}(t),$$

Sottraendo membro a membro da quest'ultima equazione la precedente si ottiene la seguente formulazione del primo assioma della termodinamica che sussiste anche per i fluidi micropolari:

$$\frac{dK}{dt}(t) = \mathcal{Q}(t) - \Pi_i(t). \quad (2.4.2)$$

Vediamo ora di dedurre dall'equazione che traduce in forma globale il primo assioma della termodinamica un'equazione indefinita per un fluido micropolare. A tal fine consideriamo la seguente equazione, valida per ogni sottocorpo  $\mathcal{C}^*$ :

$$\frac{dK^*}{dt} = \mathcal{Q}^* - \Pi_i^*, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.4.3)$$

Teniamo presente che:

$$K^*(t) = \int_{S^*(t)} \rho k dS,$$

da cui per il corollario del teorema del trasporto, deduciamo:

$$\frac{dK^*}{dt}(t) = \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS.$$

Ricordando le espressioni viste per la potenza calorica e per la potenza delle forze interne, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} \rho \dot{k} dS &= \int_{S^*(t)} [\rho r - \operatorname{div} \vec{q}] dS + \\ &+ \int_{S^*(t)} \left[ \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} \right] dS. \end{aligned}$$

Se nella precedente equazione portiamo tutto a primo membro, e riuniamo le funzioni integrande sotto un unico segno di integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{S^*(t)} \left[ \rho \dot{k} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} + \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} \right] dS &= 0, \\ \forall S^*(t) \text{ chiusura di un dominio regolare } \subset S(t), \forall t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte la funzione integranda è continua su  $\mathcal{S}$ . Deduciamo allora l'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica per i fluidi micropolari:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.4.4)$$

Tale equazione è detta anche **equazione dell'energia per un fluido micropolare**.

Richiamiamo ora l'enunciato del II assioma della termodinamica per un corpo continuo.

**Assioma 2.4. II assioma della termodinamica.** *Dato un corpo  $\mathcal{C}$  in moto regolare nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , si ha:*

$$\Gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

$\Gamma(t)$  è la produzione totale di entropia del corpo continuo al tempo  $t$  così definita:

$$\Gamma(t) = \frac{dH}{dt}(t) - \int_{S(t)} \frac{\rho r}{\vartheta} dS + \int_{\partial S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\vartheta} d\Sigma \quad (2.4.5)$$

dove  $H(t)$  è l'entropia del corpo al tempo  $t$  data da

$$H(t) = \int_{S(t)} \rho(P, t) h(P, t) dS$$

con  $h$  entropia specifica.

Come per il I assioma della termodinamica, per un fluido micropolare la definizione delle grandezze che intervengono nel II assioma:  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $h$ ,  $\vartheta$  è la stessa che si dà per un generico corpo continuo. Ovviamente si assume  $\vartheta > 0$ ,  $h, \vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ .

Ci proponiamo a questo punto di dedurre dalla disuguaglianza globale che traduce il II assioma della termodinamica una disequazione in forma locale.

Poiché l'enunciato dell'assioma della termodinamica per un fluido micropolare è uguale a quello di ogni corpo continuo, scriviamo direttamente, senza svolgere i conti in maniera dettagliata, la disuguaglianza che si ottiene per un corpo continuo classico:

$$\rho \vartheta \dot{h} - \rho r + \operatorname{div} \vec{q} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.4.6)$$

Ora, dall'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica, equazione (2.4.4), ricaviamo:

$$\rho r - \operatorname{div} \vec{q} = \rho \dot{k} - \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} + \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w}.$$

Sostituendo nell'equazione (2.4.6) otteniamo

$$\rho(\vartheta \dot{h} - \dot{k}) + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.4.7)$$

La disequazione ottenuta è quella che cercavamo.

Tuttavia spesso, in luogo di questa, si utilizza una disequazione in cui compare l'energia specifica libera  $\psi = k - \vartheta h$ . Osserviamo che:

$$\psi = k - \vartheta h \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{k} - \vartheta \dot{h} - \dot{\vartheta} h \quad \Rightarrow \quad \dot{k} - \vartheta \dot{h} = \dot{\psi} + h \dot{\vartheta}.$$

Allora possiamo riscrivere l'equazione (2.4.7) nella forma:

$$\rho(\dot{\psi} + h \dot{\vartheta}) - \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} + \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vec{q} \leq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (2.4.8)$$

Quest'ultima disequazione prende il nome di **disequazione di Clausius - Duhem per i fluidi micropolari**.



# Capitolo 3

## Fluidi micropolari viscosi lineari

### 3.1 Equazioni costitutive per i fluidi micropolari viscosi lineari

A questo punto consideriamo una particolare sottoclasse di fluidi micropolari, ossia quella dei fluidi micropolari viscosi lineari.

**Definizione 3.1.** *Un fluido micropolare viscoso lineare, dal punto di vista meccanico, è un fluido micropolare caratterizzato dalle due seguenti relazioni sforzo - deformazione:*

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= (-p + \lambda \operatorname{tr} \tilde{D})\tilde{a} + 2\mu \tilde{D} + 2\mu_r \tilde{E} + 2\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}, \\ \tilde{C} &= (c_0 \operatorname{tr} \tilde{d})\tilde{a} + 2c_d \tilde{d} + 2c_a \tilde{e},\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

dove:

- $\tilde{D}$  e  $\tilde{E}$  sono rispettivamente la parte simmetrica ed emisimmetrica di  $\operatorname{grad} \vec{v}$  ( $\operatorname{tr} \tilde{D} = \operatorname{div} \vec{v}$ );
- $\tilde{d}$  e  $\tilde{e}$  sono rispettivamente la parte simmetrica ed emisimmetrica di  $\operatorname{grad} \vec{w}$  ( $\operatorname{tr} \tilde{d} = \operatorname{div} \vec{w}$ );
- $p = p(P, t)$  è la pressione del fluido;
- $\lambda, \mu, \mu_r, c_0, c_d, c_a$  sono detti coefficienti di viscosità, e in particolare:  $\lambda$  e  $\mu$  coefficienti di viscosità classici,  $\mu_r$  coefficiente di viscosità di microrotazione,  $c_0, c_d, c_a$  coefficienti di viscosità angolare. Tutti i coefficienti di viscosità dipendono in generale da  $\vartheta$  e sono forniti dall'esperienza.

Osserviamo che, nell'espressione di  $\tilde{T}$ , la parte simmetrica è data da:

$$(-p + \lambda \operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D},$$

che coincide con l'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy per i fluidi viscosi classici, mentre la parte emisimmetrica di  $\tilde{T}$  è data da:

$$2\mu_r \tilde{E} + 2\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}.$$

Si noti che se  $\mu_r = 0$  la parte emisimmetrica di  $\tilde{T}$  si annulla e la sua espressione si riduce a quella del tensore degli sforzi di Cauchy per i fluidi viscosi classici.

Inoltre rileviamo che se il fluido è incomprimibile, essendo  $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{tr}(\tilde{D}) = 0$ , la relazione sforzo-deformazione per  $\tilde{T}$  si riduce a:

$$\tilde{T} = -p\tilde{a} + 2\mu \tilde{D} + 2\mu_r \tilde{E} + 2\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w} \quad (3.1.2)$$

e dunque non interviene il coefficiente di viscosità  $\lambda$ .

Vogliamo ora vedere che forma assumono le due equazioni indefinite della meccanica dei fluidi micropolari viscosi lineari alla luce delle espressioni di  $\tilde{T}$  e  $\tilde{C}$  appena introdotte.

A tale scopo supponiamo  $\lambda, \mu, \mu_r, c_0, c_d, c_a$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e  $\vec{v}, \vec{w}$  di classe  $\mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{S})$ . Richiediamo anche che  $p \in \mathcal{C}^{1,0}(\mathcal{S})$ .

Ricordiamo che la prima equazione indefinita della meccanica dei fluidi micropolari ha la forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{T}.$$

Poichè i primi due addendi di  $\tilde{T}$  forniscono l'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy per i fluidi viscosi classici, avremo:

$$\operatorname{div} \tilde{T} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2\operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E} + \mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}).$$

Di conseguenza, la prima equazione indefinita della meccanica dei fluidi micropolari viscosi lineari assume la forma:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2\operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E} + \mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}), \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.1.3)$$

Ovviamente se il fluido è incomprimibile nella (3.1.3) non compare il termine  $\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v})$  e dunque l'equazione si riduce a

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + 2\operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E} + \mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}), \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.1.4)$$

La seconda equazione indefinita della meccanica dei fluidi micropolari, in generale, ha la forma:

$$\rho I \dot{\vec{w}} = \rho \vec{G} + \operatorname{div} \tilde{C} + \vec{T}^{(e)}. \quad (3.1.5)$$

Ora, si può facilmente dimostrare che:

$$\operatorname{div} \tilde{C} = \operatorname{grad}(c_0 \operatorname{div} \vec{w}) + 2 \operatorname{div}(c_d \tilde{d} + c_a \tilde{e}). \quad (3.1.6)$$

Ricordiamo che  $\vec{T}^{(e)} = \tilde{\theta} \cdot \tilde{T}^T$  è non nullo se e solo se  $\tilde{T}$  non è simmetrico. In componenti risulta:

$$\begin{aligned} T_i^{(e)} &= \theta_{ijk} T_{kj} = 2 \mu_r \theta_{ijk} (E_{kj} + \theta_{kjl} w_l) = \\ &= 2 \mu_r \left( \theta_{ijk} \frac{v_{k,j} - v_{j,k}}{2} + \theta_{ijk} \theta_{kjl} w_l \right) = 2 \mu_r \left( \frac{1}{2} \theta_{ijk} v_{k,j} - \frac{1}{2} \theta_{ijk} v_{j,k} - \theta_{kji} \theta_{kjl} w_l \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

D'altra parte:

$$\theta_{ijk} v_{k,j} = (\operatorname{rot} \vec{v})_i, \quad \theta_{ijk} v_{j,k} = -\theta_{ikj} v_{j,k} = -(\operatorname{rot} \vec{v})_i, \quad \theta_{kji} \theta_{kjl} = 2a_{il} = 2\delta_{il}.$$

Nell'ultima relazione abbiamo sfruttato un noto legame tra il tensore di Ricci ed il tensore fondamentale.

In base a questi risultati, l'espressione di  $T_i^{(e)}$  ottenuta nella (3.1.7) assume la forma

$$\begin{aligned} T_i^{(e)} &= 2 \mu_r \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \vec{v})_i + \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \vec{v})_i - 2 \delta_{il} w_l \right] = \\ &= 2 \mu_r ((\operatorname{rot} \vec{v})_i - 2 w_i). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

In forma vettoriale l'espressione di  $\vec{T}^{(e)}$  è quindi la seguente:

$$\vec{T}^{(e)} = 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}). \quad (3.1.9)$$

In conclusione, la seconda equazione indefinita della meccanica dei fluidi micropolari viscosi lineari, utilizzando le due relazioni sforzo-deformazione, diventa:

$$\rho I \dot{\vec{w}} = \rho \vec{G} + \operatorname{grad}(c_0 \operatorname{div} \vec{w}) + 2 \operatorname{div}(c_d \tilde{d} + c_a \tilde{e}) + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}). \quad (3.1.10)$$

Supponiamo ora che i coefficienti di viscosità siano tutti costanti: vogliamo vedere che forma assumono le due equazioni indefinite appena ricavate, cioè la (3.1.3) e la (3.1.10).

Innanzitutto osserviamo che, per quanto già visto nel caso dei fluidi newtoniani, risulta:

$$\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D}) = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}. \quad (3.1.11)$$

Inoltre:

$$2 \operatorname{div}(\mu_r \tilde{E}) = 2 \mu_r \operatorname{div} \tilde{E}. \quad (3.1.12)$$

Scriviamo la componente  $i$ -esima di  $\operatorname{div} \tilde{E}$ :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \tilde{E})_i &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})_{,j} = \frac{1}{2}(v_{i,jj} - v_{j,ij}) = \\ &= \frac{1}{2}[\Delta v_i - (\operatorname{div} \vec{v})_{,i}] = \frac{1}{2}[\Delta v_i - (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v})_i]. \end{aligned}$$

Allora dalla (3.1.12) otteniamo la seguente:

$$2 \operatorname{div}(\mu_r \tilde{E}) = \mu_r [\Delta \vec{v} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}]. \quad (3.1.13)$$

Inoltre osserviamo che:

$$2 \operatorname{div}(\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}) = 2 \mu_r \operatorname{div}(\tilde{\theta} \cdot \vec{w}), \quad (3.1.14)$$

In componenti, risulta:

$$[\operatorname{div}(\tilde{\theta} \cdot \vec{w})]_i = (\theta_{ij} w_{l,l})_{,j} = \theta_{ij} w_{l,l,j} = (\operatorname{rot} \vec{w})_i,$$

e quindi dalla (3.1.14) deduciamo:

$$2 \operatorname{div}(\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}) = 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w}. \quad (3.1.15)$$

In definitiva, la prima equazione indefinita diventa:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu - \mu_r) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w}. \quad (3.1.16)$$

Si osservi che, nel caso  $\mu_r = 0$ , ritroviamo qui l'equazione di Navier-Stokes che governa la dinamica dei fluidi viscosi classici newtoniani.

Se il fluido è incomprimibile la (3.1.16) ha la forma seguente

$$\rho \dot{\vec{v}} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w}. \quad (3.1.17)$$

Nel caso  $\mu_r = 0$  la (3.1.17) si riduce all'equazione di Navier-Stokes per fluidi newtoniani incomprimibili.

Per dedurre la forma che assume la seconda equazione indefinita sfruttiamo le analogie formali fra alcuni termini della (3.1.3) e della (3.1.10):

- mentre nella prima equazione compare il termine  $\operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v})$ , nella seconda troviamo il termine  $\operatorname{grad}(c_0 \operatorname{div} \vec{w})$ ;
- mentre nella prima equazione compare il termine  $\operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E})$ , nella seconda troviamo il termine  $\operatorname{div}(c_d \tilde{d} + c_a \tilde{e})$ .

Applicando i risultati appena visti ai termini analoghi nella seconda equazione indefinita, nell'ipotesi in cui i coefficienti di viscosità siano costanti, troviamo la nuova forma di tale equazione:

$$\rho I \dot{\vec{w}} = \rho \vec{G} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + (c_d + c_a) \Delta \vec{w} + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}). \quad (3.1.18)$$

## 3.2 Equazione dell'energia per un fluido micropolare viscoso lineare

Vogliamo vedere che forma assume l'equazione indefinita che traduce il primo assioma della termodinamica per un fluido micropolare viscoso lineare.

