

# Fisica Matematica 1 (II anno LM)

Alessandra Borrelli  
Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Ferrara  
brs@unife.it

2010/2011



# Introduzione

Il corso è rivolto essenzialmente allo studio del modello matematico di Black e Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni call europee, delle sue conseguenze e delle sue estensioni.

Le opzioni sono titoli che rientrano nella classe dei derivati.

I titoli derivati, strumenti finanziari il cui rendimento è definito in termini di altri titoli, detti sottostanti, sono uno degli elementi più rappresentativi del processo di innovazione che ha riguardato gli strumenti e le istituzioni finanziarie degli ultimi trent'anni.

Negli Stati Uniti l'apertura del primo mercato regolamentato per la compravendita di titoli derivati è avvenuta il 26 aprile 1973; allora erano sedici i titoli azionari sui quali era possibile negoziare opzioni al Chicago Board Options Exchange, mentre ora hanno superato le duecento unità.

In Italia l'attività di compravendita di titoli derivati riguarda solo gli anni più recenti: l'apertura dell'IDEM (Italian Derivatives Market) è avvenuta il 28 novembre 1994 e da allora gli scambi complessivi di derivati sono aumentati in modo rilevante.

La maggior parte di coloro che scambiano contratti derivati non hanno intenzione di acquistare o di vendere effettivamente il titolo sottostante, ma usano i titoli derivati per modificare il profilo di rischio delle proprie attività: per gli *hedgers* l'obiettivo è la riduzione del rischio, mentre per gli speculatori è assumere posizioni rischiose, ma con possibilità di notevoli guadagni, quando pensano di possedere delle informazioni sicure. Altri utilizzatori di derivati, tra cui gli *arbitraggisti*, sfruttano la possibilità di costruire posizioni a basso rischio e ad alto profitto; gli *investitori* considerano i derivati come uno strumento di diversificazione.

Se le imprese utilizzassero i derivati solo per operazioni di copertura dal rischio non dovrebbero sorgere difficoltà finanziarie. Tuttavia gli anni Novanta hanno registrato una sequenza di episodi in cui si sono verificate, a livello internazionale, enormi perdite a causa dei derivati.

Questi contraccolpi hanno contribuito a diffondere in una parte dell'opinione

pubblica la convinzione che i titoli derivati abbiano un effetto destabilizzante sui mercati finanziari. In effetti l'utilizzo di tali strumenti consente di assumere posizioni di notevole entità con un modesto impiego di capitale, creando i presupposti di un uso speculativo dei derivati e innescando pressioni sul prezzo dei titoli sottostanti. D'altra parte, le caratteristiche di dinamicità proprie di questi strumenti e il continuo nascere di sempre nuove tipologie di prodotti derivati rende spesso difficile gli interventi di regolamentazione da parte delle autorità. Tuttavia i casi di crolli finanziari a causa dei derivati non devono essere considerati tipici perché la maggior parte degli operatori finanziari usa tali strumenti essenzialmente con lo scopo di copertura dal rischio e non con scopo speculativo.

La rapida estensione del mercato dei derivati è andata in parallelo con lo sviluppo di una teoria matematica dei derivati: in essa il modello per la valutazione del prezzo delle opzioni elaborato nel 1973 da **F. Black** e **M. Scholes** (*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, **81** (1973)) e generalizzato sempre nello stesso anno da **R.C. Merton** (*Theory of Rational Option Pricing*, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973)) ha rappresentato il contributo fondamentale e di maggior influenza sia sulla letteratura successiva sia nelle applicazioni da parte degli operatori finanziari.

Nonostante la loro apparente complessità, dal punto di vista matematico i derivati sono particolarmente semplici, poiché il loro valore dipende solo dal prezzo dell'attività sottostante e da pochi altri parametri. Ciò consente di formulare modelli matematici sui derivati, in cui si ricorre prevalentemente al calcolo stocastico.

Tale calcolo sostituisce il calcolo differenziale ed integrale classico ogni volta che si vuole studiare un fenomeno la cui evoluzione temporale è influenzata da eventi casuali ed è quindi soggetta a notevole imprevedibilità. In particolare, nel settore finanziario non è possibile prevedere con esattezza il prezzo futuro di un dato titolo, ad esempio di un'azione, conoscendone la storia passata, perché questo presenta un'influenza del caso. Infatti un evento del tutto imprevedibile, come il fallimento di una società, lo scoppio improvviso di un conflitto, la caduta di un governo, un atto terroristico di notevole violenza possono produrre delle forti oscillazioni nel prezzo dei titoli quotati in Borsa.

I fenomeni la cui evoluzione temporale è casuale sono descritti mediante i processi stocastici studiati appunto nell'ambito del calcolo stocastico, basato sulla teoria della probabilità.

Per quanto riguarda l'organizzazione del corso, osserviamo che questo consta essenzialmente di tre parti strettamente correlate tra loro.

- **I parte**

Nel Capitolo 1, dopo aver introdotto alcune nozioni di base relative ai titoli

finanziari (obbligazioni, azioni, derivati), ai mercati finanziari ed alle leggi finanziarie, si dà la definizione di portafoglio di arbitraggio e si enuncia il teorema fondamentale dell'arbitraggio.

Il Capitolo 2 è dedicato allo studio di alcune proprietà matematiche delle opzioni e del loro utilizzo.

- **II parte**

Nel Capitolo 3 vengono esposti alcuni concetti fondamentali del calcolo delle probabilità e nel Capitolo 4 si introduce il concetto di processo stocastico dedicando particolare riguardo ai processi di Wiener che svolgono un ruolo fondamentale nella parte successiva del corso.

Il Capitolo 5 è rivolto allo studio del calcolo integrale stocastico e il Capitolo 6 allo studio del calcolo differenziale stocastico ed in particolare alle equazioni differenziali stocastiche. E' da rilevare che nel calcolo stocastico, a differenza di quanto avviene nell'Analisi Matematica classica, il calcolo integrale precede il calcolo differenziale

- **III parte**

Il Capitolo 7 è dedicato alla deduzione della formula di Black e Scholes ottenuta da F. Black e M. Scholes nel 1973 e indipendentemente da R.C. Merton nello stesso anno. Essa consente di trovare una soluzione al problema della valutazione del prezzo delle opzioni call e put europee.

Infine nel Capitolo 8 si studiano alcune estensioni della formula di Black e Scholes ed alcune sue applicazioni.



# Indice

<b>1</b>	<b> Mercati finanziari e principio di arbitraggio</b>	<b>1</b>
1.1	Obbligazioni, Azioni, Titoli derivati. . . . .	1
1.2	Mercati finanziari e Borsa Valori. . . . .	3
1.3	Indici di Borsa . . . . .	7
1.4	Richiami sulle leggi finanziarie. . . . .	8
1.5	Contratti forward e future. . . . .	18
1.6	Nozioni di base sulle Opzioni . . . . .	23
1.7	Portafogli di arbitraggio. . . . .	26
<b>2</b>	<b> Alcune proprietà matematiche delle opzioni ed il loro utilizzo</b>	<b>37</b>
2.1	Introduzione. . . . .	37
2.2	Proprietà delle call europee e americane. . . . .	38
2.3	Relazione di parità put - call. . . . .	47
2.4	Utilizzo delle opzioni e loro combinazioni. . . . .	50
2.5	Opzioni esotiche. . . . .	55
<b>3</b>	<b> Richiami di teoria della probabilità</b>	<b>57</b>
3.1	Spazio di probabilità . . . . .	57
3.2	Variabili casuali. . . . .	63
3.3	Indipendenza di variabili casuali. . . . .	74
3.4	Momenti di una variabile casuale . . . . .	78
3.5	Convergenza di successioni di variabili casuali. . . . .	92
3.6	Aspettative condizionate. . . . .	93
<b>4</b>	<b> Processi stocastici</b>	<b>101</b>
4.1	Introduzione ai processi stocastici . . . . .	101
4.2	Processi stocastici. . . . .	107
4.3	Martingale. . . . .	110
4.4	Processi di Wiener e Moti Browniani. . . . .	112

<b>5</b>	<b>Calcolo classico e calcolo stocastico</b>	<b>121</b>
5.1	Richiami sull'integrale di Riemann. Integrale di Riemann-Stieltjes.	122
5.2	Definizione di integrale di Ito . . . . .	126
5.3	Esempio di calcolo di un integrale stocastico. . . . .	137
5.4	Proprietà dell'integrale stocastico di Ito. . . . .	143
<b>6</b>	<b>Calcolo differenziale stocastico</b>	<b>149</b>
6.1	Differenziale stocastico. . . . .	149
6.2	Applicazioni della formula di Ito. . . . .	152
6.3	Equazioni differenziali stocastiche. . . . .	155
6.4	Equazioni differenziali stocastiche lineari. . . . .	161
<b>7</b>	<b>Il modello di Black e Scholes di valutazione delle opzioni call</b>	<b>171</b>
7.1	Modelli matematici per i prezzi azionari. . . . .	171
7.2	Determinazione del prezzo delle opzioni call europee: equazione di Black e Scholes. . . . .	175
7.3	Brevi cenni sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. . . . .	179
7.4	Risoluzione del problema di Black e Scholes data la condizione finale. . . . .	184
7.5	Calcolo delle derivate della funzione $c$ . . . . .	198
<b>8</b>	<b>Estensioni della formula di Black e Scholes e sue applicazioni</b>	<b>203</b>
8.1	Formula di Black e Scholes per call americane e put europee. . . . .	203
8.2	Estensioni del modello di Black e Scholes. . . . .	210
8.3	Applicazioni della formula di Black e Scholes: valutazione dei titoli emessi da un'impresa. . . . .	212
8.4	Applicazioni della formula di Black e Scholes: strategie di copertura di delta-hedging. . . . .	214

# Capitolo 1

## Mercati finanziari e principio di arbitraggio

### 1.1 Obbligazioni, Azioni, Titoli derivati.

**Definizione 1.1.** *I contratti finanziari sono contratti finalizzati al trasferimento di moneta o di merci a diverse date di esigibilità (o scadenze), subordinatamente al verificarsi di date condizioni (stati del mondo).*

**Definizione 1.2.** *Un titolo è un contratto tra due controparti, il venditore e il compratore, che stabilisce per ciascuna data futura e per ogni stato la quantità (positiva o non) di una determinata merce o moneta o contratto finanziario che il venditore deve trasferire al compratore.*

*Sono detti titoli primari quei contratti che stabiliscono direttamente trasferimenti di merci o moneta.*

*Sono detti titoli derivati quelli in cui il trasferimento è regolato in modo indiretto, cioè mediante il trasferimento di altri contratti.*

Due esempi di titoli primari sono le obbligazioni e le azioni, titoli che vengono emessi dalle imprese per finanziarsi.

Le **obbligazioni** sono titoli di **debito**, cioè l'acquirente diventa creditore della società che le ha emesse. Il possessore ha diritto al rimborso del capitale prestato alla scadenza e agli interessi a date fissate. Le obbligazioni possono essere emesse da imprese private, ma anche da enti pubblici e dallo Stato.

I principali titoli italiani del debito pubblico sono:

- BOT = buoni ordinari del tesoro
- BTP = buoni del tesoro poliennali

- CCT = certificati di credito del Tesoro
- CTZ = certificati del Tesoro Zero coupon.

I BOT e i CTZ sono privi di cedole; il rendimento consiste in un interesse implicito rappresentato dalla differenza tra il valore ottenuto alla scadenza del titolo, che corrisponde al suo valore nominale, e il costo sostenuto per il suo acquisto, inferiore al valore nominale.

I BTP e i CCT attribuiscono al possessore il diritto di ricevere cedole semestrali calcolate sulla base di un tasso di interesse che per i BTP è fisso, mentre per i CCT è variabile, cioè indicizzato.

Le obbligazioni sono titoli a basso rischio.

E' comunque possibile stabilire per esse due componenti di rischio: rischio generico e rischio specifico.

- Rischio generico.

Il rischio generico si ha ad esempio se si vogliono vendere le obbligazioni prima della scadenza. In tal caso bisogna fare i conti con il prezzo di mercato dei titoli stessi che varia con maggiore o minore continuità.

- Rischio specifico.

La società emittente può non essere in grado di pagare quanto stabilito. Ne è un esempio il caso dei bonds dell'Argentina.

In genere un'obbligazione emessa dagli Stati dell'Unione Europea, dalla Banca Mondiale o dalla B.E.I (Banca Europea degli Investimenti) è considerata sicura, mentre un'obbligazione emessa da altri Stati o da imprese private è ritenuta molto più rischiosa.

I rischi relativi ad ogni specifica obbligazione vengono calcolati dalle *società di rating* che studiano le situazioni dei Paesi e delle imprese emittenti.

**Definizione 1.3.** *Un'obbligazione priva di rischio è un contratto che attribuisce il diritto a ricevere interessi e capitale alle scadenze prefissate, con importi di rimborso uguali in tutti gli stati possibili relativi alla medesima data.*

Dunque con un'obbligazione priva di rischio la cifra che si riceve alle date di scadenza è quella prefissata, in qualunque stato e indipendentemente dagli eventi. Si tratta ovviamente di un caso puramente ideale.

Le **azioni** sono titoli di **capitale**, cioè conferiscono all'acquirente i diritti patrimoniali della società emittente, ossia l'acquirente diventa proprietario della società per la quota di azioni acquistate. Le azioni conferiscono il diritto al dividendo, se questo viene distribuito all'interno della società. Ricordiamo che

il dividendo è quella parte degli utili netti di una società per azioni che viene distribuita annualmente fra gli azionisti.

Le azioni, a differenza delle obbligazioni, sono investimenti rischiosi poiché l'acquirente partecipa a tutto ciò che accade alla società. Il valore delle azioni dipende cioè dalla riuscita della società.

Così ad esempio se si rappresenta graficamente in funzione del tempo il valore di un'obbligazione poco rischiosa, come un BOT o un CCT, si ottiene un grafico abbastanza lineare con buona prevedibilità e basso rischio, invece se si rappresenta in funzione del tempo il valore di azioni FTSE Italia All-Share (che è un indice della Borsa Italiana) si ottiene un grafico molto frastagliato con scarsa prevedibilità ed alto rischio.

Per quanto riguarda i **titoli derivati**, il loro valore viene a dipendere da quello di un'altra attività finanziaria che prende il nome di **sottostante**. Esempi di sottostante sono merci, azioni, obbligazioni, ma anche valute, tassi di interesse, ecc.

Negli ultimi anni i derivati sono divenuti sempre più importanti nel mondo della finanza. Negli Stati Uniti il mercato dei derivati è stato aperto nel 1973, in Italia solo nel 1994.

I più diffusi titoli derivati sono **contratti a termine forward e futures, opzioni**, di cui parleremo diffusamente in seguito, **swap, warrant, certificates** ed altri ancora di cui non ci occuperemo.

Per il momento nel paragrafo successivo diamo qualche nozione di base sui mercati finanziari.

## 1.2 Mercati finanziari e Borsa Valori.

Con il termine **Mercato finanziario** si intende l'insieme delle relazioni e delle contrattazioni che si instaurano tra coloro che si scambiano strumenti finanziari.

All'interno dei mercati finanziari esistono diverse forme di classificazione.

I mercati possono essere classificati nelle categorie seguenti:

- **mercati creditizi e mercati mobiliari**
- **mercati monetari e mercati di capitali**
- **mercati primari e mercati secondari**
- **mercati al dettaglio e mercati all'ingrosso**
- **mercati regolamentati e mercati OTC (Over The Counter)**

- mercati cash e mercati derivati.

I mercati creditizi sono i mercati in cui gli investitori possono accedere direttamente al credito. In tali mercati operano gli enti creditizi che concordano con ogni cliente le condizioni relative alle operazioni di raccolta (ad es. il tasso di interesse da applicare ad un deposito bancario) e quelle relative alle operazioni di impiego (ad es. la durata di un mutuo). I mercati mobiliari invece si contraddistinguono per il fatto che le negoziazioni si svolgono sulla base di regole prestabilite in modo oggettivo ed impersonale. In tali mercati circolano gli strumenti mobiliari (azioni ed obbligazioni). Le contrattazioni che si svolgono hanno per oggetto ingenti quantità di capitali e danno origine a prezzi ufficiali, resi noti al pubblico mediante appositi listini.

La II classificazione fa riferimento alla durata degli strumenti finanziari. In particolare, il mercato monetario contratta gli strumenti finanziari a breve termine (con scadenze entro i 12 mesi); mentre nel mercato dei capitali vengono trattati gli strumenti finanziari a medio e a lungo termine. Nei mercati monetari, quindi, prevale la gestione della liquidità. Il mercato dei capitali, invece, fa riferimento ad impieghi di capitale che hanno un ciclo economico di durata più lunga. In particolare, il mercato dei capitali tratta soprattutto azioni ed obbligazioni.

Il mercato primario è il mercato finanziario in cui vengono collocati i titoli di prima emissione. Pertanto, questo rappresenta il mercato in cui gli emittenti (imprese, Stato, regioni, ecc) possono collocare i propri strumenti finanziari con cui finanziarsi (provvista di fondi per gli emittenti). Questi titoli costituiscono forme di investimento per i risparmiatori. Il mercato secondario, invece, è il mercato finanziario in cui vengono negoziati gli strumenti finanziari già emessi nel mercato primario. Il mercato secondario serve, soprattutto, per favorire la liquidità degli strumenti finanziari già emessi.

La classificazione mercati al dettaglio e mercati all'ingrosso fa riferimento al taglio delle transazioni che avvengono sul mercato, nonché ai tipi di operatori. In particolare, nel mercato all'ingrosso operano solo gli investitori ammessi alle negoziazioni. Per esempio, nel mercato all'ingrosso dei titoli di stato, gli operatori ammessi alla negoziazione sono la Banca d'Italia ed il Ministero del Tesoro.

La classificazione mercati regolamentati e mercati OTC si riferisce alla presenza di una regolamentazione specifica. Infatti, il mercato regolamentare è sottoposto ad una sua regolamentazione, mentre il mercato OTC è caratterizzato

da un alto grado di personalizzazione.