In generale, per un fluido micropolare, tale equazione è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \tilde{C} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w}. \quad (3.2.1)$$

Esaminiamo gli ultimi tre termini a secondo membro della (3.2.1):

(1) Consideriamo il termine  $\tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = T_{ij} v_{i,j}$ .

La relazione sforzo-deformazione per  $\tilde{T}$  nel caso di un fluido micropolare lineare, come prima abbiamo visto, è la seguente:

$$\tilde{T} = (-p + \lambda \operatorname{tr} \tilde{D}) \tilde{a} + 2\mu \tilde{D} + 2\mu_r \tilde{E} + 2\mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}, \quad (3.2.2)$$

da cui allora otteniamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} &= T_{ij} v_{i,j} = \\ &(-p + \lambda \operatorname{tr} \tilde{D}) \delta_{ij} v_{i,j} + 2\mu D_{ij} D_{ij} + 2\mu_r \frac{v_{i,j} - v_{j,i}}{2} v_{i,j} + 2\mu_r \theta_{ijl} w_l v_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Dimostriamo ora il seguente

**Lemma 3.1.** *Se  $\vec{u} = \vec{u}(P)$  è un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{D})$  con  $\mathcal{D}$  aperto dello spazio geometrico, allora:*

$$(u_{i,j} - u_{j,i}) u_{i,j} = (\operatorname{rot} \vec{u})^2. \quad (3.2.4)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{u})^2 &= \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} = \theta_{ijk} u_{k,j} \theta_{ilr} u_{r,l} = \theta_{ijk} \theta_{ilr} u_{k,j} u_{r,l} = \\ &\begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jr} \\ \delta_{kl} & \delta_{kr} \end{vmatrix} u_{k,j} u_{r,l} = \delta_{jl} \delta_{kr} u_{k,j} u_{r,l} - \delta_{jr} \delta_{kl} u_{k,j} u_{r,l} = \\ &u_{k,j} u_{k,j} - u_{k,j} u_{j,k} = (u_{k,j} - u_{j,k}) u_{k,j} = (u_{i,j} - u_{j,i}) u_{i,j}. \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa.

Se ora andiamo a sostituire tale risultato nella (3.2.3), tenendo conto inoltre che  $v_{i,i} = \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{tr} \tilde{D}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} &= -p \operatorname{div} \vec{v} + \lambda (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} + \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v})^2 + 2\mu_r \theta_{lij} v_{i,j} w_l = \\ &-p \operatorname{div} \vec{v} + \lambda (\operatorname{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} + \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v})^2 - 2\mu_r \theta_{lji} v_{i,j} w_l. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Osserviamo ora che  $\theta_{lj} v_{i,j} = (\text{rot } \vec{v})_l$ ; inoltre dalla equazione di continuità della massa segue che  $\text{div } \vec{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ . Infine ricordiamo che:

$$\omega(\tilde{D}) = \frac{1}{2}[\lambda(\text{tr } \tilde{D})^2 + 2\mu\tilde{D} \cdot \tilde{D}].$$

Sostituendo questi risultati nella (3.2.5) otteniamo:

$$\tilde{T} \cdot \text{grad } \vec{v} = p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) + \mu_r (\text{rot } \vec{v})^2 - 2\mu_r \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{w}. \quad (3.2.6)$$

Si noti come i primi due termini nel secondo membro della (3.2.6) compaiono anche per i fluidi viscosi classici, al contrario degli altri, in cui intervengono  $\mu_r$  e  $\vec{w}$ .

- (2) Esaminiamo ora il termine  $\tilde{C} \cdot \text{grad } \vec{w}$  che compare a secondo membro nell'equazione (3.2.1), tenendo presente la relazione sforzo - deformazione per  $\tilde{C}$ . Sfruttando i passaggi precedenti nel punto (1) e un'analogia formale fra una parte di  $\tilde{T}$  e  $\tilde{C}$ , otteniamo:

$$\tilde{C} \cdot \text{grad } \vec{w} = 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\text{rot } \vec{w})^2, \quad (3.2.7)$$

dove, analogamente alla forma quadratica  $\omega(\tilde{D})$ , definiamo:

$$\omega_c(\tilde{d}) = \frac{1}{2}[c_0(\text{tr } \tilde{d})^2 + 2c_d \tilde{d} \cdot \tilde{d}].$$

- (3) Consideriamo infine il termine  $\vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w}$ .

Grazie alla (3.1.9), si ha:

$$\vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} = 2\mu_r (\text{rot } \vec{v} - 2\vec{w}) \cdot \vec{w} = 2\mu_r (\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{w} - 2\vec{w}^2). \quad (3.2.8)$$

Riscriviamo ora l'equazione (3.2.1) sfruttando i risultati trovati:

$$\begin{aligned} \rho \dot{k} &= \rho r - \text{div } \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) + \mu_r (\text{rot } \vec{v})^2 + \\ &\quad - 4\mu_r \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{w} + 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\text{rot } \vec{w})^2 + 4\mu_r \vec{w}^2 = \\ &= \rho r - \text{div } \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) + 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\text{rot } \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la relazione:

$$\begin{aligned} \mu_r (\text{rot } \vec{v})^2 - 4\mu_r \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{w} + 4\mu_r \vec{w}^2 &= 4\mu_r \left[ \frac{(\text{rot } \vec{v})^2}{4} - \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w}^2 \right] = \\ &= 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione che traduce il primo assioma della termodinamica ossia l'equazione dell'energia per i fluidi micropolari viscosi lineari è la seguente:

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) + 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\operatorname{rot} \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\operatorname{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2. \quad (3.2.9)$$

Se il fluido è incomprimibile la (3.2.9) si riduce a

$$\rho \dot{k} = \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} + 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\operatorname{rot} \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\operatorname{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 \quad (3.2.10)$$

poiché  $\dot{\rho} = 0$  e  $\operatorname{tr} \tilde{D} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

### 3.3 Equazioni costitutive per un fluido micropolare viscoso lineare dal punto di vista termodinamico

Precisiamo le equazioni costitutive che caratterizzano dal punto di vista termodinamico per un fluido micropolare viscoso lineare.

Come nel caso dei fluidi viscosi classici, si distingue tra:

- fluido comprimibile;
- fluido incomprimibile.

(1) Fluido comprimibile.

Le equazioni costitutive sono le stesse dei fluidi viscosi classici.

Abbiamo dunque le tre equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}), & \text{con } \mathcal{V} &= \frac{1}{\rho}, \\ p &= \hat{p}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathcal{V}}(\vartheta, \mathcal{V}), \\ h &= \hat{h}(\vartheta, \mathcal{V}) = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \mathcal{V}), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

per le quali valgono tutte le osservazioni fatte nel primo capitolo e la legge di propagazione del calore :

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \vartheta,$$

con  $\beta = \beta(\vartheta, \operatorname{grad} \vartheta, P)$  detto *coefficiente di conducibilità termica*.

(2) Fluido incompressibile.

Poiché essere soddisfatta la condizione di incompressibilità, come nel caso di un fluido viscoso classico incompressibile,  $\mathcal{V} = 1/\rho$  non è più variabile di stato, e quindi non è più variabile di stato nemmeno la sua coniugata  $p$ , che risulta una grandezza puramente meccanica.

Le variabili di stato si riducono a 3:  $\psi$ ,  $\theta$  e  $h$  e le equazioni di stato si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned}\psi &= \widehat{\psi}(\vartheta), \\ h &= \widehat{h}(\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}\widehat{\psi}(\vartheta).\end{aligned}$$

La legge di propagazione del calore è ancora data da:

$$\vec{q} = -\beta \text{grad}\theta.$$

La propagazione del calore è dunque isotropa sia nel caso di un fluido comprimibile sia nel caso di un fluido incompressibile.

Resta da stabilire quali sono le restrizioni imposte alle equazioni costitutive dal secondo assioma della termodinamica.

Precisamente si dimostra il seguente:

**Teorema 3.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni costitutive per un fluido micropolare viscoso lineare (isotropo) comprimibile siano compatibili con il secondo assioma della termodinamica è che siano soddisfatte dai parametri materiali le seguenti condizioni di segno:*

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \mu_r \geq 0, \quad (3.3.2)$$

$$3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad c_d \geq 0, \quad c_a \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (3.3.3)$$

L'analogia condizione per un fluido micropolare viscoso lineare (isotropo) incompressibile è data da

$$\mu \geq 0, \quad \mu_r \geq 0, \quad 3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad c_d \geq 0, \quad c_a \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte sufficiente del teorema.

Scriviamo l'equazione di Clausius - Duhem per un generico fluido micropolare:

$$\rho(\dot{\psi} + h\dot{\theta}) - \tilde{T} \cdot \text{grad}\vec{v} - \tilde{C} \cdot \text{grad}\vec{w} + \vec{T}^{(e)} \cdot \vec{w} + \frac{1}{\vartheta} \text{grad}\vartheta \cdot \vec{q} \leq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (3.3.4)$$

Vediamo che forma assume il primo membro di tale disequazione per un fluido micropolare viscoso lineare comprimibile, sfruttando le equazioni di stato in cui



$\vartheta$  e  $\mathcal{V}$  sono le variabili fondamentali.

In primo luogo abbiamo

$$\psi = \widehat{\psi}(\vartheta, \mathcal{V}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathcal{V}} = -\widehat{h}\dot{\vartheta} + \frac{\widehat{p}}{\rho^2} \dot{\rho}.$$

Inoltre abbiamo precedentemente dimostrato che:

$$\begin{aligned} \widetilde{T} \cdot \text{grad } \vec{v} + \widetilde{C} \cdot \text{grad } \vec{w} - \widetilde{T}^{(e)} \cdot \vec{w} &= \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + 2\omega(\widetilde{D}) + 2\omega_c(\widetilde{d}) + \\ &+ c_a (\text{rot } \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2. \end{aligned}$$

Tenendo conto di questi risultati e ricordando che:  $\vec{q} = -\beta \text{grad } \vartheta$ , vediamo che il primo membro della disequazione di Clausius-Duhem si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \rho \left( -\widehat{h}\dot{\vartheta} + h\dot{\vartheta} + \frac{\widehat{p}}{\rho^2} \dot{\rho} \right) - \frac{p}{\rho} \dot{\rho} - 2\omega(\widetilde{D}) - 2\omega_c(\widetilde{d}) + \\ - c_a (\text{rot } \vec{w})^2 - 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 - \frac{\beta}{\vartheta} \text{grad}^2 \vartheta, \end{aligned}$$

che, opportunamente semplificata, si riduce a:

$$-2\omega(\widetilde{D}) - 2\omega_c(\widetilde{d}) - c_a (\text{rot } \vec{w})^2 - 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 - \frac{\beta}{\vartheta} \text{grad}^2 \vartheta.$$

Avremo perciò che le equazioni costitutive del fluido micropolare preso in esame sono compatibili con il secondo assioma della termodinamica se e solo se:

$$2\omega(\widetilde{D}) + 2\omega_c(\widetilde{d}) + c_a (\text{rot } \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 + \frac{\beta}{\vartheta} \text{grad}^2 \vartheta \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S}, \quad (3.3.5)$$

qualunque sia la sua evoluzione.

E' abbastanza semplice dimostrare la parte sufficiente del teorema, ossia che, se valgono tutte le condizioni di segno assunte per ipotesi, allora la disuguaglianza (3.3.5) è verificata quale che sia l'evoluzione del fluido.

Infatti, le condizioni di segno (3.3.2)<sub>1,2</sub> e (3.3.3)<sub>1,2</sub> implicano che  $\omega(\widetilde{D})$  e  $\omega_c(\widetilde{d})$  sono semidefinite positive.

Le disuguaglianze (3.3.2)<sub>3</sub>, (3.3.3)<sub>3</sub> comportano:

$$4\mu_r \left( \frac{\text{rot } \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 \geq 0, \quad c_a (\text{rot } \vec{w})^2 \geq 0.$$

Infine la condizione  $\beta \geq 0$  assicura che:

$$\frac{\beta}{\vartheta} \text{grad}^2 \vartheta \geq 0,$$

qualunque sia l'evoluzione del fluido.

Abbiamo quindi dimostrato la parte sufficiente del teorema per i fluidi micropolari viscosi lineari comprimibili. Tralasciamo la dimostrazione della parte necessaria in quanto molto complessa.

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema relativa ad un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile.

Sfruttando le equazioni costitutive del fluido, si ha:

$$\psi = \widehat{\psi}(\vartheta) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = -h \dot{\vartheta}.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \widetilde{T} \cdot \text{grad} \vec{v} + \widetilde{C} \cdot \text{grad} \vec{w} - \overline{T}^{(e)} \cdot \vec{w} &= \\ &= 2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} + 2\omega_c(\widetilde{d}) + c_a (\text{rot} \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\text{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2, \end{aligned}$$

in quanto, essendo il fluido incomprimibile,  $\dot{\rho} = 0$  e  $\text{tr} \widetilde{D} = \text{div} \vec{v} = 0$ .

Abbiamo quindi la seguente forma per la disequazione di Clausius - Duhem per un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile:

$$2\mu \widetilde{D} \cdot \widetilde{D} + 2\omega_c(\widetilde{d}) + c_a (\text{rot} \vec{w})^2 + 4\mu_r \left( \frac{\text{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2 + \frac{\beta}{\theta} \text{grad} \theta \geq 0, \quad \text{in } \mathcal{S},$$

quale che sia l'evoluzione del fluido. Da tale disequazione vediamo che la parte sufficiente del teorema è evidente.

Tralasciamo anche in questo caso la dimostrazione della parte necessaria.

Nel seguito supporremo che siano sempre soddisfatte le condizioni di segno sui parametri materiali di un fluido micropolare viscoso lineare conseguenza del secondo assioma della termodinamica.

### 3.4 Impostazione del problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare

In primo luogo vediamo se per un fluido micropolare viscoso lineare comprimibile è possibile impostare il problema del moto in ambito puramente meccanico.

In tale ambito alle due equazioni indefinite (3.1.3), (3.1.5) o (3.1.16), (3.1.16) possiamo associare soltanto l'equazione di continuità della massa e la corrispondente per il coefficiente di microinerzia.

Facendo il bilancio fra numero di equazioni a disposizione e numero di incognite, abbiamo in totale 9 incognite scalari:  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $\rho$ ,  $I$ ,  $p$  (più eventualmente  $\vartheta$  se i coefficienti di viscosità non sono costanti), ma solo 8 equazioni scalari; di conseguenza non è possibile impostare il problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare comprimibile rimanendo in ambito puramente meccanico, ma dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo complesso.