Il mercato cash (o spot) è un mercato finanziario in cui vengono negoziati gli strumenti finanziari base (azioni, obbligazioni, indici di borsa), mentre nel mercato dei derivati vengono negoziati gli strumenti derivati, cioè quegli strumenti finanziari il cui valore deriva da uno strumento finanziario base (futures, opzioni, ecc.)

La **Borsa Valori** (italiana) rappresenta la più alta espressione di mercato finanziario secondario regolamentato. Si differenzia dagli altri mercati finanziari per i seguenti motivi:

- il suo assetto istituzionale e autoregolamentato;
- la standardizzazione dei contratti e delle modalità di negoziazione;
- l'accesso soltanto ad intermediari abilitati (società di intermediazione mobiliare dette SIM che sono società per azioni, banche sia comunitarie che extracomunitarie, imprese di investimento comunitarie ed extracomunitarie autorizzate);
- richiesta di particolari requisiti ai titoli perché siano negoziabili sia relativi alla società emittente sia ai titoli stessi.

Le principali funzioni della Borsa valori sono:

- definire i prezzi dei titoli;
- definire i requisiti e le procedure di ammissione e permanenza sul mercato per le società emittenti;
- definire i requisiti e le procedure di ammissione per gli intermediari;
- gestire l'informativa delle società quotate;
- vigilare sul corretto svolgimento delle negoziazioni.

Il ruolo svolto dalla Borsa è di importanza fondamentale per l'economia poiché

- permette alle società quotate la raccolta di mezzi finanziari;
- consente agli investitori l'individuazione degli investimenti più redditizi;

- favorisce l'allocazione delle risorse disponibili verso i settori economici più efficienti.

Dal 1997 la Borsa valori è gestita e organizzata dalla società privata Borsa Italiana s.p.a che ha sede a Milano in Piazza Affari nel Palazzo Mezzanotte e che si occupa anche della gestione di altri mercati finanziari (come ad esempio l'IDEM, ossia il Mercato dei derivati, il MOT, ossia il Mercato Telematico delle obbligazioni e dei titoli di Stato, il MAC, ossia il Mercato alternativo dei capitali, ecc.).

A partire dal 1997 Borsa Italiana si è trasformata da singola società di gestione del mercato in un Gruppo diversificato nel campo dei servizi finanziari, composto da **Cassa di Compensazione e Garanzia** (2000), **Monte Titoli** (2002), **Servizio Titoli** (2007) e la **Società per il Mercato all'ingrosso dei Titoli di Stato**.

Il 23 giugno 2007 la Borsa Italiana è stata acquisita dalla Borsa di Londra (London Stock Exchange) e dal primo ottobre 2007 è stata quotata per la prima volta a Londra.

Il controllo sulla Borsa valori è esercitato dalla Commissione Nazionale per le Società e la Borsa (CONSOB) e dalla Banca d'Italia.

La Borsa valori fino al 14 aprile 1994 era basata sul sistema di contrattazione denominato **negoziazione a chiamata o alle grida**; ciascun titolo veniva contrattato in un preciso momento della seduta di Borsa e gli intermediari, situati intorno ad un recinto detto corbeille, gridavano i prezzi ai quali erano disposti a vendere o ad acquistare il titolo fino a quando non si perveniva alla formazione del prezzo che rimaneva fissato per tutta la giornata. Ora è stato introdotto il sistema di contrattazione denominato **asta continua** con il quale la negoziazione di ciascun titolo può avvenire in qualsiasi momento nella seduta di borsa grazie al sistema telematico di Borsa che non richiede la concentrazione fisica degli operatori, collegati tra loro per mezzo di una rete di elaboratori e terminali.

Il meccanismo d'asta fa incontrare domanda ed offerta: lo scambio si compie tra chi offre il prezzo più basso in offerta e chi offre il prezzo più alto in domanda. I titoli sono scambiati dunque attraverso un meccanismo bilaterale (two sides): le offerte di prezzo vengono fatte sia dagli acquirenti che dai venditori dei titoli. Il sistema telematico, gestito dalla SIA, visualizza le proposte di negoziazione all'interno di un libro (book) che compare sui terminali degli operatori autorizzati.

Dal punto di vista matematico, nella contrattazione continua il tempo  $t$  rappresenta una variabile continua, mentre nel mercato non telematico il tempo  $t$

era considerato una variabile discreta.

## 1.3 Indici di Borsa

Al termine di ogni seduta della Borsa, viene redatto e pubblicato il **listino di Borsa**, che contiene i dati fondamentali relativi a ciascun titolo trattato. E' diviso in due comparti:

- **listino delle azioni**
- **listino dei titoli di Stato e delle obbligazioni.**

La stampa specializzata rende noti anche alcuni indici che consentono di misurare ed esprimere sinteticamente l'andamento della totalità delle azioni quotate o di gruppi di esse. Infatti si distingue tra:

- **indici globali**, riferiti a tutti i titoli azionari quotati
- **indici settoriali**, relativi alle quotazioni dei titoli di società che appartengono ad un determinato ramo dell'economia.

Gli indici di Borsa sono espressi da un numero, determinato operando una media ponderata tra i corsi di un certo numero di titoli ritenuti significativi e facendo riferimento ad una data iniziale. Il valore via via assunto dall'indice fornisce una visione della variazione subita dal mercato rispetto al momento assunto come base.

Dal 1<sup>o</sup> giugno 2009 i vecchi indici di Borsa sono stati sostituiti dai nuovi indici FTSE Italia, calcolati dal provider FTSE (Financial Times Stock Exchange) che già elaborava gli indici dei mercati borsistici anglosassoni. I nuovi indici vengono realizzati utilizzando gli standard di FTSE riconosciuti a livello mondiale e utilizzati dagli investitori tradizionali. Le principali caratteristiche metodologiche sono un filtro per la liquidità, l'inclusione di una sola tipologia di azione per società e l'esclusione delle azioni estere che non possono essere inserite negli indici, ad eccezione del FTSE MIB e del FTSE Italia All-Share. Tra i principali indici ricordiamo:

- **FTSE MIB** relativo alle quotazioni dei 40 principali titoli della Borsa italiana periodicamente selezionati con riferimento al volume degli scambi, alla loro liquidità e capitalizzazione di Borsa nei 12 mesi precedenti. ;

- **FTSE Italia All-Share** e **FTSE Italia MIB storico** indici globali, relativi a quasi tutte le azioni nazionali quotate in Borsa, il primo indice calcolato ogni minuto, il secondo calcolato una volta al giorno al termine della seduta di borsa utilizzando i prezzi ufficiali.

Nel paragrafo successivo richiamiamo alcuni concetti di base relativi alle leggi finanziarie.

## 1.4 Richiami sulle leggi finanziarie.

In primo luogo osserviamo che in ambito finanziario si assume un'ipotesi di fondo:

*L'impiego del denaro per un certo periodo di tempo o equivalentemente lo spostamento nel tempo del denaro ha un **prezzo o valore**.*

Le operazioni finanziarie comportano l'impiego di **capitale**. Denotiamo con  $C$  il capitale nell'unità monetaria.

**Definizione 1.4.** *Il tempo al quale il capitale è disponibile è detto **valuta**.*

**Definizione 1.5.** *Le coppie  $(C_1, t_1)$ ,  $(C_2, t_2)$ , dove  $C_1, C_2$  sono capitali disponibili al tempo  $t_1, t_2$  rispettivamente, si dicono **indifferenti** e si scrive:*

$$(C_1, t_1) \approx (C_2, t_2)$$

*se si è disposti a scambiarle ossia se possono essere scambiate alla pari.*

**Definizione 1.6.** *Prese due coppie indifferenti  $(C_0, t_0)$ ,  $(C_t, t)$ , si definisce legge finanziaria la funzione  $\mathcal{L}(C_0, t, t_0)$  tale che*

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0).$$

Se ci limitiamo a considerare leggi omogenee di grado 1 nel capitale, abbiamo:

$$C_t = \mathcal{L}(C_0, t, t_0) = C_0 \mathcal{L}(1, t, t_0).$$

Se  $t > t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: m(t, t_0)$  è detta **legge di capitalizzazione**

Se  $t = t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) = 1$

Se  $t < t_0$   $\mathcal{L}(1, t, t_0) =: v(t, t_0)$  è detta **legge di sconto**.

Nel caso in cui  $t > t_0$

$$C_t = C_0 m(t, t_0)$$

è detto **montante**. Dunque il montante è il valore del capitale ad un tempo posteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.

In tal caso la differenza

$$C_t - C_0$$

è detta **interesse**.

Se un capitale viene dato in prestito per un certo periodo, alla scadenza la quantità restituita è il montante, cioè il capitale iniziale più l'interesse.

Nel caso in cui  $t < t_0$

$$C_t = C_0 v(t, t_0)$$

è detto **valore scontato**. Dunque il valore scontato è il valore di un capitale ad un tempo anteriore rispetto a quello in cui è a disposizione.

In tal caso la differenza

$$C_0 - C_t$$

è detta **sconto**.