Per impostare tale problema abbiamo a disposizione le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \dot{I} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E} + \mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}) - \operatorname{grad} p, \\ \rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + \operatorname{grad}(c_0 \operatorname{div} \vec{w}) + 2 \operatorname{div}(c_d \tilde{d} + c_a \tilde{e}) + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}), \\ \rho \dot{k} &= \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + p \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\omega(\tilde{D}) + 2\omega_c(\tilde{d}) + c_a (\operatorname{rot} \vec{w})^2 + \\ &+ 4 \mu_r \left( \frac{\operatorname{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2. \end{aligned}$$

Aggiungiamo le tre equazioni di stato e la legge di propagazione del calore:

$$\vec{q} = -\beta \operatorname{grad} \theta.$$

Ricordiamo inoltre che:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad}^T \vec{v}), & \tilde{d} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{w} + \operatorname{grad}^T \vec{w}) \\ \tilde{E} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{v} - \operatorname{grad}^T \vec{v}), & \tilde{e} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{w} - \operatorname{grad}^T \vec{w}) \end{aligned}$$

e che  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$ ,  $r$  sono campi noti.

Ora osserviamo che le incognite scalari del problema sono in totale 15:  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $\rho$ ,  $I$ ,  $p$ ,  $k$  (o  $\psi$ ),  $\theta$ ,  $h$ ,  $q_i$  e poiché le equazioni scalari indipendenti sono in totale 15, il problema termomeccanico è impostato in maniera completa per quanto riguarda il pareggio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Al sistema di equazioni scritto sopra dobbiamo poi associare le condizioni ai limiti, ossia le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Poiché le incognite del problema sono numerose, ci limitiamo soltanto a precisare le condizioni al contorno per  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  in una particolare situazione fisica.

Supponiamo che  $\forall t \in [t_0, t_1]$  la frontiera  $\partial S(t)$  sia costituita da pareti materiali rigide, di cui sia noto l'atto di moto:

$$\vec{V} = \vec{V}(P, t) \quad \forall P \in \partial S(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Essendo il fluido viscoso, le particelle di fluido aderiscono alle pareti del recipiente che lo contiene. Allora noi richiederemo che  $\vec{v}$  soddisfi alla **condizione di aderenza**, come per i fluidi viscosi classici, e che  $\vec{w}$  soddisfi a quella che è detta **condizione di stretta aderenza**, ossia che si abbia

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V}, \quad \vec{w} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{\omega}, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare dell'atto di moto  $\vec{V}$ .

Osserviamo comunque che in letteratura talvolta nella medesima situazione fisica la condizione di stretta aderenza è sostituita da un'altra condizione al contorno che coinvolge non solo il vettore di microrotazione, ma anche il rotore di  $\vec{v}$  e che trova giustificazioni sia di carattere matematico che fisico. Precisamente, nel caso che le pareti materiali rigide che costituiscono  $\partial S(t)$  siano fisse, talvolta si assume come ulteriore condizione da associare a quella di aderenza per il campo della velocità la seguente:

$$(\vec{w} - n \operatorname{rot} \vec{v}) \Big|_{\partial S(t)} = \vec{0} \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

dove  $n$  è un parametro adimensionale compreso tra 0 e 1 che dipende dalla concentrazione sulle pareti delle particelle presenti nel fluido. Il valore  $n = \frac{1}{2}$  corrisponde alla situazione fisica in cui la concentrazione di particelle sulle pareti è molto debole.

Nel seguito, per semplicità, assumeremo sempre come condizione al contorno per  $\vec{w}$  la condizione di stretta aderenza.

Vediamo ora come si imposta il problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile.

**Teorema 3.2.** *Se i cinque coefficienti di viscosità del fluido,  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $c_0$ ,  $c_d$ ,  $c_a$  sono costanti oppure se dipendono dalla temperatura, ma l'evoluzione del fluido avviene in condizioni isoterme, allora il problema del moto per un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile si può impostare in ambito puramente meccanico.*

Dimostrazione. Supponiamo che i coefficienti di viscosità siano costanti oppure che dipendano dalla temperatura, ma che l'evoluzione del fluido avvenga

in condizioni isotermitiche (e quindi i coefficienti risultano comunque costanti). Abbiamo a disposizione le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \dot{\rho} &= 0, \\ \dot{I} &= 0, \\ \rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w} - \operatorname{grad} p, \\ \rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + (c_d + c_a) \Delta \vec{w} + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}). \end{aligned}$$

Se ci limitiamo a considerare queste equazioni, nelle ipotesi in cui ci siamo posti e tenendo anche presente che per un fluido incomprimibile la pressione non è una variabile di stato, abbiamo il pareggio fra numero di equazioni scalari a disposizione e numero di incognite scalari. Infatti le incognite scalari sono in tutto 9:  $v_i, w_i, \rho, I, p$  e sono 9 anche le equazioni scalari del problema. Il problema del moto è dunque impostato in maniera completa rimanendo in ambito puramente meccanico.

Per determinare effettivamente il moto del fluido, a queste equazioni dovremo associare le condizioni iniziali, date da:

$$\begin{aligned} \rho(P, t_0) &= \rho_0(P), & I(P, t_0) &= I_0(P), \\ \vec{v}(P, t_0) &= \vec{v}_0(P), & \vec{w}(P, t_0) &= \vec{w}_0(P), & \forall P \in \partial S(t_0), \end{aligned}$$

con  $\rho_0, I_0, \vec{v}_0, \vec{w}_0$  campi assegnati.

Dovremo poi assegnare le condizioni al contorno. Supponendo che il bordo della regione occupata dal fluido sia costituito da pareti materiali rigide, imponiamo le condizioni di aderenza e di stretta aderenza :

$$\vec{v} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{V}, \quad \vec{w} \Big|_{\partial S(t)} = \vec{\omega}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Osserviamo che se almeno uno dei coefficienti di viscosità dipende dalla temperatura e l'evoluzione del fluido non avviene in condizioni isotermitiche, il problema del moto non può essere impostato in ambito puramente meccanico e di conseguenza in tale caso dobbiamo impostare il problema termomeccanico nel suo

complesso governato dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\
\dot{\rho} &= 0, \\
\dot{I} &= 0, \\
\rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + 2 \operatorname{div}(\mu \tilde{D} + \mu_r \tilde{E} + \mu_r \tilde{\theta} \cdot \vec{w}) - \operatorname{grad} p, \\
\rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + \operatorname{grad}(c_0 \operatorname{div} \vec{w}) + 2 \operatorname{div}(c_d \tilde{d} + c_a \tilde{e}) + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}), \\
\rho \dot{k} &= \rho r - \operatorname{div} \vec{q} + 2 \mu \tilde{D} \cdot \tilde{D} + 2 \omega_c(\tilde{d}) + c_a (\operatorname{rot} \vec{w})^2 + 4 \mu_r \left( \frac{\operatorname{rot} \vec{v}}{2} - \vec{w} \right)^2,
\end{aligned}$$

insieme alle due equazioni di stato e alla legge di propagazione del calore. Le incognite scalari del problema sono 15, e sono 15 le equazioni scalari a disposizione.

Se in particolare abbiamo un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile omogeneo, allora sia  $\rho$  che  $I$  non dipendono da  $P$  cosicché

$$\operatorname{grad} \rho = \vec{0}, \quad \operatorname{grad} I = \vec{0} \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Sappiamo inoltre che  $\dot{\rho} = 0$ , in quanto stiamo considerando un fluido incomprimibile. Di conseguenza:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{cost} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

In maniera del tutto analoga deduciamo:

$$\dot{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \text{cost} > 0 \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Se i coefficienti di viscosità  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $c_0$ ,  $c_d$ ,  $c_a$  sono costanti, il problema del moto si imposta mediante le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\
\rho \dot{\vec{v}} &= \rho \vec{F} + (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w} - \operatorname{grad} p, \\
\rho I \dot{\vec{w}} &= \rho \vec{G} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + (c_d + c_a) \Delta \vec{w} + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}).
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

In tutto abbiamo 7 incognite scalari e 7 equazioni scalari: possiamo quindi risolvere il problema del moto associando le condizioni iniziali e le condizioni al contorno di aderenza e stretta aderenza per  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

# Capitolo 4

## Moto di Poiseuille e di Poiseuille-Couette per un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile

### 4.1 Premesse

Sia dato un fluido micropolare viscoso lineare incomprimibile ed omogeneo con coefficienti di viscosità costanti. Assumiamo che il moto del fluido sia stazionario dal punto di vista cinematico e meccanico cosicché

$$S(t) = S = \text{regione fissa dello spazio geometrico}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}(P) &\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, & \vec{w} = \vec{w}(P) &\Rightarrow \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \vec{0}, \\ p = p(P), \quad \vec{F} = \vec{F}(P), \quad \vec{G} = \vec{G}(P) && \text{in } S. \end{aligned}$$

Sotto questa ipotesi, le equazioni del moto (3.4.1) assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \rho \vec{F} + (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \vec{w} - \operatorname{grad} p, \\ \rho I \operatorname{grad} \vec{w} \cdot \vec{v} &= \rho \vec{G} + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + (c_d + c_a) \Delta \vec{w} + \\ &\quad + 2\mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2\vec{w}), \end{aligned} \tag{4.1.1} \text{ in } S.$$

Alle equazioni (4.1.1) associamo solamente le condizioni al contorno.

Se supponiamo che il bordo di  $S$  sia costituito da pareti materiali rigide di cui è

noto l'atto di moto  $\vec{V}$ , tali condizioni hanno la forma:

$$\vec{v} \Big|_{\partial S} = \vec{V}, \quad \vec{w} \Big|_{\partial S} = \vec{\omega}, \quad (4.1.2)$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare corrispondente a  $\vec{V}$ .

Risolvere tale problema al contorno consiste nel determinare le terne  $(\vec{v}, \vec{w}, p)$ , con  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{C}^2(S)$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(S)$ , soddisfacenti al sistema di equazioni (4.1.1) ed alle condizioni al contorno (4.1.2).

Nei paragrafi successivi studieremo due particolari moti stazionari di un fluido micropolare viscoso lineare omogeneo ed incompressibile che già avevamo preso in considerazione per un fluido viscoso newtoniano incompressibile ed omogeneo: il moto di Poiseuille e il moto di Poiseuille-Couette tra due piani.

## 4.2 Moto di Poiseuille per un fluido micropolare viscoso lineare incompressibile

Supponiamo che  $S$ , la regione occupata dal fluido, sia compresa tra due piani materiali  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  paralleli, rigidi e fissi rispetto all'osservatore, che il moto sia stazionario e avvenga in assenza di forze di massa e di coppie di massa ( $\vec{F} = \vec{0}$ ,  $\vec{G} = \vec{0}$ ).

Scegliamo un riferimento cartesiano ortonormale come per i fluidi newtoniani (vedi Figura 1.1). Con tale scelta si ha

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha &= \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 = (-1)^\alpha h \right\} \quad \alpha = 1, 2 \\ S &= \left\{ P(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E} : (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_2 \in [-h, h] \right\} \end{aligned}$$

dove  $2h$  è la distanza tra i piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Le equazioni che governano il moto sono

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \operatorname{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} &= (\mu + \mu_r) \Delta \vec{v} + 2 \mu_r \operatorname{rot} \vec{w} - \operatorname{grad} p, \\ \rho I \operatorname{grad} \vec{w} \cdot \vec{v} &= (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + (c_d + c_a) \Delta \vec{w} + \\ &\quad + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v} - 2 \vec{w}) \end{aligned} \quad \text{in } S \quad (4.2.1)$$

cui sono associate le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0}, & \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0}, \\ \vec{w} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0}, & \vec{w} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$



Un *moto di Poiseuille* (stazionario) tra i due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  per il fluido micropolare è una terna  $(\vec{v}, \vec{w}, p)$  soluzione in  $S$  del problema (4.2.1), (4.2.2) tale che  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  abbiano la seguente rappresentazione analitica

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1, \quad \vec{w}(x_1, x_2, x_3) = w_3(x_2) \vec{e}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S).$$

Dunque  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono paralleli ai due piani ed ortogonali tra loro.

Come per un fluido newtoniano, la condizione di incomprimibilità espressa dalla (4.2.1)<sub>1</sub> implica

$$v_1 = v_1(x_2) \quad \text{con } x_2 \in [-h, h]$$

ed inoltre dalla rappresentazione analitica di  $\vec{w}$  si deduce:

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{in } S.$$

Avendo già sfruttato la prima equazione del sistema (4.2.1), consideriamone la seconda che scriviamo in componenti:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = (\mu + \mu_r) \Delta v_i + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{w})_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2.3)$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{w} &= \left( \frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \\ &= \frac{d w_3}{d x_2} \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Allora dalle (4.2.3) deduciamo:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad 0 &= (\mu + \mu_r) \frac{d^2 v_1}{d x_2^2} + 2 \mu_r \frac{d w_3}{d x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ i = 2 \quad 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ i = 3 \quad 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

da cui segue  $p = p(x_1)$ .

La terza equazione delle (4.1.1) in componenti assume la forma:

$$\rho I \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j = (c_d + c_a) \Delta w_i + 2 \mu_r (\operatorname{rot} \vec{v})_i - 4 \mu_r w_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2.5)$$

Tenendo presente che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \\ &= -\frac{dv_1}{dx_2} \vec{e}_3, \end{aligned}$$

si ottiene che per per  $i = 1, 2$  le equazioni precedenti si riducono all'identità  $0 = 0$ , mentre per  $i = 3$  si ha

$$0 = (c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{dx_2^2} - 2 \mu_r \frac{dv_1}{dx_2} - 4 \mu_r w_3.$$

Le equazioni che consentono di determinare il moto di Poiseuille sono dunque le seguenti:

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} (x_2) + 2 \mu_r \frac{dw_3}{dx_2} (x_2) &= \frac{dp}{dx_1} (x_1), \\ (c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{dx_2^2} (x_2) - 2 \mu_r \frac{dv_1}{dx_2} (x_2) - 4 \mu_r w_3(x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Consideriamo l'equazione (4.2.6)<sub>1</sub>: a primo membro troviamo una funzione della sola variabile  $x_2$  e a secondo membro una funzione della sola  $x_1$ . Poichè  $x_1$  e  $x_2$  sono variabili indipendenti, dovendo l'equazione sussistere  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$  e  $\forall x_2 \in [-h, h]$ , concludiamo che l'equazione è soddisfatta se e solo se entrambe le funzioni sono uguali ad una medesima costante, che denotiamo con  $-C$ . Di conseguenza la (4.2.6)<sub>1</sub> dà luogo alle due equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1} (x_1) &= -C, \\ (\mu + \mu_r) \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} (x_2) + 2 \mu_r \frac{dw_3}{dx_2} (x_2) &= -C. \end{aligned}$$

Dalla prima deduciamo:

$$p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{con } p_0 = \text{cost.}$$

Allora necessariamente in un moto di Poiseuille per un fluido micropolare la pressione è costante ( $C = 0$ ) oppure presenta un salto nella direzione dell'asse  $Ox_1$  come per un fluido newtoniano.