Assegnata una legge di capitalizzazione, è facile determinare la corrispondente legge di sconto. Infatti, se  $t' < t$ , avremo:

$$C_{t'} = C_t v(t', t),$$

ma d'altra parte:

$$C_t = C_{t'} m(t, t') = C_t v(t', t) m(t, t')$$

da cui

$$v(t', t) = \frac{1}{m(t, t')}.$$

Perciò se  $t < t_0$ , in corrispondenza della legge di capitalizzazione  $m$ , si ha la seguente legge di sconto:

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)}. \quad (1.4.1)$$

Nei contratti finanziari, come ad esempio l'apertura di un conto corrente, devono essere fissate alcune condizioni:

- 1)  $r =$  **tasso unitario di interesse**, cioè l'interesse prodotto nell'unità di tempo da un'unità di capitale ;

- 2) **periodo di impiego del capitale**, cioè la durata del contratto;
- 3) **periodo di capitalizzazione (degli interessi)**, cioè il tempo dopo il quale l'interesse diventa disponibile, ossia diventa capitale;
- 4) **regime di capitalizzazione**, cioè le norme che regolano l'operazione.

In genere il periodo di capitalizzazione è minore o uguale al periodo d'impiego del capitale.

Vediamo alcuni regimi di capitalizzazione.

### Regime di capitalizzazione semplice

Si assume che il periodo di capitalizzazione coincida con il periodo di impiego del capitale.

L'interesse maturato dal tempo  $t_0$  al tempo  $t$  ( $t > t_0$ ) è dato da

$$C_0 r (t - t_0),$$

ossia l'interesse è proporzionale al capitale  $C_0$  ed all'intervallo di tempo  $t - t_0$  con costante di proporzionalità il tasso di interesse  $r$ .

La corrispondente legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = 1 + r (t - t_0)$$

e il montante è

$$C_t = C_0 [1 + r (t - t_0)]. \quad (1.4.2)$$

Si può inoltre determinare la relativa legge di sconto; tenendo presente la (1.7.1), per  $t < t_0$  si ha

$$v(t, t_0) = \frac{1}{m(t_0, t)} = \frac{1}{1 + r(t_0 - t)},$$

da cui il capitale scontato risulta

$$C_t = \frac{C_0}{1 + r(t_0 - t)}.$$

### Regime di capitalizzazione composta

Si assume che il periodo di capitalizzazione sia minore del periodo di impiego del capitale e più precisamente:

$$\frac{P_i}{P_c} = n$$

con

$P_i$  = periodo di impiego del capitale,

$P_c$  = periodo di capitalizzazione,

$n$  = numero naturale.

Posto  $P_c = 1$ , risulta  $P_i = n$ .

Indichiamo con  $C_n$  il capitale dopo il periodo di impiego pari a  $n$ .

Supponiamo dapprima  $n = 1$ , per cui rientriamo nel regime di capitalizzazione semplice e per quanto visto prima otteniamo

$$C_1 = C_0(1 + r),$$

essendo  $t - t_0 = 1$ .

Se poi supponiamo che il periodo di impiego sia 2 ed esprimiamo  $C_2$  in termini dapprima di  $C_1$  e poi di  $C_0$ , otteniamo:

$$C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)^2.$$

Al periodo  $n$  ci sarà un capitale

$$C_n = C_0(1 + r)^n.$$

Se l'intervallo temporale è  $t - t_0$ , si ha

$$C_t = C_0(1 + r)^{t-t_0}, \quad (1.4.3)$$

per cui la legge di capitalizzazione risulta

$$m(t, t_0) = (1 + r)^{t-t_0}.$$

L'interesse al tempo  $t > t_0$  è dato da

$$C_t - C_0 = C_0 [(1 + r)^{t-t_0} - 1].$$

Per la relativa legge di sconto si trova per  $t < t_0$

$$v(t, t_0) = (1 + r)^{-(t_0-t)}$$

e il valore scontato di  $C_0$  è dato da

$$C_t = C_0(1 + r)^{-(t_0-t)}.$$

Vediamo alcuni esempi di applicazione dei due regimi di capitalizzazione considerati sopra.

### Esempio 1.1.

Al tasso annuo unitario di interesse del 6% quanto tempo è necessario per quadruplicare un capitale investito in regime di capitalizzazione semplice?

Applicando la (1.4.2), dove poniamo  $t_0 = 0$  e denotiamo con  $t$  gli anni in cui il capitale si quadruplica, troviamo:

$$4 = 1 + \frac{6}{100} t,$$

da cui:

$$1 = \frac{t}{50} \implies t = 50.$$

Dunque per quadruplicare il capitale occorrono cinquant'anni.

### Esempio 1.2.

Un capitale di 149 euro, impiegato in regime di capitalizzazione composta, dopo 5 anni ha dato un montante pari a 190 euro. Determinare il tasso annuo unitario di interesse.

Applichiamo la (1.4.3), dove poniamo per semplicità  $t_0 = 0$  e  $t = 5$ :

$$190 = 149(1 + r)^5,$$

da cui

$$r = \left(\frac{190}{149}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 \implies r \approx 1,05 - 1 = 0,05.$$

Dunque il tasso annuo unitario di interesse è circa del 5%.

### Esempio 1.3. La regola del sette-dieci

Verificare che nel regime di capitalizzazione composta un capitale impiegato al 7% annuo raddoppia in circa 10 anni e che viceversa un capitale impiegato al 10% annuo raddoppia in circa 7 anni.

Consideriamo il primo caso.

Posto  $t_0 = 0$  e indicati con  $t$  gli anni in cui avviene il raddoppio, dalla (1.4.3) si ha:

$$C_0(1 + 0,07)^t = 2C_0 \implies (1,07)^t = 2.$$

Dunque

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1,07} \approx 10,24 \approx 10.$$

Consideriamo ora il secondo caso.

Analogamente a prima otteniamo:

$$C_0(1 + 0,1)^t = 2C_0 \implies (1,1)^t = 2.$$

Dunque

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1,1} \approx 7,27 \approx 7.$$

Per motivi concreti, è utile confrontare diversi periodi di capitalizzazione nel medesimo regime. Il caso tipico è il confronto, in regime di capitalizzazione composta, fra capitalizzazioni annuali e capitalizzazioni fra frazioni di anno. In tal caso si introducono

- il **tasso nominale annuo convertibile k volte**, denotato con  $\tilde{r}_k$ , che è un tasso annuo con periodo di capitalizzazione pari alla frazione  $\frac{1}{k}$  di anno
- il **tasso annuo effettivo**, denotato con  $r_e$ , che è l'interesse relativo ad un'unità di capitale in un anno e disponibile a fine anno.

I due tassi introdotti risultano **equivalenti** se, riferendoci allo stesso capitale iniziale, producono alla fine di un anno uguali montanti calcolati in regime composto, ossia se

$$\left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k = 1 + r_e,$$

da cui

$$r_e = \left(1 + \frac{\tilde{r}_k}{k}\right)^k - 1. \quad (1.4.4)$$

Si può provare che se  $\tilde{r}_k > 0$ , allora  $r_e > \tilde{r}_k$  per  $k = 2, 3, \dots$

Ovviamente in regime di capitalizzazione semplice si ha  $r_e = \tilde{r}_k$  per  $k = 2, 3, \dots$

#### **Esempio 1.4.**

Supponendo che in una data operazione finanziaria gli interessi vengano pagati trimestralmente con un tasso nominale annuo  $\tilde{r}_4 = 8\%$ , determinare il tasso annuo effettivo.

Per la (1.4.4), abbiamo:

$$r_e = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 \approx 1,0824 - 1 = 0,0824.$$

Dunque il tasso annuo effettivo è dato da  $r_e = 8,24\%$ .

#### **Regime di capitalizzazione istantanea o regime di capitalizzazione in tempo continuo**

Consideriamo un intervallo di tempo  $[t_0, t]$  che supponiamo di dividere in  $k$

intervalli di uguale ampiezza  $\Delta t$  per cui  $\Delta t = \frac{t - t_0}{k}$ .

Sia  $\Delta t$  il periodo di capitalizzazione e  $r$  il tasso unitario di interesse.

Al tempo  $t$  il montante sarà dato da

$$C_t = C_0(1 + r \Delta t)^k = C_0 \left(1 + r \frac{t - t_0}{k}\right)^k.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea si fa tendere  $\Delta t$  a zero o equivalentemente  $k$  a  $+\infty$ . Poiché

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + r \frac{t - t_0}{k}\right)^k = e^{r(t-t_0)},$$

con tale regime la legge di capitalizzazione è

$$m(t, t_0) = e^{r(t-t_0)},$$

il montante risulta

$$C_t = C_0 e^{r(t-t_0)}$$

e l'interesse è dato da

$$C_t - C_0 = C_0 [e^{r(t-t_0)} - 1].$$

In corrispondenza, la legge di sconto per  $t < t_0$  è

$$v(t, t_0) = e^{-r(t_0-t)}$$

per cui il valore scontato di  $C_0$  al tempo  $t < t_0$  è dato da

$$C_t = C_0 e^{-r(t_0-t)}.$$

Nel regime di capitalizzazione istantanea gli interessi maturano ad ogni istante e si accumulano al capitale.