La determinazione della velocità e del vettore di microrotazione è dunque ricondotta al sistema

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} (x_2) + 2 \mu_r \frac{dw_3}{dx_2} (x_2) &= -C \\ (c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{dx_2^2} (x_2) - 2 \mu_r \frac{dv_1}{dx_2} (x_2) - 4 \mu_r w_3(x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

cui sono associate le condizioni al contorno di aderenza che assumono la forma

$$\begin{aligned} v_1(-h) = v_1(h) = 0, \\ w_3(-h) = w_3(h) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Le (4.2.7) costituiscono un sistema differenziale di due equazioni del secondo ordine nelle due incognite  $v_1 = v_1(x_2)$  e  $w_3 = w_3(x_2)$ , lineari, a coefficienti costanti, non omogeneo. Determiniamone la soluzione generale assumendo le seguenti condizioni di segno sui coefficienti di viscosità:

$$\mu > 0, \quad \mu_r > 0, \quad c_d, c_a \geq 0, \quad c_d + c_a > 0.$$

Dal sistema (4.2.7) possiamo dedurre una sola equazione differenziale in una sola incognita. Infatti, integrando la prima equazione abbiamo:

$$\left( \mu + \mu_r \right) \frac{d v_1}{d x_2} + 2 \mu_r w_3 = -C x_2 + C_1$$

con  $C_1$  costante arbitraria, da cui segue

$$\frac{d v_1}{d x_2} = -\frac{2 \mu_r}{\mu + \mu_r} w_3 + \frac{1}{\mu + \mu_r} (-C x_2 + C_1). \quad (4.2.9)$$

Sostituendo nella seconda equazione, otteniamo:

$$(c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{d x_2^2} - 2 \mu_r \left[ -\frac{2 \mu_r}{\mu + \mu_r} w_3 + \frac{1}{\mu + \mu_r} (-C x_2 + C_1) \right] - 4 \mu_r w_3 = 0,$$

da cui:

$$(c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{d x_2^2} - 4 \frac{\mu \mu_r}{\mu + \mu_r} w_3 = \frac{2 \mu_r}{\mu + \mu_r} (-C x_2 + C_1).$$

Dividendo entrambi i membri per  $c_d + c_a$  deduciamo

$$\frac{d^2 w_3}{d x_2^2} - \frac{4 \mu \mu_r}{(\mu + \mu_r)(c_d + c_a)} w_3 = \frac{2 \mu_r}{(\mu + \mu_r)(c_d + c_a)} (-C x_2 + C_1). \quad (4.2.10)$$

A questo punto è opportuno fare alcune considerazioni sui parametri che intervengono nella (4.2.10).

- Tenendo presente che:

$$\sqrt{\frac{4 \mu \mu_r}{(\mu + \mu_r)(c_d + c_a)}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu + \mu_r}} \sqrt{\frac{4 \mu}{c_d + c_a}},$$

poniamo:

$$N = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu + \mu_r}} = \text{cost} > 0.$$

Il parametro adimensionale  $N$  è detto *parametro di accoppiamento del fluido micropolare* poichè nella sua espressione compare sia il coefficiente di viscosità classico  $\mu$  che il coefficiente di viscosità di microrotazione  $\mu_r$ . Si prova facilmente che, a parità di  $\mu$ ,  $N$  cresce all'aumentare di  $\mu_r$  e dunque viene a rappresentare una misura della natura micropolare del fluido. Si noti che  $N < 1$ .

- Si può verificare che la radice:

$$\sqrt{\frac{4\mu}{c_d + c_a}},$$

ha le dimensioni fisiche dell'inverso di una lunghezza. Per questo poniamo:

$$\sqrt{\frac{4\mu}{c_d + c_a}} = \frac{1}{l}.$$

Anche il parametro  $l$  ha un'interpretazione fisica: fornisce una misura della dimensione delle particelle sospese nel liquido reale che noi schematizziamo col modello di fluido micropolare incompressibile.

Avendo introdotto i parametri  $N$  e  $l$  riscriviamo l'equazione (4.2.10) nella forma:

$$\frac{d^2 w_3}{dx_2^2} - \left(\frac{N}{l}\right)^2 w_3 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{N}{l}\right)^2 (-C x_2 + C_1). \quad (4.2.11)$$

Determiniamo ora la soluzione generale della (4.2.11). Tale equazione è del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. Come sappiamo dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, la sua soluzione generale è data da:

$$w_3 = \widehat{w}_3 + w_3^*,$$

dove  $\widehat{w}_3$  è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, mentre  $w_3^*$  è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Determiniamo  $\widehat{w}_3$ . Scriviamo l'equazione omogenea associata alla (4.2.11):

$$\frac{d^2 w_3}{dx_2^2} - \left(\frac{N}{l}\right)^2 w_3 = 0,$$

la cui equazione caratteristica è la seguente

$$\lambda^2 - \left(\frac{N}{l}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{N}{l}.$$

Di conseguenza:

$$\widehat{w}_3 = C_2 \exp \left\{ -\frac{N}{l} x_2 \right\} + C_3 \exp \left\{ \frac{N}{l} x_2 \right\} \quad \text{con } C_2, C_3 \text{ costanti arbitrarie.}$$

Per motivi di convenienza, esprimiamo  $\widehat{w}_3$  come combinazione lineare di  $\cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right)$  e  $\sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right)$ :

$$\widehat{w}_3 = C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right).$$

Abbiamo ancora denotato con  $C_2$  e  $C_3$  le costanti arbitrarie, anche se sono differenti da quelle che compaiono nella precedente relazione.

Ora cerchiamo una soluzione particolare della (4.2.11)  $w_3^*$  della seguente forma:

$$w_3^* = a x_2 + b, \quad \text{con } a, b = \text{costanti da determinare.}$$

Sostituendo questa espressione di  $w_3^*$  nella equazione completa otteniamo:

$$-\left( \frac{N}{l} \right)^2 (a x_2 + b) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{N}{l} \right)^2 (-C x_2 + C_1),$$

da cui deduciamo:

$$a = \frac{C}{2\mu}, \quad b = -\frac{C_1}{2\mu}.$$

In definitiva, la soluzione generale  $w_3$  della (4.2.11) è data da:

$$w_3 = \widehat{w}_3 + w_3^* = \frac{C x_2 - C_1}{2\mu} + C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right).$$

Vogliamo ora determinare  $v_1$ . A tal fine nella (4.2.9) sostituiamo a  $w_3$  la sua espressione prima ottenuta:

$$\begin{aligned} \frac{d v_1}{d x_2} &= -\frac{2\mu_r}{\mu + \mu_r} \left[ \frac{C x_2 - C_1}{2\mu} + C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) \right] + \frac{C_1 - C x_2}{\mu + \mu_r} = \\ &= -\frac{1}{\mu + \mu_r} \left[ \frac{\mu_r}{\mu} + 1 \right] (C x_2 - C_1) + \\ &\quad - 2 N^2 \left[ C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{\mu} (C x_2 - C_1) - 2 N^2 \left[ C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Integrando tale equazione arriviamo a:

$$v_1(x_2) = -\frac{C x_2^2}{2\mu} + \frac{C_1}{\mu} x_2 - 2 N l \left[ C_2 \sinh\left(\frac{N}{l} x_2\right) + C_3 \cosh\left(\frac{N}{l} x_2\right) \right] + C_4,$$

dove  $C_4$  è una costante arbitraria.

Abbiamo così ottenuto la soluzione generale  $(v_1, w_3)$  del sistema differenziale (4.2.7):

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= -\frac{C x_2^2}{2\mu} + \frac{C_1}{\mu} x_2 - 2 N l \left[ C_2 \sinh\left(\frac{N}{l} x_2\right) + C_3 \cosh\left(\frac{N}{l} x_2\right) \right] + C_4, \\ w_3(x_2) &= \frac{C}{2\mu} x_2 - \frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh\left(\frac{N}{l} x_2\right) + C_3 \sinh\left(\frac{N}{l} x_2\right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Tale soluzione dipende da 4 costanti arbitrarie che determiniamo imponendo le condizioni al contorno (4.2.8).

Per comodità nel seguito introduciamo la seguente grandezza adimensionale:

$$\frac{h}{l} =: L.$$

- Da  $v_1(-h) = 0$ , otteniamo:

$$-\frac{C h^2}{2\mu} - \frac{C_1}{\mu} h - 2 N l \left[ -C_2 \sinh(N L) + C_3 \cosh(N L) \right] + C_4 = 0. \quad (4.2.13)$$

- Imponendo  $v_1(h) = 0$ , abbiamo:

$$-\frac{C h^2}{2\mu} + \frac{C_1}{\mu} h - 2 N l \left[ C_2 \sinh(N L) + C_3 \cosh(N L) \right] + C_4 = 0. \quad (4.2.14)$$

- La condizione  $w_3(-h) = 0$  implica:

$$-\frac{C}{2\mu} h - \frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh(N L) - C_3 \sinh(N L) = 0. \quad (4.2.15)$$

- Infine, da  $w_3(h) = 0$  deduciamo:

$$\frac{C}{2\mu} h - \frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh(N L) + C_3 \sinh(N L) = 0. \quad (4.2.16)$$

Per determinare le quattro costanti arbitrarie dobbiamo risolvere il sistema algebrico costituito dalle 4 equazioni (4.2.13), (4.2.14), (4.2.15), (4.2.16) nelle incognite  $C_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Per prima cosa sottraiamo membro a membro la (4.2.13) dalla (4.2.14) e sommiamo la (4.2.15) e la (4.2.16). In tal modo otteniamo il seguente sistema algebrico lineare omogeneo nelle sole incognite  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_1 h}{\mu} - 2 N l C_2 \sinh(N L) &= 0, \\ -\frac{C_1}{\mu} + 2 C_2 \cosh(N L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Consideriamo il determinante del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu} \begin{vmatrix} h & -N l \sinh(N L) \\ -1 & \cosh(N L) \end{vmatrix} &= \frac{2}{\mu} [h \cosh(N L) - N l \sinh(N L)] = \\ &= \frac{2 l}{\mu N} [N L \cosh(N L) - N^2 \sinh(N L)]. \end{aligned}$$

Proviamo che tale determinante è sempre positivo e dunque non nullo. A tal fine dimostriamo il seguente risultato:

$$f(x) = x \cosh x - \sinh x > 0 \quad \forall x > 0. \quad (4.2.18)$$

Infatti  $f(0) = 0$  e  $f'(x) = \cosh x + x \sinh x - \cosh x = x \sinh x > 0 \quad \forall x > 0$ .

Allora segue  $N L \cosh(N L) - N^2 \sinh(N L) > 0$  poiché  $N^2 < 1$ .

Perciò il sistema algebrico (4.2.17), essendo omogeneo con determinante dei coefficienti delle incognite non nullo, ha come unica soluzione:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

A questo punto ci resta da determinare  $C_3$  e  $C_4$ . Se riscriviamo la (4.2.16) con  $C_1 = C_2 = 0$ , otteniamo

$$\frac{C}{2\mu} h + C_3 \sinh(N L) = 0,$$

da cui:

$$C_3 = -\frac{C}{2\mu} h \frac{1}{\sinh(N L)}.$$

Infine dalla (4.2.13), sfruttando i risultati trovati, otteniamo l'espressione di  $C_4$ :

$$C_4 = \frac{C h^2}{2\mu} - \frac{N l C h}{\mu} \frac{\cosh(N L)}{\sinh(N L)}.$$

Andando a sostituire le espressioni ottenute per le costanti  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , nelle (4.2.12) troviamo la soluzione del problema.

Per  $v_1$  deduciamo

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= \frac{C}{2\mu}(h^2 - x_2^2) - \frac{N l C h}{\mu} \frac{1}{\sinh(N L)} \left[ \cosh(N L) - \cosh\left(\frac{N}{l} x_2\right) \right] = \\ &= \frac{C}{2\mu} \left[ h^2 - x_2^2 - 2 \frac{h^2 N}{L} \frac{\cosh(N L) - \cosh\left(\frac{N}{l} x_2\right)}{\sinh(N L)} \right] \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Per  $w_3$  otteniamo

$$\begin{aligned} w_3(x_2) &= \frac{C}{2\mu} x_2 - \frac{C h}{2\mu} \frac{\sinh\left(\frac{N}{l} x_2\right)}{\sinh(N L)} = \\ &= \frac{C}{2\mu} \left[ x_2 - h \frac{\sinh\left(\frac{N}{l} x_2\right)}{\sinh(N L)} \right] \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

facciamo ora alcune osservazioni sui risultati trovati.

**Osservazione 4.1** Se  $C = 0$ , allora  $v_1(x_2) = w_3(x_2) = 0$ , ossia il fluido è in quiete, come si ha nel moto di Poiseuille per un fluido newtoniano.

**Osservazione 4.2** In corrispondenza di ogni salto di pressione  $C$  si ha uno ed un solo moto di Poiseuille.

**Osservazione 4.3** Notiamo che l'espressione di  $v_1$  è la somma di un primo termine identico all'espressione della velocità di un fluido newtoniano avente coefficiente di viscosità  $\mu$  in un moto di Poiseuille con salto di pressione  $C$  più un termine aggiuntivo.

Se  $C > 0$ , quest'ultimo termine per  $x_2 \in (-h, h)$  è negativo grazie alle proprietà delle funzioni iperboliche, poiché  $\frac{x_2}{l} \in (-L, L)$ ; dunque per un fluido micropolare la velocità è inferiore rispetto a quella di un fluido newtoniano nella stessa situazione fisica.

Ovviamente se  $C < 0$ , si verifica il fenomeno contrario, cioè il fluido micropolare ha velocità maggiore rispetto a quella del fluido newtoniano.

A questo punto osserviamo che è possibile scrivere in altra forma l'espressione di  $v_1$  e di  $w_3$  introducendo un secondo parametro adimensionale correlato alla



micropolarità del fluido, detto *parametro micropolare*, così definito:

$$M_p = N L. \quad (4.2.21)$$

Notiamo che, fissato  $N$ , il parametro micropolare  $M_p$  è tanto più grande quanto più sono piccole le dimensioni delle particelle sospese nel liquido reale schematizzato con il modello di fluido micropolare.