### Valore di una rendita

**Definizione 1.7.** *Per rendita si intende un flusso di capitali disponibili in tempi diversi successivi.*

Si distingue in genere tra

- **rendita discreta** se si ha una successione di capitali:  $C_1, C_2, C_3, \dots$  disponibili in tempi diversi in successione:  $t_1, t_2, t_3, \dots$  con  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3, \dots$ . Una rendita discreta è detta **temporanea** se i capitali o equivalentemente le loro valute sono in numero finito, ossia  $\{C_s\}_{s=1,2,\dots,n}$  o  $\{t_s\}_{s=1,2,\dots,n}$ , mentre è detta **perpetua** se i capitali o equivalentemente le loro valute sono un'infinità numerabile;
- **rendita continua** se ad ogni istante è disponibile un infinitesimo di capitale. In tal caso è definita la funzione  $C(t)$  tale che  $C(t) dt$  è la quantità di capitale disponibile nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t, t + dt]$ . Una rendita continua è **temporanea** se la funzione  $C(t)$  è definita nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ , mentre è **perpetua** se l'intervallo di tempo in cui è definita  $C(t)$  è  $[0, +\infty)$ .

Fissiamo un regime di capitalizzazione e siano  $m(t, t_0)$  ( $t > t_0$ ) e  $v(t, t_0)$  ( $t < t_0$ ) le relative leggi di capitalizzazione e di sconto.

**Definizione 1.8.** *Data una rendita discreta temporanea e preso il tempo  $\tau$  tale che  $0 \leq \tau \leq t_n$ , definitiamo valore della rendita al tempo  $\tau$*

$$V_\tau = \sum_{0 \leq t_s \leq \tau} C_s m(\tau, t_s) + \sum_{\tau \leq t_s \leq t_n} C_s v(\tau, t_s).$$

Inoltre se  $\tau = 0$ ,  $V_0 = \sum_{s=1}^n C_s v(0, t_s)$  è detto valore attuale della rendita, mentre

se  $\tau = t_n$ ,  $V_{t_n} = \sum_{s=1}^n C_s m(t_n, t_s)$  è detto montante della rendita.

La definizione di valore di una rendita si estende immediatamente ad una rendita discreta perpetua. In particolare, il valore attuale di una rendita discreta perpetua è dato da

$$V_0 = \sum_{s=1}^{+\infty} C_s v(0, t_s), \quad (1.4.5)$$

dove assumiamo che la serie a secondo membro sia convergente.

**Definizione 1.9.** *Data una rendita continua temporanea e preso  $\tau \in [0, T]$ , definitiamo valore della rendita al tempo  $\tau$*

$$V_\tau = \int_0^\tau C(t) m(\tau, t) dt + \int_\tau^T C(t) v(\tau, t) dt.$$

Inoltre il valore attuale della rendita è dato da

$$V_0 = \int_0^T C(t) v(0, t) dt,$$

mentre il montante è

$$V_T = \int_0^T C(t) m(T, t) dt.$$

La definizione di valore di una rendita si estende immediatamente ad una rendita continua perpetua. In particolare, il valore attuale di una rendita continua perpetua è dato da

$$V_0 = \int_0^{+\infty} C(t) v(0, t) dt,$$

dove assumiamo che l'integrale a secondo membro sia convergente. Vediamo due applicazioni del valore attuale di un flusso di capitali.

### Esempio 1.5.

Consideriamo la seguente rendita discreta perpetua: una somma  $\alpha$  viene pagata ogni 1<sup>o</sup> gennaio a partire dal prossimo anno. Indicato con  $r$  il tasso annuo di interesse (supposto costante), determinare il valore attuale della rendita in regime di capitalizzazione composta.

Tenendo presente che

$$C_s = \alpha \quad \forall s = 1, 2, \dots,$$

dalla (1.4.5), deduciamo:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{+\infty} \alpha \left( \frac{1}{1+r} \right)^s = \alpha \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^s. \quad (1.4.6)$$

Posto

$$q = \frac{1}{1+r} < 1,$$

possiamo scrivere

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^s = \sum_{s=1}^{+\infty} q^s.$$

D'altra parte se poniamo  $s = k + 1$ , otteniamo:

$$\sum_{s=1}^{+\infty} q^s = q \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1}{r}.$$

Sostituendo tale risultato in (1.4.6), otteniamo:

$$V_0 = \frac{\alpha}{r}.$$

Supponiamo ad esempio  $\alpha = 1000$  euro e  $r = 2\%$ .

Allora

$$V_0 = \frac{1.000}{0,02} = 50.000 \text{ euro.}$$

### **Esempio 1.6. Valutazione di un progetto col metodo del valore attuale netto**

Supponiamo che un imprenditore al tempo  $t = 0$  acquisti e pianti degli alberi al costo di 1.000 euro e voglia poi tagliarli per ricavare un profitto.

A tale proposito ci siano due possibilità:

- gli alberi si tagliano dopo un anno ricavando 2.200 euro
- gli alberi si tagliano dopo due anni ricavando 3.400 euro.

Vogliamo valutare quale delle due opzioni è più conveniente.

Osserviamo che per ognuna delle due alternative abbiamo un flusso di capitali.

Vogliamo valutare il valore attuale del progetto supponendo il tasso annuo di interesse  $r = 10\%$  ed adottando il regime di capitalizzazione composta.

#### **Caso 1**

Abbiamo un flusso di due capitali:  $C_1 = -1.000$  euro al tempo  $t_1 = 0$  e  $C_2 = 2.200$  euro al tempo  $t_2 = 1$ .

Dunque:

$$\begin{aligned} V_0 &= C_1 + C_2 v(0, 1) = \\ &= -1.000 + 2.200 \frac{1}{1 + 0,1} = -1.000 + 2.000 = 1.000 \text{ euro} \end{aligned}$$

#### **Caso 2**

Abbiamo un flusso di tre capitali:  $C_1 = -1.000$  euro al tempo  $t_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  euro al tempo  $t_2 = 1$  e  $C_3 = 3.400$  euro al tempo  $t_3 = 2$ .

Dunque

$$\begin{aligned} V_0 &= C_1 + C_2 v(0, 1) + C_3 v(0, 2) = \\ &= -1.000 + 3.400 \left( \frac{1}{1 + 0,1} \right)^2 = -1.000 + 2.810 = 1.810 \text{ euro.} \end{aligned}$$

In conclusione il secondo progetto ha valore attuale superiore e quindi il metodo del valore attuale ci dice che la seconda alternativa è più conveniente.

Il criterio del valore attuale netto viene anche detto **NPV**, cioè Net Present Value.

## 1.5 Contratti forward e future.

I titoli derivati sono caratterizzati dal fatto che il loro valore dipende dal valore di un'attività finanziaria o dal verificarsi nel futuro di un dato evento osservabile oggettivamente (ad esempio l'evento può essere costituito dal raggiungimento di un dato valore da parte di un indice di Borsa). L'attività o l'evento costituiscono il **sottostante** del prodotto derivato.

La relazione, rappresentata mediante una funzione matematica, che lega il valore del derivato al sottostante, è detta **pay-off**.

Una categoria importante di prodotti derivati è costituita dai **contratti a termine**.

**Definizione 1.10.** *Un contratto a termine è un accordo tra due soggetti per la consegna di una determinata quantità di un dato sottostante ad un prezzo e ad una data prefissati.*

*Il prezzo è detto prezzo di consegna e la data è detta data di scadenza.*

Il sottostante può essere di vario tipo:

- **attività finanziarie**, come azioni, obbligazioni, valute, strumenti finanziari derivati, indici di Borsa, ecc.

- **merci**, come petrolio, oro, grano, caffè, ecc.

L'**acquirente** (colui che si impegna alla scadenza a corrispondere il prezzo di consegna per ricevere il sottostante) apre sul mercato una **posizione lunga**, mentre il **venditore** (colui che si impegna alla scadenza a consegnare il sottostante per ricevere il prezzo di consegna) apre sul mercato una **posizione corta**.

I contratti a termine sono strutturati in modo che al momento della loro conclusione le due prestazioni siano equivalenti. Ciò è ottenuto ponendo il prezzo di consegna, cioè quello stabilito nel contratto, pari al prezzo a termine che è uguale al prezzo corrente del sottostante, maggiorato del valore finanziario del tempo intercorrente tra la data di stipula e la data di scadenza. Il prezzo a termine, perché le due prestazioni siano effettivamente equivalenti alla conclusione, deve essere uguale al prezzo di mercato del bene sottostante alla data di scadenza. Ma tale condizione potrebbe non verificarsi in ragione dei movimenti del

prezzo corrente che il sottostante via via assume. Ciò determina il **profilo di rischio/rendimento** di un contratto a termine che può essere così riassunto:

- per l'acquirente il rischio è rappresentato dal deprezzamento del bene; se non fosse vincolato dal contratto, potrebbe acquistare il bene sul mercato ad un prezzo inferiore. Viceversa, in caso di apprezzamento del bene sottostante, l'acquirente maturerà un guadagno
- per il venditore il rischio è rappresentato dall'apprezzamento del bene sottostante poiché il contratto lo costringe a vendere il bene ad un prezzo inferiore a quello che realizzerebbe sul mercato. Viceversa conseguirà un guadagno in caso di deprezzamento perché, a causa del contratto, venderà il bene ad un prezzo superiore a quello di mercato.