Se facciamo uso del paramero micropolare,  $v_1$  e  $w_3$  si possono scrivere nella forma seguente:

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= \frac{C h^2}{2 \mu} \left[ 1 - \left( \frac{x_2}{h} \right)^2 - 2 \frac{N^2}{M_p} \frac{\cosh M_p - \cosh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{\sinh M_p} \right], \\ w_3(x_2) &= \frac{C h}{2 \mu} \left[ \frac{x_2}{h} - \frac{\sinh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{\sinh M_p} \right], \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Siamo così arrivati a stabilire il seguente teorema:

**Teorema 4.1.** *Dato un fluido micropolare viscoso lineare incompressibile, ogni suo moto (stazionario) di Poiseuille tra due piani paralleli  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  fissi, posti ad una distanza pari a  $2h$ , nell'ipotesi  $\mu, \mu_r > 0$ ,  $c_d, c_a \geq 0$ ,  $c_d + c_a > 0$ , è della forma:*

$$\begin{aligned} p(x_1) &= -C x_1 + p_0, \quad p_0 = \text{cost} \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \\ v_1(x_2) &= \frac{C h^2}{2 \mu} \left[ 1 - \left( \frac{x_2}{h} \right)^2 - 2 \frac{N^2}{M_p} \frac{\cosh M_p - \cosh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{\sinh M_p} \right], \\ w_3(x_2) &= \frac{C h}{2 \mu} \left[ \frac{x_2}{h} - \frac{\sinh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{\sinh M_p} \right] \quad \forall x_2 \in [-h, h]. \end{aligned}$$

Vediamo ora di rappresentare graficamente velocità e microrotazione per diversi valori di  $N$  e di  $M_p$ . Poichè nelle espressioni di  $v_1$  e  $w_3$  intervengono numerosi parametri è conveniente adimensionalizzare tali grandezze come abbiamo fatto per la velocità nel caso di un fluido newtoniano. Poniamo:

$$y = \frac{x_2}{h}, \quad v(y) = \frac{v_1(h y)}{V_0}, \quad w(y) = \frac{w_3(h y) h}{V_0}, \quad V_0 = \frac{C h^2}{\mu}. \quad (4.2.23)$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} v(y) &= \frac{1}{2}(1 - y^2) - \frac{N^2}{M_p} \frac{\cosh M_p - \cosh(M_p y)}{\sinh M_p}, \\ w(y) &= \frac{1}{2} \left[ y - \frac{\sinh(M_p y)}{\sinh M_p} \right] \quad \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Per mostrare l'influenza del parametro di accoppiamento  $N$  e del parametro micropolare  $M_p$  sul moto del fluido micropolare, presentiamo nelle figure seguenti i grafici di velocità e microrotazione adimensionali per diversi valori di tali parametri.

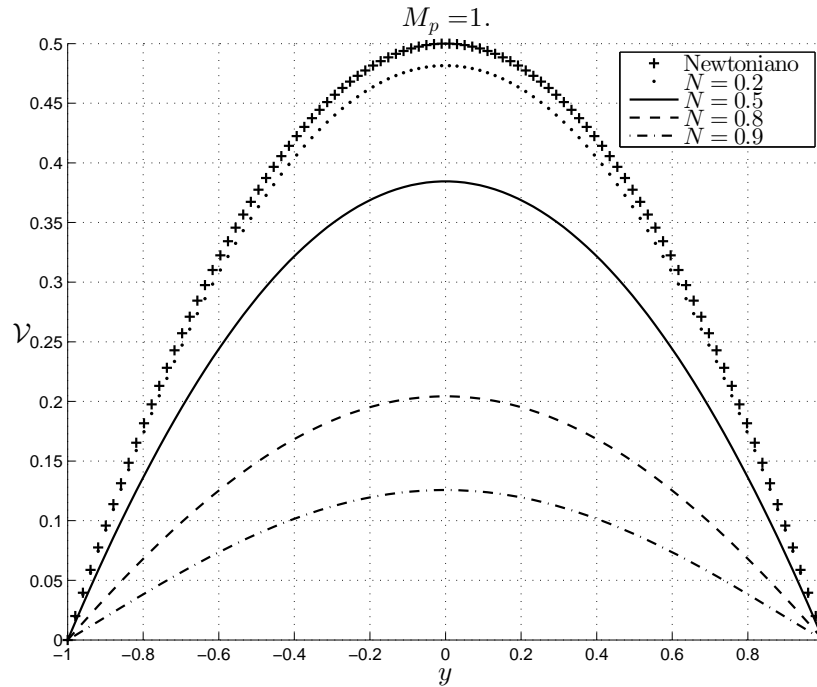


Figura 4.1: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille per  $M_p = 1$  e diversi valori di  $N$

Nella Figura 4.1 evidenziamo l'influenza del parametro  $N$  sulla velocità rappresentando anche il caso di un fluido newtoniano. In tale figura abbiamo posto  $M_p = 1$  ed abbiamo fatto assumere a  $N$  i valori : 0.2, 0.5, 0.8, 0.9. Come si vede, la velocità adimensionale  $v$  decresce all'aumentare di  $N$  ed è sempre minore di quella del fluido newtoniano. Poiché, come abbiamo sottolineato,  $N$  è una funzione crescente di  $\mu_r$ , la differenza tra la velocità del fluido micropolare e quella del fluido newtoniano aumenta all'aumentare di  $N$ , come fisicamente ci si poteva aspettare.

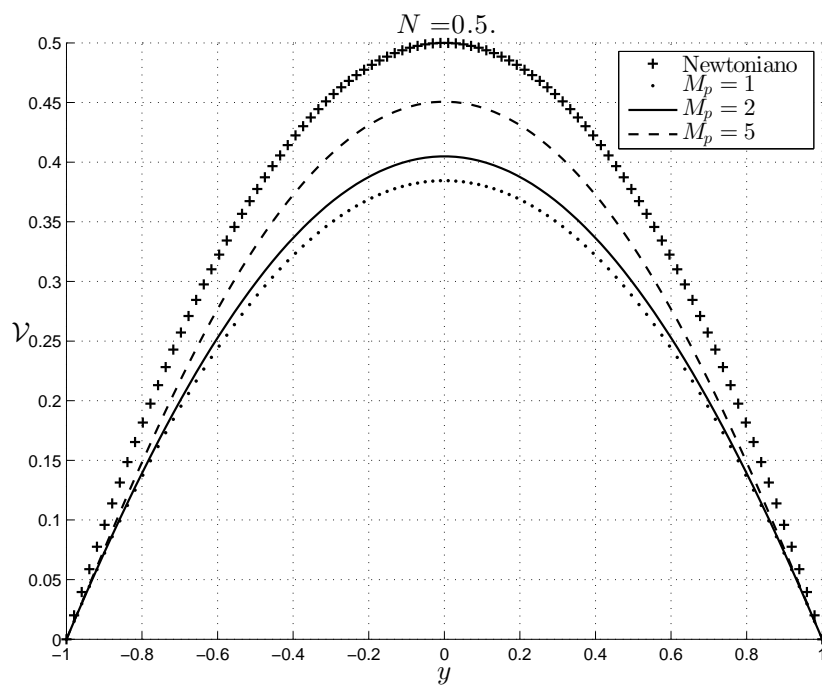


Figura 4.2: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille per  $N = 1$  e diversi valori di  $M_p$

Nella Figura 4.2, per evidenziare l'influenza del parametro  $M_p$  sulla velocità abbiamo posto  $N = 0.5$  ed abbiamo dato a  $M_p$  i valori 1, 2, 5. Osserviamo che se  $N$  è fissato, differenti valori di  $M_p$  corrispondono a differenti dimensioni delle particelle sospese nel liquido reale schematizzato dal fluido micropolare. All'aumentare di  $M_p$ , cioè al diminuire delle dimensioni delle particelle, la velocità dimensionale aumenta e si avvicina a quella di un fluido newtoniano, come ci saremmo aspettati dal punto di vista fisico.

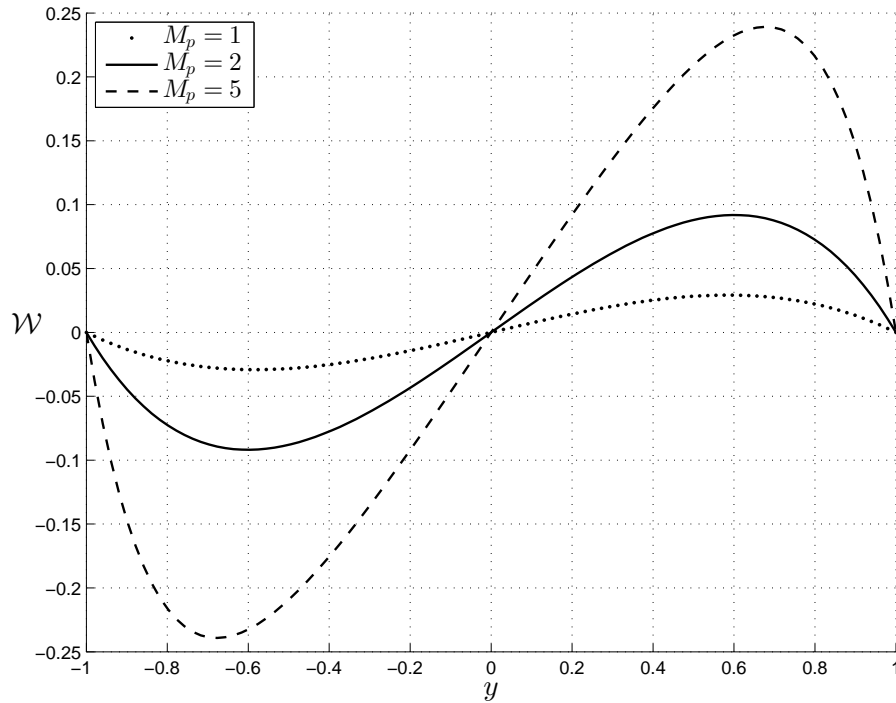


Figura 4.3: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille per diversi valori di  $M_p$

Per quanto riguarda la microrotazione, osserviamo che la sua espressione dipende solo da  $M_p$ . Nella Figura 4.3 abbiamo dato a  $M_p$  i valori 1, 2, 5 e si osserva che la funzione che descrive la microrotazione adimensionale presenta un minimo e un massimo che sono più accentuati all'aumentare di  $M_p$ .

### 4.3 Moto di Poiseuille-Couette per un fluido micropolare viscoso lineare incompressibile ed omogeneo

Consideriamo ora il moto di Poiseuille-Couette (stazionario) di un fluido viscoso lineare incompressibile ed omogeneo con coefficienti costanti soddisfacenti alle condizioni di segno  $\mu, \mu_r > 0, c_d, c_a \geq 0, c_d + c_a > 0$ . Il moto è stazionario e si svolge in assenza di forze di massa e di coppie di massa nella regione compresa tra due piani rigidi e paralleli, dei quali  $\Pi_1$  è fisso rispetto all'osservatore come nel moto di Poiseuille, mentre  $\Pi_2$  si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità  $\vec{V}$  parallela al piano stesso.

Fissiamo come riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore il riferimento  $Ox_1x_2x_3$  avente l'origine  $O$  equidistante dai due piani, l'asse  $Ox_1$  parallelo e concorde con  $\vec{V}$ , l'asse  $Ox_2$  normale ai due piani.

Con tale scelta si ha:

$$\vec{V} = V \vec{e}_1 \quad \text{con } V = \text{costante} > 0.$$

Un moto di Poiseuille-Couette (stazionario) tra i due piani è una terna  $(\vec{v}, \vec{w}, p)$  soluzione in  $S$  del sistema (4.2.1), tale che  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  abbiano la seguente rappresentazione analitica

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1, \quad \vec{w}(x_1, x_2, x_3) = w_3(x_2) \vec{e}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \xi(S)$$

e soddisfino alle seguenti condizioni al contorno di aderenza e stretta aderenza:

$$\begin{aligned} \vec{v} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0}, & \vec{v} \Big|_{\Pi_2} &= V \vec{e}_1, \\ \vec{w} \Big|_{\Pi_1} &= \vec{0}, & \vec{w} \Big|_{\Pi_2} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

L'impostazione del problema del moto procede come nel moto di Poiseuille. Dunque si perviene ad ottenere per la pressione la forma:

$$p = -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{con } p_0 = \text{cost.}$$

Allora necessariamente in un moto di Poiseuille-Couette la pressione è costante ( $C = 0$ ) oppure presenta un salto nella direzione dell'asse  $Ox_1$  come nel moto di Poiseuille e come per un fluido newtoniano.

Inoltre la coppia  $(v_1, w_3)$  soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie (4.2.7) cui sono associate le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v_1(-h) &= 0, & v_1(h) &= V, \\ w_3(-h) &= 0, & w_3(h) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Limitiamoci a considerare dapprima il caso  $C = 0$ .  
Abbiamo perciò

$$p = p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

mentre  $(v_1, w_3)$  soddisfa il sistema:

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}(x_2) + 2 \mu_r \frac{dw_3}{dx_2}(x_2) &= 0 \\ (c_d + c_a) \frac{d^2 w_3}{dx_2^2}(x_2) - 2 \mu_r \frac{dv_1}{dx_2}(x_2) - 4 \mu_r w_3(x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Scriviamone la soluzione generale che si ottiene ponendo  $C = 0$  in quella dedotta nello studio del moto di Poiseuille per il sistema (4.2.7).

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} v_1(x_2) &= \frac{C_1}{\mu} x_2 - 2 N l \left[ C_2 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) \right] + C_4, \\ w_3(x_2) &= -\frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + C_3 \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Le costanti arbitrarie  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , si determinano mediante le condizioni al contorno (4.3.2).

Precisamente otteniamo:

- da  $v_1(-h) = 0$

$$-\frac{C_1}{\mu} h - 2 N l \left[ -C_2 \sinh M_p + C_3 \cosh M_p \right] + C_4 = 0, \quad (4.3.5)$$

- imponendo  $v_1(h) = 0$

$$\frac{C_1}{\mu} h - 2 N l \left[ C_2 \sinh M_p + C_3 \cosh M_p \right] + C_4 = V, \quad (4.3.6)$$

- dalla condizione  $w_3(-h) = 0$

$$-\frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh M_p - C_3 \sinh M_p = 0, \quad (4.3.7)$$

- da  $w_3(h) = 0$

$$-\frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh M_p + C_3 \sinh M_p = 0. \quad (4.3.8)$$

Ovviamente nelle equazioni scritte sopra abbiamo utilizzato il parametro micropolare  $M_p = N L$ , introdotto nel paragrafo precedente. Se sottraiamo membro a membro dalla (4.3.8) la (4.3.7) otteniamo

$$C_3 = 0,$$

per cui le (4.3.7) e (4.3.8) si riducono a

$$-\frac{C_1}{2\mu} + C_2 \cosh M_p = 0.$$

Sottraendo poi membro a membro la (4.3.5) dalla (4.3.6) otteniamo il seguente sistema algebrico lineare nelle sole incognite  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_1 h}{\mu} - 2 N l C_2 \sinh M_p &= \frac{V}{2}, \\ -\frac{C_1}{\mu} + 2 C_2 \cosh M_p &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Tale sistema è di Cramer poiché il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è lo stesso del sistema (4.2.17) che abbiamo risolto nel moto di Poiseuille ed è quindi non nullo.

Se dividiamo entrambi i membri della prima equazione per  $h$  e sommiamo membro a membro all'equazione così ottenuta la (4.3.9)<sub>2</sub>, deduciamo:

$$2C_2 \left[ \cosh M_p - \frac{N^2}{M_p} \sinh M_p \right] = \frac{V}{2h}$$

da cui segue

$$C_2 = \frac{V M_p}{4h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)}.$$

Dalla (4.3.9)<sub>2</sub> ricaviamo:

$$\frac{C_1}{\mu} = \frac{V M_p \cosh M_p}{2h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)}.$$

Infine, dalla (4.3.5) o dalla (4.3.6) sfruttando la (4.3.9)<sub>1</sub>, deduciamo

$$C_4 = \frac{V}{2}.$$

Sostituendo nella (4.3.4) i valori trovati per le costanti arbitrarie, otteniamo la soluzione da noi cercata:

$$\begin{aligned}
v_1(x_2) &= \frac{V M_p \cosh M_p}{2h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)} x_2 + \\
&\quad - Nl \frac{V M_p}{2h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)} \sinh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) + \frac{V}{2} = \\
&\quad \frac{V}{2} \left[ 1 + \frac{(M_p \cosh M_p) \frac{x_2}{h} - N^2 \sinh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \right] \\
w_3(x_2) &= -\frac{V M_p \cosh M_p}{4h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)} + \\
&\quad \frac{V M_p}{4h(M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p)} \cosh \left( \frac{N}{l} x_2 \right) = \\
&\quad -\frac{V M_p}{4h} \frac{\cosh M_p - \cosh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \quad \forall x_2 \in [-h, h].
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Esaminiamo ora il caso  $C \neq 0$ .

Grazie alla linearità del problema, in tal caso la soluzione per il moto di Poiseuille-Couette si ottiene sommando alla soluzione trovata sopra per  $C = 0$  (vedi (4.3.10)) la soluzione ottenuta nel paragrafo precedente per il moto di Poiseuille per  $C \neq 0$  (vedi (4.2.22)).

Si ha perciò

$$\begin{aligned}
v_1(x_2) &= \frac{C h^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x_2}{h} \right)^2 - 2 \frac{N^2 \cosh M_p - \cosh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{M_p \sinh M_p} \right] + \\
&\quad \frac{V}{2} \left[ 1 + \frac{(M_p \cosh M_p) \frac{x_2}{h} - N^2 \sinh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \right], \\
w_3(x_2) &= \frac{C h}{2\mu} \left[ \frac{x_2}{h} - \frac{\sinh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{\sinh M_p} \right] - \frac{V M_p}{4h} \frac{\cosh M_p - \cosh \left( M_p \frac{x_2}{h} \right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \\
&\quad \forall x_2 \in [-h, h].
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente:

**Teorema 4.2.** *Dato un fluido micropolare viscoso lineare, incompressibile ed omogeneo, ogni suo moto (stazionario) di Poiseuille-Couette tra due piani paralleli, di cui uno fisso e l'altro in moto traslatorio rettilineo uniforme in una*



direzione parallela al piano stesso, nell'ipotesi  $\mu, \mu_r > 0, c_d, c_a \geq 0, c_d + c_a > 0$ , è della forma

$$\begin{aligned}
 p(x_1) &= -C x_1 + p_0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{con } p_0 = \text{cost}, \\
 v_1(x_2) &= \frac{C h^2}{2\mu} \left[ 1 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2 - 2 \frac{N^2}{M_p} \frac{\cosh M_p - \cosh\left(M_p \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M_p} \right] + \\
 &\quad \frac{V}{2} \left[ 1 + \frac{(M_p \cosh M_p) \frac{x_2}{h} - N^2 \sinh\left(M_p \frac{x_2}{h}\right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \right], \\
 w_3(x_2) &= \frac{C h}{2\mu} \left[ \frac{x_2}{h} - \frac{\sinh\left(M_p \frac{x_2}{h}\right)}{\sinh M_p} \right] - \frac{V M_p}{4h} \frac{\cosh M_p - \cosh\left(M_p \frac{x_2}{h}\right)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \\
 &\quad \forall x_2 \in [-h, h]
 \end{aligned}$$

dove l'asse  $Ox_1$  ha la direzione della velocità  $\vec{V}$  del piano in moto e la costante  $C$  rappresenta il salto della pressione nella direzione  $Ox_1$ .

**Osservazione 4.4.** In corrispondenza di ogni salto di pressione si ottiene uno ed un solo moto di Poiseuille-Couette.

Ci proponiamo ora di rappresentare graficamente velocità e microrotazione dapprima nel caso  $C = 0$  e successivamente nel caso  $C \neq 0$  utilizzando grandezze adimensionali.

Nel primo caso poniamo

$$y = \frac{x_2}{h}, \quad v(y) = \frac{v_1(h y)}{V}, \quad w(y) = \frac{w_3(h y) h}{V}$$

cosicchè in forma adimensionale otteniamo:

$$\begin{aligned}
 v(y) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(M_p \cosh M_p) y - N^2 \sinh(M_p y)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \right] \\
 w(y) &= -\frac{M_p}{4} \frac{\cosh M_p - \cosh(M_p y)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \quad \forall y \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

Nelle Figure 4.4 e 4.5 mostriamo l'influenza dei parametri  $N$  e  $M_p$  sulla velocità adimensionale  $v$  ponendo nella prima figura  $M_p = 1$  ed attribuendo diversi valori a  $N$ , mentre nella seconda diamo a  $N$  il valore 0.9 e facciamo variare  $M_p$ . Nelle due figure è anche rappresentato il segmento che è il grafico della velocità adimensionale nel caso di un fluido newtoniano.

Come si vede dalle figure, l'influenza sulla velocità dei due parametri  $N$  e  $M_p$  non è particolarmente significativa ed il grafico al variare dei due parametri si discosta di poco da quello di un fluido newtoniano. Nella 4.4 i grafici per  $N = 0.2$  e  $N = 0.5$  sono sovrapposti a quello del caso newtoniano, mentre per gli altri valori se ne discostano all'aumentare di  $N$ . Nella 4.5 il grafico di si discosta dal newtoniano in maniera significativa per  $M_p = 2$ , mentre si avvicina per  $M_p = 5$ .

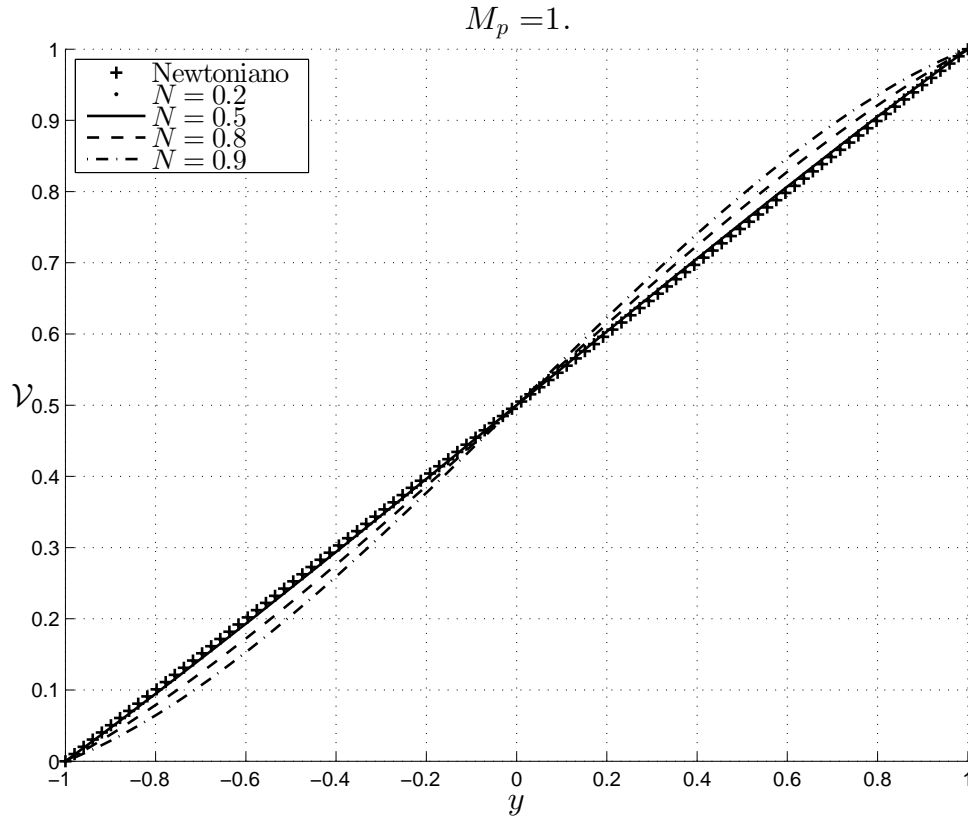


Figura 4.4: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C = 0$  per diversi valori di  $N$

Le Figure 4.6, 4.7, 4.8 mostrano l'influenza dei parametri  $N$  e  $M_p$  sulla microrotazione adimensionale  $w$ . Nella Figura 4.6 si è posto  $M_p = 1$  e si è fatto variare  $N$ , mentre nelle Figure 4.7 e 4.8 sono stati attribuiti diversi valori a  $M_p$  fissando  $N = 0.5$  in 4.7 e  $N = 0.9$  in 4.8. Come si può notare, la microrotazione è sempre negativa; in 4.6 presenta un minimo che è tanto più accentuato quanto più  $N$  è grande, in 4.7 la microrotazione diminuisce all'aumentare di  $M_p$  tendendo a divenire costante al centro dell'intervallo  $[-1, 1]$ . E' interessante la Figura 4.8 che mostra l'influenza di  $M_p$  sulla microrotazione, avendo posto  $N = 0.9$ : per  $M_p = 2$  la microrotazione assume valori più piccoli rispetto a  $M_p = 1$ , come ci si

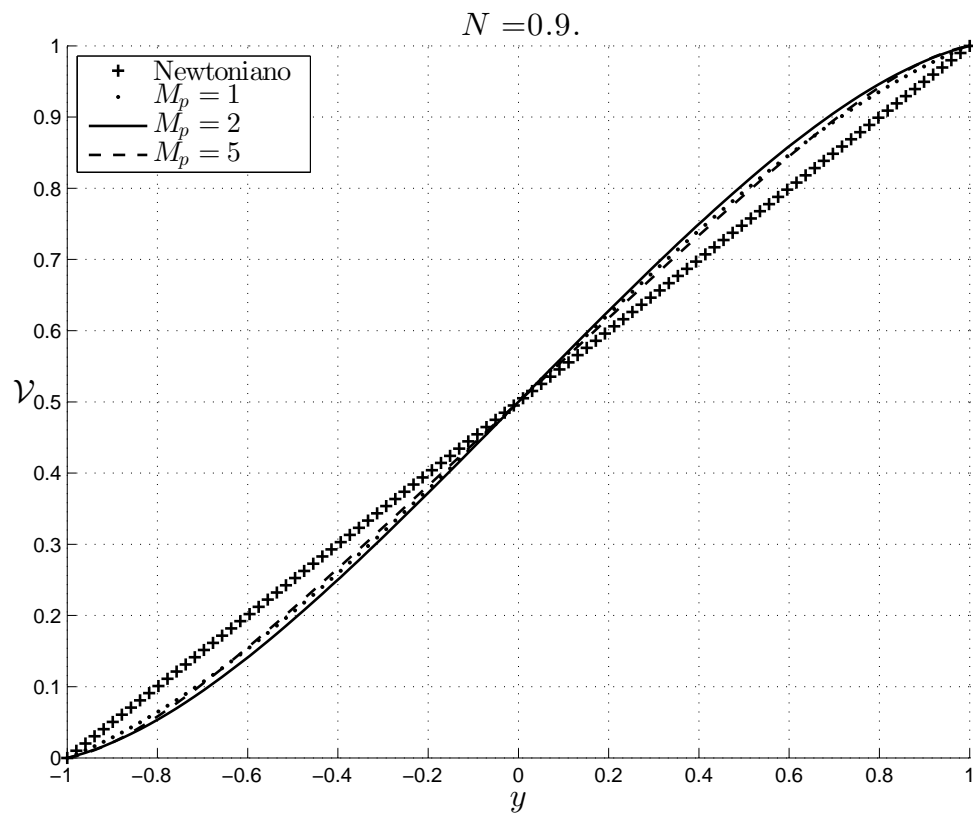


Figura 4.5: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C = 0$  per diversi valori di  $M_p$

poteva aspettare tenendo presente la 4.7, ma per  $M_p = 5$  al centro dell'intervallo  $[-1, 1]$  la microrotazione assume valori più elevati rispetto a  $M_p = 2$ , a differenza di quanto accade nella 4.7. La microrotazione tende comunque anche in tal caso ad essere costante al centro dell'intervallo di definizione.

$$M_p = 1.$$

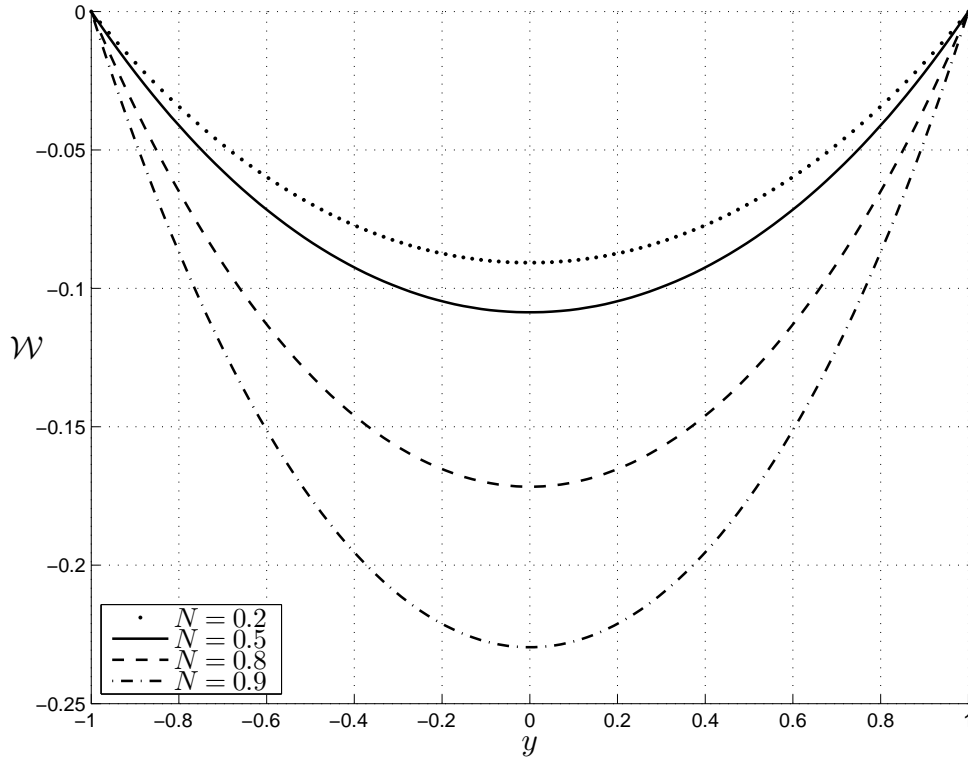


Figura 4.6: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C = 0$  per diversi valori di  $N$