La decisione di stipulare un contratto a termine può essere ricondotta alle seguenti finalità:

- **finalità di copertura (hedging).**

Supponiamo di detenere ad esempio titoli di Stato decennali che già sappiamo di dover vendere prima della scadenza per pagare la rata di un mutuo che scade il 30 settembre ed il cui importo è uguale al valore attuale dei titoli. In questa situazione siamo esposti al rischio del deprezzamento che i titoli di Stato potrebbero subire per cui il 30 settembre l'ammontare della loro vendita non sarebbe sufficiente a pagare le rate del mutuo. La conclusione di un contratto a termine come venditori ci copre da questo rischio. Infatti venderemo a termine i titoli di Stato con scadenza il 30 settembre e prezzo di consegna uguale al loro valore attuale.

- **finalità speculativa.**

Se siamo convinti che una certa attività, ad esempio le azioni Alfa, avrà un notevole incremento di valore, possiamo stipulare un contratto a termine come acquirenti con prezzo di consegna pari al prezzo a termine e, se come pensiamo, il titolo incrementerà il proprio valore, alla scadenza del contratto acquisteremo le azioni Alfa ad un prezzo inferiore a quello di mercato.

L'esecuzione del contratto alla scadenza può realizzarsi:

- con l'effettiva consegna del bene sottostante da parte del venditore all'acquirente dietro pagamento del prezzo di consegna: **consegna fisica o physical delivery**

- con il pagamento del differenziale in denaro tra il prezzo corrente del sottostante al momento della scadenza e il prezzo di consegna indicato nel contratto. Se la differenza è positiva sarà dovuta dal venditore all'acquirente e viceversa se negativa: **consegna per differenziale o cash settlement**.

Le principali tipologie dei contratti a termine sono i contratti **forward** e i contratti **future**.

### **Contratti forward.**

I contratti forward si caratterizzano per il fatto di essere stipulati fuori dai mercati regolamentati, cioè nei mercati OTC.

Analizziamo i **flussi di cassa** ossia i pagamenti che vengono scambiati tra le due parti durante la vita del contratto. Nel contratto forward gli unici flussi di cassa si manifestano alla scadenza con la consegna fisica del bene o con la consegna del differenziale. Non sono previsti flussi di cassa intermedi durante la vita del contratto, anche se il prezzo a termine del bene sottostante è soggetto a modifiche in funzione dell'andamento del relativo prezzo di mercato. Di norma non sono previsti flussi di cassa neanche alla data di stipula poiché il contratto a termine è strutturato in modo da rendere equivalenti le due prestazioni.

### **Esempio 1.7.**

Consideriamo un contratto a termine forward avente come bene sottostante un barile di petrolio:

- il prezzo di mercato del barile alla scadenza, nei due casi che ipotizziamo, è pari a 90 euro e 80 euro
- il prezzo di consegna è di 85 euro
- la scadenza è fissata a 90 giorni dalla data di stipulazione del contratto
- la data di stipulazione del contratto è il 1<sup>o</sup> marzo 2011.

Alla scadenza (30 maggio 2011) l'acquirente del forward pagherà 85 euro alla controparte e in cambio riceverà un barile di petrolio (physical delivery) oppure riceverà una somma pari al prezzo di mercato del barile di petrolio (cash settlement).

Nel primo caso ipotizzato, il valore di mercato del barile alla scadenza è pari a 90 euro e l'acquirente, se adotterà la consegna fisica, riceverà un barile di petrolio pagando solo 85 euro con un guadagno di 5 euro. Se adotterà il cash settlement, poiché il prezzo di mercato del sottostante è superiore di 5 euro al prezzo di consegna, riceverà dal venditore la differenza di 5 euro. In ogni caso l'acquirente guadagna 5 euro e il venditore ne perde altrettanti.

Nel secondo caso il valore di mercato del barile alla scadenza è pari a 80 euro. Le parti si invertono. L'acquirente subisce una perdita di 5 euro e il venditore

ne guadagna altrettanti.

### Contratti future.

I contratti futures sono anch'essi contratti a termine come i forward, ma se ne differenziano per essere standardizzati e negoziati sui mercati regolamentati. Il loro prezzo, detto **future price**, essendo quotato sui mercati regolamentati, non è propriamente contrattato tra le parti, ma è il risultato dell'incontro di proposte di acquisto, immesse da chi vuol acquistare, con le proposte di vendita, immesse da chi intende vendere. Di norma è indicato in punti indice.

In relazione all'attività sottostante, il contratto future assume diverse denominazioni:

- **commodity future** se l'attività sottostante è una merce
- **financial future** se l'attività sottostante è un'attività finanziaria.

La standardizzazione fa sì che esistano contratti uguali per

- oggetto (cioè il bene sottostante)
- dimensione (cioè il valore nominale che si ottiene moltiplicando il prezzo espresso in punti indice per un moltiplicatore convenzionalmente stabilito)
- date di scadenza (c'è un calendario prefissato con in genere quattro scadenze in un anno)
- regole di negoziazione (orari di contrattazione, luoghi di consegna, modalità di liquidazione, ecc.).

Ulteriore elemento distintivo rispetto ai forward è la presenza della **Clearing House** che si interpone in tutte le transazioni concluse sui mercati dei futures. In Italia svolge il ruolo di Clearing House la Cassa di Compensazione e Garanzia. Quando due soggetti compravendono un contratto, ne danno immediatamente comunicazione alla Clearing House che procede a comprare il future dalla parte di chi ha venduto e a venderlo alla parte che ha comprato. La Clearing House assume dunque il ruolo di controparte sia dell'acquirente sia del venditore. Gli obblighi contrattuali non sorgono direttamente tra acquirente e venditore, ma tra ciascun contraente e la Clearing House. Così nel caso di inadempimento di una delle due parti, la Clearing House si sostituisce ai suoi obblighi garantendo il buon esito della transazione, salvo poi rivalersi sul soggetto inadempiente.

La Clearing House adotta il **sistema dei margini** a tutela delle posizioni aperte sul mercato dal rischio di inadempimento. Tale sistema prevede il versamento da parte dei due contraenti di un margine iniziale, pari ad una fissata percentuale

del valore nominale, su un apposito conto detenuto dalla Clearing House. Tale margine viene versato a garanzia del buon fine della transazione e verrà restituito nel giorno di liquidazione del contratto future.

Oltre al margine iniziale, viene calcolato giornalmente un altro margine, il margine di variazione, che corrisponde al guadagno o alla perdita realizzati da ciascuna delle due parti alla fine della giornata lavorativa. A fine giornata la Clearing House rileva il prezzo di chiusura del future e, calcolando la differenza tra questo e il prezzo di chiusura del giorno precedente, determina il profitto e la perdita di ogni parte come se la posizione fosse liquidata in quel momento. La parte che ha subito una variazione di prezzo sfavorevole paga alla Clearing House il relativo margine di variazione e questa provvede a girarlo alla parte per la quale la variazione del prezzo è stata positiva.

Dunque nel caso di contratto future, vi sono flussi di cassa sia all'atto della stipula del contratto (margine iniziale) sia durante la vita del contratto (margine di variazione) sia alla scadenza (liquidazione del contratto).

### **Esempio 1.8.**

Consideriamo un future avente come sottostante il titolo azionario Alfa:

- il prezzo future al quale è stato compravenduto il contratto è pari a 110 punti
- il valore nominale del contratto è pari a 1 euro per ogni punto ed è quindi di 110 euro
- il contratto impegna all'acquisto/vendita di un'unità di sottostante
- la scadenza è a tre giorni dalla data di stipulazione del contratto
- il margine iniziale è pari al 10% del valore nominale del contratto.

Alla scadenza l'acquirente pagherà 110 euro alla Cassa di Compensazione e Garanzia e riceverà un titolo Alfa (physical delivery) oppure riceverà una somma pari alla differenza fra prezzo di mercato del titolo Alfa e prezzo future (cash settlement). E' evidente che nel caso in cui il prezzo di mercato sia  $> 110$ , ci sarà un profitto per l'acquirente e una perdita per il venditore. Se invece il prezzo di mercato è  $< 110$ , avverrà l'opposto riguardo guadagno e perdita per acquirente e venditore. Questo è il risultato finanziario complessivo dell'operazione alla scadenza.

Ma abbiamo visto che i futures prevedono il versamento dei margini di variazione durante la vita del contratto.

Per comprendere come funziona il sistema dei margini, ipotizziamo una evoluzione dei titoli Alfa tale che l'acquirente a termine abbia un profitto di 0,3 euro.

Al momento iniziale entrambe le parti versano come margine iniziale 11 euro.

Al secondo giorno, assumendo che il prezzo sia diminuito a 109,5 punti indice, l'acquirente ha maturato una perdita pari a 0,5 euro poiché  $(109,5 - 110) \times 1$  euro = - 0,5 euro. L'acquirente dovrà corrispondere immediatamente alla Clea-

ring House 0,5 euro.