Vediamo ora di rappresentare graficamente velocità e microrotazione nel caso  $C \neq 0$  sempre con una opportuna adimensionalizzazione delle varie grandezze. A tal fine poniamo:

$$y = \frac{x_2}{h}, \quad v(y) = \frac{v_1(hy)}{V_0}, \quad w(y) = \frac{w_3(hy)h}{V_0}, \quad v^* = \frac{V}{V_0}, \quad V_0 = \frac{Ch^2}{\mu}. \quad (4.3.12)$$

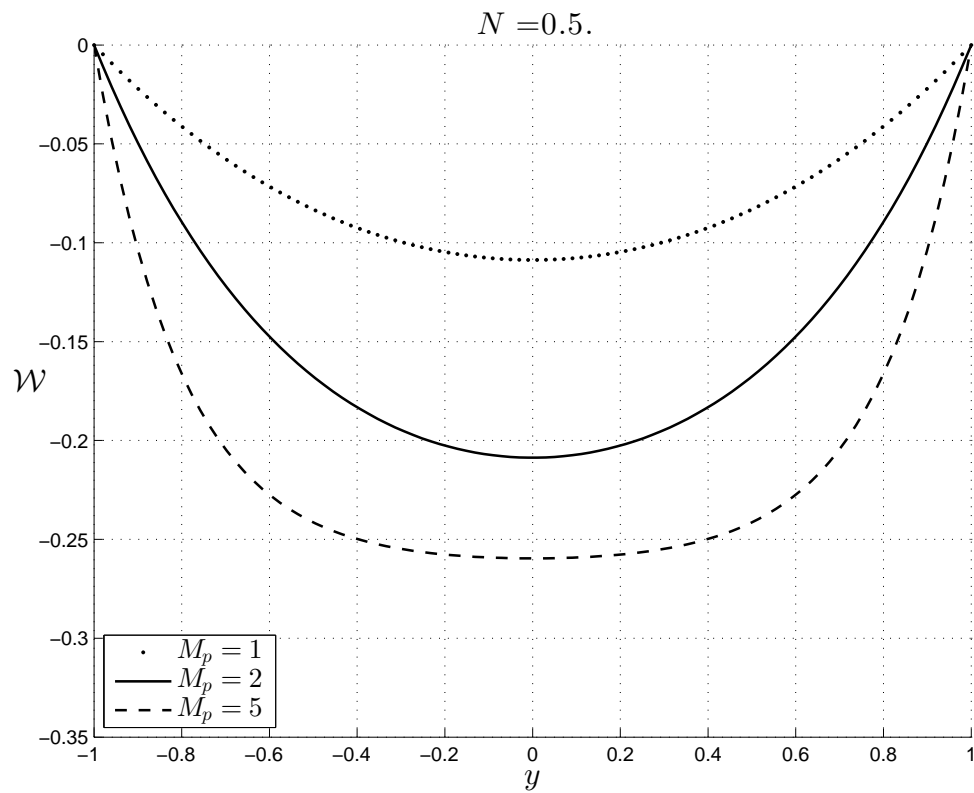


Figura 4.7: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille per diversi valori di  $M_p$  con  $N = 0.5$

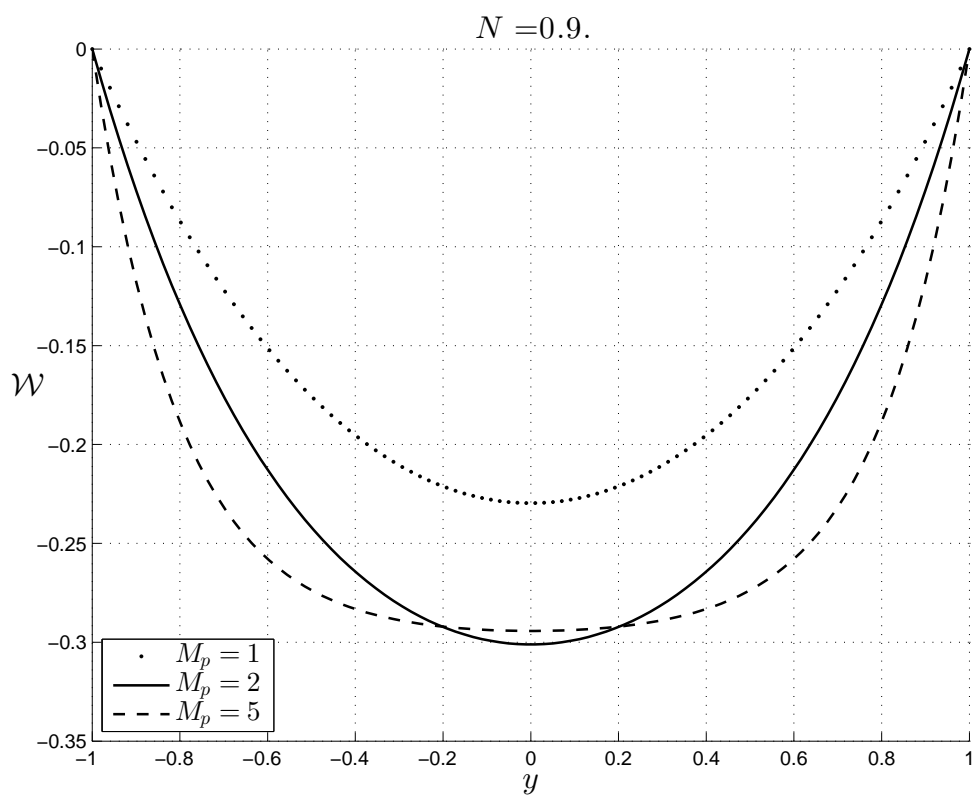


Figura 4.8: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille per diversi valori di  $M_p$  con  $N = 0.9$

Otteniamo dunque

$$v(y) = \frac{1}{2}(1 - y^2) - \frac{N^2}{M_p} \frac{\cosh M_p - \cosh(M_p y)}{\sinh M_p} + \frac{v^*}{2} \left[ 1 + \frac{(M_p \cosh M_p) y - N^2 \sinh(M_p y)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \right],$$

$$w(y) = \frac{1}{2} \left[ y - \frac{\sinh(M_p y)}{\sinh M_p} \right] - \frac{v^* M_p}{4} \frac{\cosh M_p - \cosh(M_p y)}{M_p \cosh M_p - N^2 \sinh M_p} \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Nelle Figure 4.9 e 4.10 mettiamo in evidenza l'influenza sulla velocità adimensionale di  $N$  e  $M_p$ , avendo fissato  $v^* = 1$ : la velocità è sempre inferiore a quella di un fluido newtoniano nella medesima situazione fisica e diminuisce all'aumentare di  $N$ , mentre aumenta all'aumentare di  $M_p$ , come per il moto di Poiseuille.

Nelle Figure 4.11 e 4.12 mostriamo l'influenza di  $v^*$  sulla velocità, avendo posto  $M_p = 1$  e  $N = 0.5$  e  $0.9$ . Nella prima figura l'andamento della velocità è del tutto analogo a quello riscontrato per un fluido newtoniano per gli stessi valori di  $v^*$  e nella seconda è leggermente differente.

Le Figure 4.13, 4.14 mostrano come  $N$  e  $M_p$ , influenzano la microrotazione, avendo fissato  $v^* = 1$ : nella prima figura la microrotazione è sempre negativa e presenta un minimo che è più accentuato all'aumentare di  $N$ , nella seconda la microrotazione è negativa e presenta un minimo per  $M_p = 1, 2$ , mentre per  $M_p$  ha un andamento differente presentando un minimo negativo nella regione  $-1 < y < 0$  ed un massimo positivo in un intorno di  $y = 1$ .

Infine nelle Figure 4.15, 4.16 presentiamo l'influenza di  $v^*$  sulla microrotazione, avendo posto  $M_p = 1$  e  $N = 0.5$  e  $0.9$ . Nella 4.15 la microrotazione è positiva per i due valori negativi di  $v^*$  e mostra un massimo, mentre è negativa per i due valori positivi di  $v^*$  e mostra un minimo. Nella 4.16 l'andamento della microrotazione è del tutto analogo, ma con il massimo ed il minimo più accentuati.

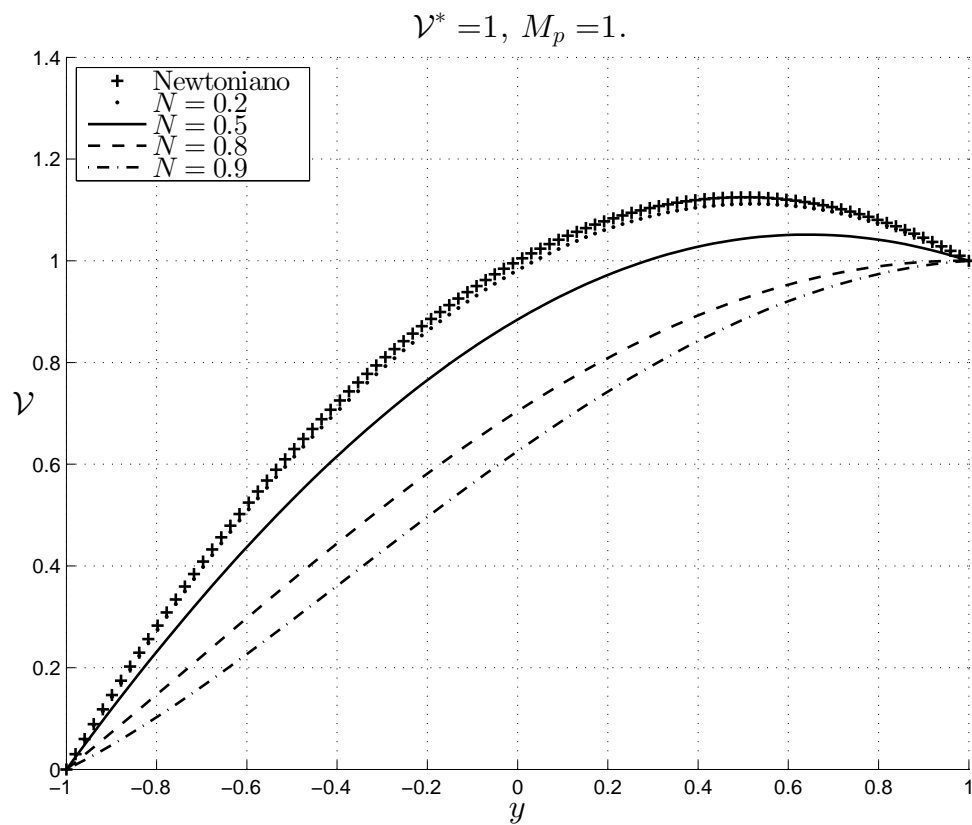


Figura 4.9: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $N$



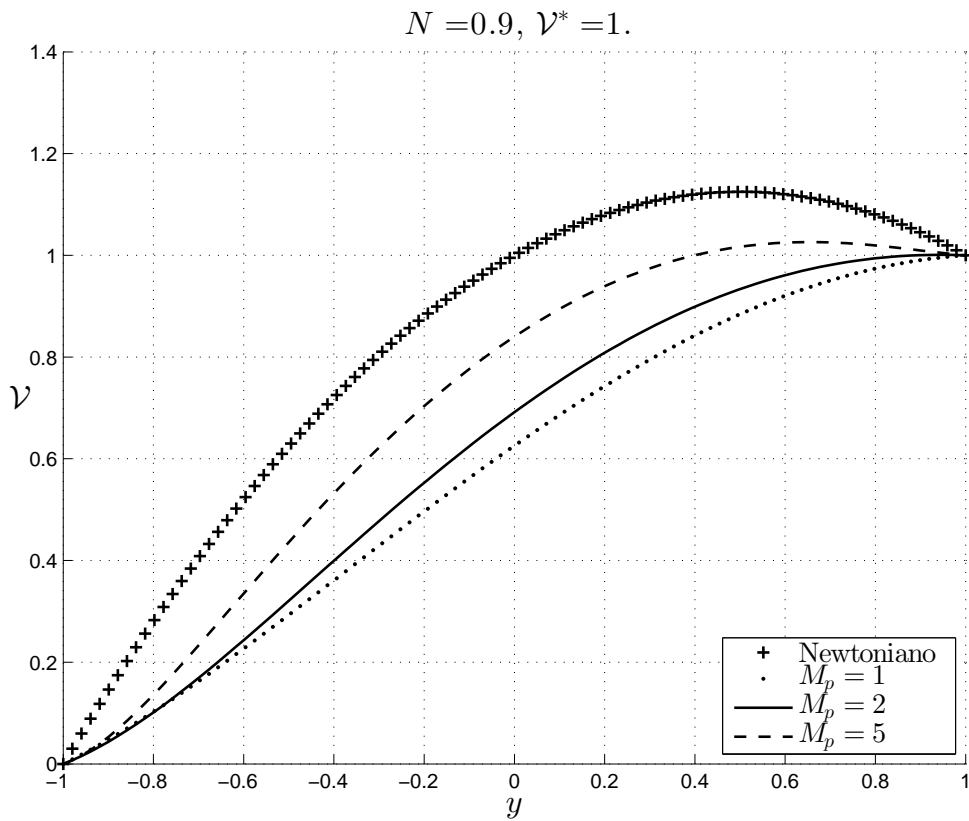


Figura 4.10: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $M_p$

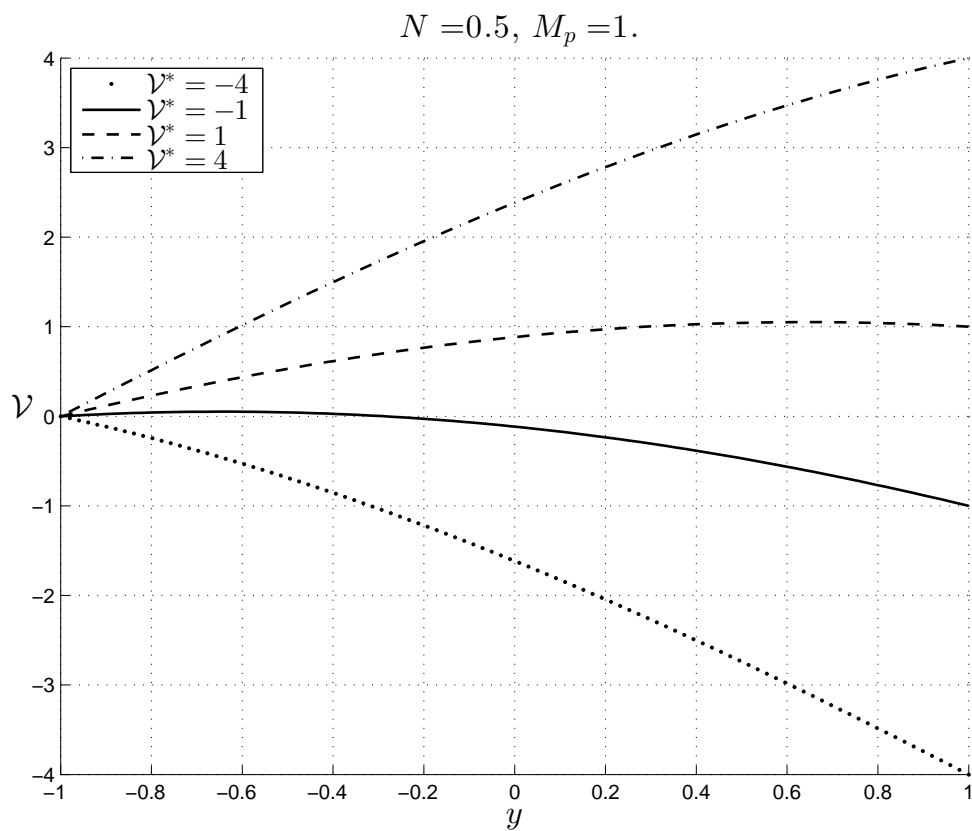


Figura 4.11: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $v^*$  con  $N = 0.5$

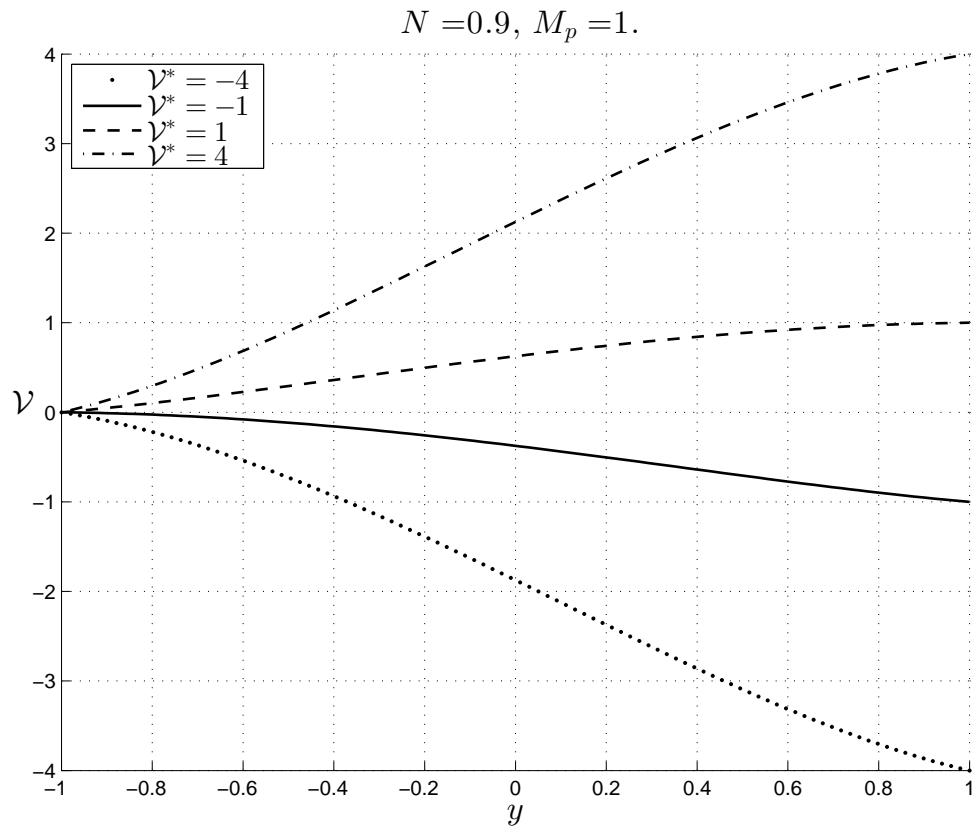


Figura 4.12: Velocità adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $v^*$  con  $N = 0.9$

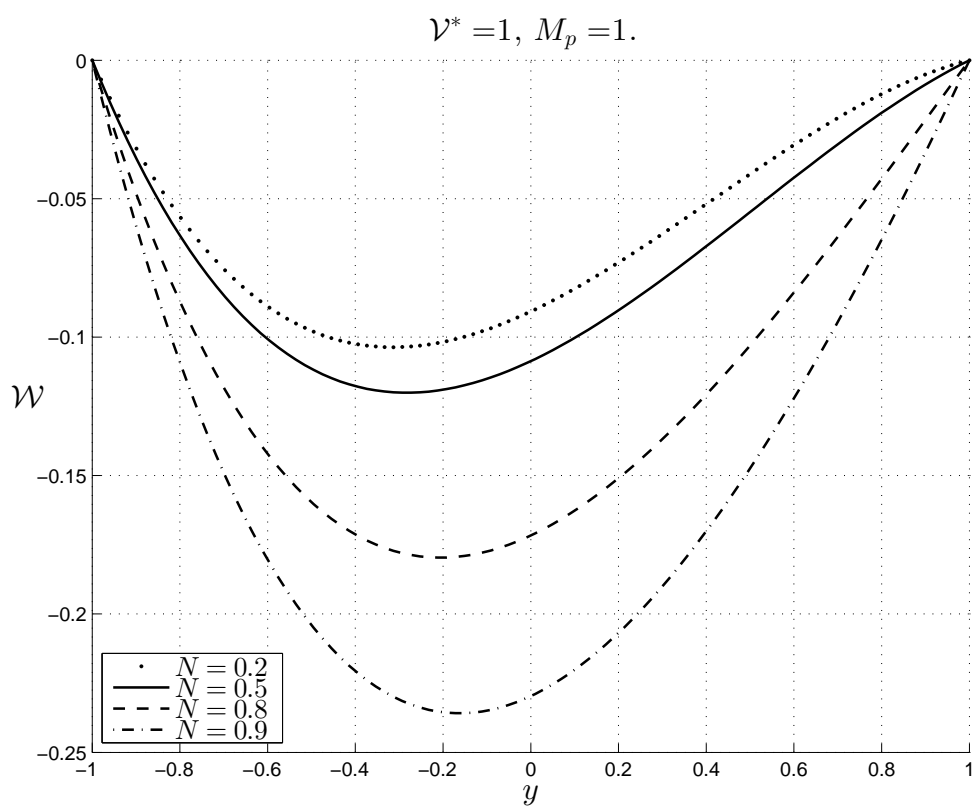


Figura 4.13: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $N$

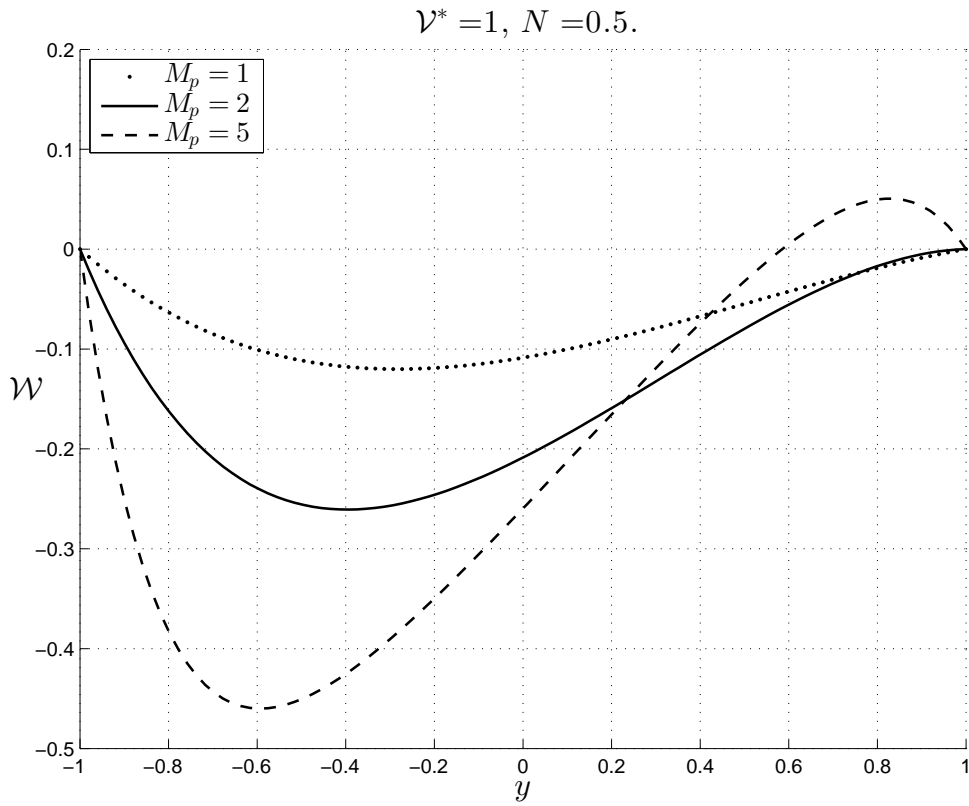


Figura 4.14: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $M_p$

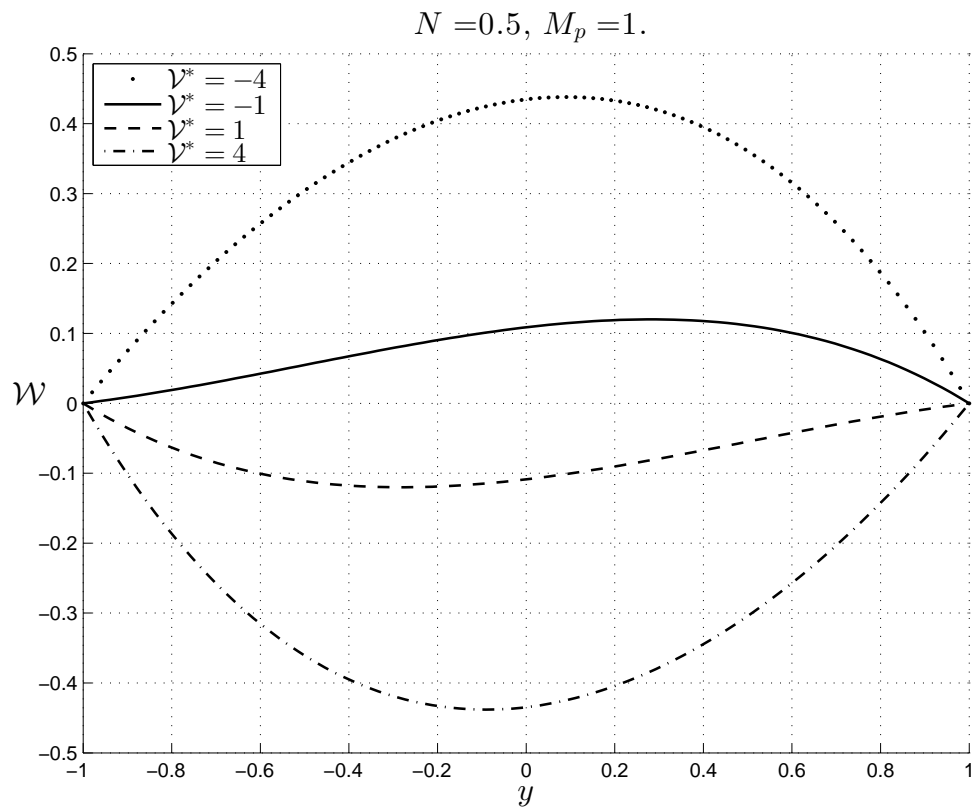


Figura 4.15: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $N$

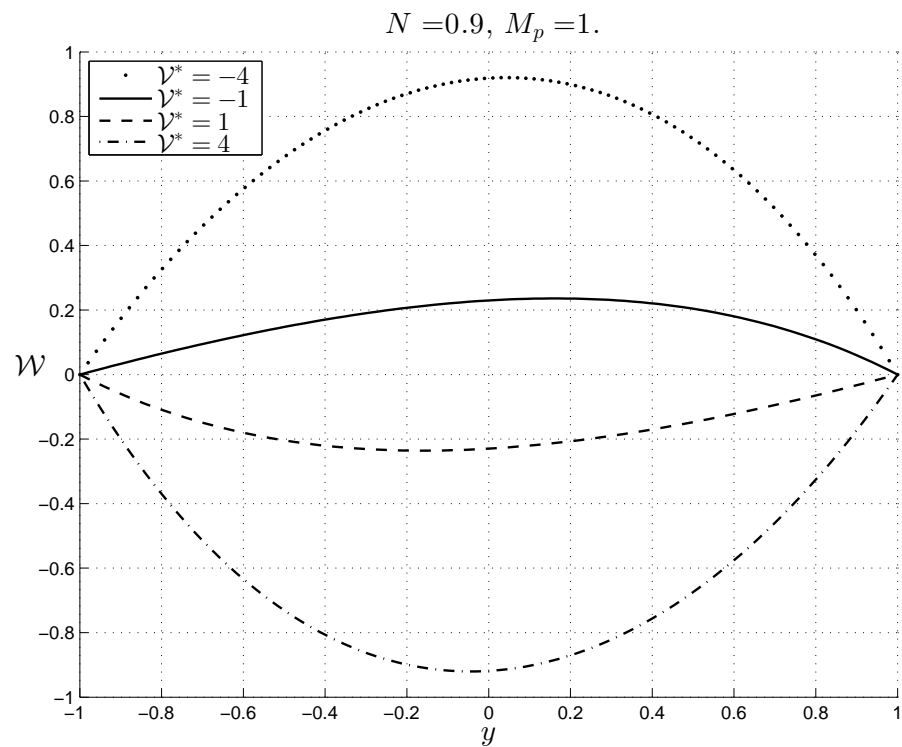


Figura 4.16: Microrotazione adimensionale nel moto di Poiseuille-Couette con  $C \neq 0$  per diversi valori di  $v^*$  con  $N = 0.9$