Al terzo giorno, assumendo che il prezzo sia aumentato a 109,7, l'acquirente ha maturato un guadagno pari a  $(109,7 - 109,5) \times 1 \text{ euro} = 0,2 \text{ euro}$  che riceverà dalla Clearing House, ma che non gli consentirà di colmare la perdita del giorno precedente. A livello cumulato, l'acquirente sopporta ancora una perdita di 0,3 euro.

Al quarto giorno, supponendo che il prezzo sia pari a 110,3, l'acquirente ha maturato un guadagno rispetto al giorno precedente pari a  $(110,3 - 109,7) \times 1 \text{ euro} = 0,6 \text{ euro}$ . Questo guadagno consente all'acquirente di ripianare la residua perdita derivante dal secondo giorno e anzi, a livello cumulato, l'acquirente avrà conseguito un guadagno di 0,3 euro.

Alla scadenza verrà anche restituito alle parti il margine inizialmente versato di 11 euro.

Mediante il sistema di margine, le parti sono tutelate dal rischio di inadempimento. Infatti, se una parte non corrisponde la perdita giornaliera maturata, la Clearing House utilizza il margine iniziale per corrispondere il profitto maturato alla controparte e invita la parte inadempiente a reintegrare il margine iniziale. Ove ciò non avvenga, la Clearing House provvede a chiudere la posizione della parte che non ha versato il margine, evitando così futuri inadempimenti.

In Italia nel 1992 è stato creato il **MIF**, il **Mercato italiano dei futures**, che nel 2003 è stato conglobato nell'**EURO-GLOBEX** che comprende il MIF italiano, il MATIF francese e il MEEF spagnolo.

## 1.6 Nozioni di base sulle Opzioni

In questo paragrafo esponiamo alcune nozioni di base relativamente alle opzioni classiche, dette **opzioni vanilla**, o **opzioni standard**

**Definizione 1.11.** *Le opzioni sono contratti derivati che attribuiscono ad un soggetto, dietro pagamento di un corrispettivo denominato **premio** (prezzo delle opzioni), la facoltà, da esercitare entro la data di scadenza o alla data di scadenza, detta **data di esercizio**, di acquistare o vendere determinate attività ad un prezzo fissato, detto **prezzo di esercizio**.*

Dunque nel contratto intervengono due soggetti:

- l'**acquirente (holder)** che pagando il premio acquista la facoltà di esercitare l'opzione al prezzo di esercizio. Assume dunque posizione lunga ed acquista un diritto sull'attività sottostante senza però essere soggetto ad alcun obbligo

- il **venditore (writer)** che rilascia l'opzione alla controparte ed assume posizione corta. La sua posizione implica un obbligo e non un diritto.

Le attività sottostanti il contratto possono essere rappresentate da merci o da strumenti finanziari come titoli di Stato, azioni, indici di Borsa, futures, tassi di interesse, cambi esteri, ecc.

La principale classificazione delle opzioni consiste nella differenziazione tra:

- **opzioni di acquisto o call options** che conferiscono al possessore la facoltà di acquistare ad un prezzo prestabilito
- **opzioni di vendita o put options** che attribuiscono al possessore la facoltà di vendere ad un prezzo prestabilito.

Sotto il profilo del tempo in cui il diritto può essere esercitato, è possibile distinguere:

- **opzioni europee** se la facoltà può essere esercitata esclusivamente alla data di esercizio
- **opzioni americane** se può essere esercitata in qualsiasi momento entro la data di esercizio.

Consideriamo un'opzione call europea che ha  $T$  come data di esercizio. Sia  $X$  il prezzo di esercizio e  $S(T)$  il prezzo del sottostante alla data  $T$ .

Se  $S(T) > X$ , all'acquirente della call conviene esercitare l'opzione poiché acquista l'attività sottostante al prezzo  $X$  che è inferiore al suo prezzo di mercato e dunque ha un profitto dato da  $S(T) - X$ . Ovviamente, se  $S(T) \leq X$ , l'acquirente di una call non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio pagato alla stipula del contratto.

Se invece l'opzione è una put, all'acquirente conviene esercitare l'opzione se  $S(T) < X$  perché così vende l'attività sottostante al prezzo  $X$  che è superiore al prezzo di mercato e dunque ha un profitto dato da  $X - S(T)$ . Ovviamente, se  $S(T) \geq X$ , l'acquirente di una put non esercita l'opzione ed ha una perdita pari al premio.

Se la call o la put fosse americana, tale argomentazione si dovrebbe fare relativamente a tutti i tempi precedenti  $T$ .

Chi vende l'opzione ha una perdita (o un profitto) pari al profitto (o alla perdita) di chi ha acquistato l'opzione.

L'acquirente di una call come il venditore di una put si attende un aumento del prezzo dell'attività sottostante, mentre l'acquirente di una put così come il venditore di una call si aspetta una diminuzione di prezzo dell'attività sottostante.

Gli acquirenti di opzioni pagano un premio perché hanno illimitate possibilità di profitto, mentre hanno limitate possibilità di perdita (al massimo perdono il premio versato), all'opposto i venditori di opzioni ricevono un premio perché a fronte di profitti limitati hanno potenziali perdite illimitate.

Sia  $T$  la data di esercizio di un'opzione e sia  $t$  un tempo  $\leq T$ .

Al tempo  $t$  l'opzione può essere **in the money, at the money, out of the money**.

Indichiamo con  $S(t)$  il prezzo del sottostante al tempo  $t$  e con  $X$  il prezzo di esercizio.

**Definizione 1.12.** *Diciamo che un'opzione è in the money al tempo  $t$  se comporterebbe per l'acquirente un flusso di cassa positivo se venisse esercitata immediatamente.*

Pertanto una call è in the money se  $S(t) > X$ , una put è in the money se  $S(t) < X$ .

**Definizione 1.13.** *Diciamo che un'opzione è at the money al tempo  $t$  se comporterebbe per il possessore un flusso di cassa nullo in caso di esercizio immediato.*

Dunque è at the money ogni opzione per la quale  $S(t) = X$  sia che si tratti di una call che di una put.

**Definizione 1.14.** *Diciamo che un'opzione è out of the money al tempo  $t$  se comporterebbe per il possessore un flusso di cassa negativo se venisse esercitata immediatamente.*

Quindi una call è out of the money se  $S(t) < X$ , una put è out of the money se  $S(t) > X$ .

Nel caso di opzione europea questa verrà esercitata solo se alla data di scadenza è in the money, nel caso di opzione americana verrà esercitata ad una data antecedente la data di scadenza solo se in tale data è in the money.

**Definizione 1.15.** *Il valore intrinseco di un'opzione ad un tempo  $t \leq T$  con  $T$  data di esercizio è definito come il massimo tra 0 e il valore che l'opzione avrebbe se fosse esercitata immediatamente.*

Dunque per una call il valore intrinseco è dato da  $\max\{S(t) - X, 0\}$  e per una put il valore intrinseco è dato da  $\max\{X - S(t), 0\}$ .

Le opzioni sono prodotti finanziari introdotti per la prima volta sul mercato di Chicago nel 1973.

Il modello matematico per le opzioni è stato formulato nel 1973 da Black e Scholes e generalizzato nello stesso anno da Merton. Nel 1997 è stato conferito il premio Nobel per l'Economia a Scholes e Merton (nel frattempo Black era deceduto).

## 1.7 Portafogli di arbitraggio.

**Definizione 1.16.** *Un portafoglio è un insieme di quantità detenute di titoli (una quantità per ogni titolo).*

Un portafoglio è dunque una collezione di contratti, ciascuno dei quali prevede pagamenti a diverse date e in diversi stati.

Ad esempio un portafoglio è costituito da 5 azioni FIAT, 6 BOT, 3 BTP, ecc....

Supponiamo che nel portafoglio siano presenti  $N$  titoli. Denotiamo con  $\vartheta_i$  la quantità detenuta del titolo  $i$ -esimo. Si osservi che  $\vartheta_i$  può essere positivo e negativo a seconda della posizione aperta sul titolo  $i$ -esimo dal detentore del portafoglio: se sul titolo  $i$ -esimo il detentore del portafoglio ha una posizione lunga (ossia ha la posizione di acquirente), allora  $\vartheta_i > 0$  e viceversa; se sul titolo  $i$ -esimo ha una posizione corta (ossia ha la posizione di venditore), allora  $\vartheta_i < 0$  e viceversa.

Indichiamo con  $p_i$  il prezzo del titolo  $i$ -esimo.

**Definizione 1.17.** *Definiamo vettore dei prezzi il vettore  $p \in \mathbb{R}^N$  rappresentato dal vettore colonna:*

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}.$$

Identifichiamo un portafoglio con il vettore  $\vartheta \in \mathbb{R}^N$  rappresentato mediante il vettore colonna delle quantità di ogni titolo:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \dots \\ \vartheta_N \end{pmatrix}.$$

Pertanto  $\vartheta$  rappresenta le posizioni prese dal detentore del portafoglio ad una certa data.

**Definizione 1.18.** *Dato il vettore dei prezzi  $p$ , il costo del portafoglio  $\vartheta$  è dato da:*

$$\sum_{i=1}^N p_i \vartheta_i = p^T \vartheta.$$

Sia  $K$  il numero degli stati possibili. I titoli, a seconda dello stato, possono dare luogo a pagamenti diversi in date future. Diamo pertanto la seguente definizione:

**Definizione 1.19.** *Definiamo matrice dei pagamenti (ad una certa data futura) la seguente matrice  $N \times K$ :*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & \dots & d_{NK} \end{pmatrix}$$

dove  $d_{ij}$  rappresenta il numero di unità di conto pagate da un'unità del titolo  $i$ -esimo nello stato  $j$ .

**Definizione 1.20.** *Il flusso dei pagamenti del portafoglio nello stato  $j$  è dato da*

$$\sum_{i=1}^N d_{ij} \vartheta_i = d_j^T \vartheta,$$

dove con  $d_j$  denotiamo il vettore colonna  $\begin{pmatrix} d_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ d_{Nj} \end{pmatrix}$ .

Nel seguito, dato un qualsiasi vettore  $q \in \mathbb{R}^n$ , scriveremo  $q > 0$  ( $< 0$ ) se tutte le sue componenti sono positive (negative) e  $q \geq 0$  ( $\leq 0$ ) se tutte le sue componenti sono non negative (non positive).

**Definizione 1.21.** *Un portafoglio  $\vartheta$  si dice portafoglio di arbitraggio se è soddisfatta una di queste due condizioni:*

$$i) \quad p^T \vartheta \leq 0 \quad e \quad D^T \vartheta > 0$$

$$ii) \quad p^T \vartheta < 0 \quad e \quad D^T \vartheta \geq 0.$$

La condizione *i)* ci dice che il costo del portafoglio è non positivo e i flussi dei pagamenti sono positivi in ogni stato.

La condizione *ii)* ci dice che il costo del portafoglio è negativo e i flussi dei pagamenti sono non negativi in ogni stato.

Dunque un portafoglio di arbitraggio garantisce pagamenti positivi in tutti gli

stati, cioè profitto sicuro, a costo al più nullo oppure pagamenti non negativi a costo negativo.

L'assenza di possibilità di arbitraggio, cioè l'impossibilità di comporre un portafoglio di arbitraggio, implica che non esiste un investimento a costo nullo che garantisca con certezza un profitto positivo nei tempi futuri, ma non è vero il viceversa.

**Esempio 1.9. Esempio di portafoglio di arbitraggio.**

Supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati ( $K = 2$ ).

Un portafoglio  $\vartheta$  sia così costituito:

- 1) 1 posizione corta su una obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;
- 2) 1 posizione lunga su un'azione con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 229 nello stato 1 e 192 nello stato 2. Inoltre nello stato 1 l'azione paga dopo un anno un dividendo pari a 1 e nessun dividendo nello stato 2;
- 3) 1 posizione lunga su un'azione con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2. Inoltre nello stato 1 e nello stato 2 l'azione dopo un anno non paga dividendi.

Verifichiamo che il portafoglio è un portafoglio di arbitraggio.

Scriviamo il vettore  $\vartheta$  e il vettore dei prezzi  $p$ :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora il costo del portafoglio:

$$p^T \vartheta = 300 \cdot (-1) + 200 \cdot 1 + 100 \cdot 1 = 0.$$

Dunque il costo del portafoglio è nullo. Consideriamo ora la matrice dei pagamenti (dopo 1 anno). Teniamo presente che l'obbligazione dopo 1 anno indipendentemente dallo stato paga:

$$300 + 300 \cdot 0,03 \cdot 1 = 309$$

e che l'azione che rappresenta il II titolo dà luogo dopo un anno ad un dividendo pari a 1 nel I stato.

Otteniamo dunque:

$$D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 230 & 192 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il flusso dei pagamenti dovuti al portafoglio nello stato 1:

$$309 \cdot (-1) + 230 \cdot 1 + 80 \cdot 1 = 1 > 0$$

e il flusso dei pagamenti dovuti al portafoglio nello stato 2:

$$309 \cdot (-1) + 192 \cdot 1 + 120 \cdot 1 = 3 > 0$$

Abbiamo un portafoglio con costo nullo e per il quale sono positivi entrambi i flussi dei pagamenti; è dunque un portafoglio di arbitraggio, essendo verificata la condizione *i*).

Ci poniamo ora la seguente domanda: assegnati  $p$  e  $D$ , ci sono possibilità di arbitraggio?

La risposta ci viene dal seguente teorema, detto **Teorema fondamentale dell'arbitraggio**

**Teorema 1.1.** *Assegnati il vettore dei prezzi  $p$  e la matrice dei pagamenti  $D$ , non ci sono possibilità di arbitraggio se e solo se  $\exists \varphi > 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}^K$ ) tale che*

$$p = D \varphi.$$

Il vettore  $\varphi$  è detto **vettore dei prezzi di stato**.

Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare la condizione sufficiente perché la dimostrazione della condizione necessaria è molto complessa.

Supponiamo che esista un vettore  $\varphi > 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}^K$ ) tale che

$$p = D \varphi.$$

Vogliamo dimostrare che non ci sono possibilità di arbitraggio.

Ragioniamo per assurdo: supponiamo che esista un portafoglio di arbitraggio  $\vartheta$ . D'altra parte per l'ipotesi da cui siamo partiti, si ha

$$p^T \vartheta = (D \varphi)^T \vartheta = \varphi^T D^T \vartheta,$$

ossia

$$p^T \vartheta = \varphi^T (D^T \vartheta). \quad (1.7.1)$$

Ma abbiamo supposto che  $\vartheta$  sia un portafoglio di arbitraggio per cui è soddisfatta la condizione *i*) o la condizione *ii*).

Supponiamo dapprima verificata la condizione *i*) per cui si ha:

$$p^T \vartheta \leq 0 \quad \text{e} \quad D^T \vartheta > 0.$$

Poiché per ipotesi  $\varphi > 0$ , deduciamo:

$$\varphi^T (D^T \vartheta) > 0.$$

Ma allora, tenendo presente la (1.7.1), ricaviamo che dobbiamo avere simultaneamente:

$$p^T \vartheta \leq 0 \quad \text{e} \quad p^T \vartheta > 0$$

che è un assurdo.

Supponiamo ora verificata la condizione *ii*):

$$p^T \vartheta < 0 \quad \text{e} \quad D^T \vartheta \geq 0.$$

Poiché  $\varphi > 0$ , si ha

$$\varphi^T (D^T \vartheta) \geq 0.$$

Allora si ottiene dalla (1.7.1) che si deve avere simultaneamente:

$$p^T \vartheta < 0 \quad \text{e} \quad p^T \vartheta \geq 0$$

che è ancora un assurdo.

Dunque la condizione sufficiente del teorema è dimostrata.

### Esempio 1.10.

Supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati possibili ( $K = 2$ ).

I titoli siano i seguenti:

- 1) I titolo = una obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;
- 2) II titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 229 nello stato 1 e 189 nello stato 2;
- 3) III titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2.

Ci chiediamo se ci sono possibilità di arbitraggio.

Per rispondere a questa domanda applicheremo il teorema fondamentale dell'arbitraggio.

Scriviamo dapprima il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 229 & 189 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

In base al teorema fondamentale dell'arbitraggio, abbiamo che se esiste un vettore  $\varphi > 0$  ( $\varphi \in \mathbb{R}^2$ ) tale che

$$p = D \varphi,$$

non ci sono possibilità di arbitraggio.

Vediamo allora se  $\exists \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  con  $\varphi_1, \varphi_2 > 0$  tale che

$$\begin{aligned} 309 \varphi_1 + 309 \varphi_2 &= 300 \\ 229 \varphi_1 + 189 \varphi_2 &= 200 \\ 80 \varphi_1 + 120 \varphi_2 &= 100. \end{aligned}$$

Il sistema scritto sopra è un sistema algebrico lineare di tre equazioni in 2 incognite, ma notiamo che la II equazione si ottiene sottraendo membro a membro dalla I equazione la III. Dunque il sistema è equivalente a quello costituito dalla I e dalla III equazione:

$$\begin{aligned} 309 \varphi_1 + 309 \varphi_2 &= 300 \\ 80 \varphi_1 + 120 \varphi_2 &= 100, \end{aligned}$$

che, con opportune semplificazioni, si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} 1,03 \varphi_1 + 1,03 \varphi_2 &= 1 \\ 4 \varphi_1 + 6 \varphi_2 &= 5. \end{aligned}$$

Tale sistema, come si può verificare facilmente, è un sistema di Cramer ed ammette quindi una e una sola soluzione data da

$$\varphi_1 \simeq 0,41 > 0 \quad \varphi_2 \simeq 0,56 > 0.$$

Dunque per il teorema fondamentale dell'arbitraggio non ci sono possibilità di arbitraggio.

### **Esempio 1.11.**

Come negli esempi precedenti, supponiamo di avere tre titoli ( $N = 3$ ) e due stati del mondo ( $K = 2$ ).

I tre titoli siano i seguenti:

- 1) I titolo = un'obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 300$  e tasso di interesse annuo  $r = 3\%$ ;
- 2) II titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(1)} = 200$  e prezzo dopo un anno pari a 230 nello stato 1 e 190 nello stato 2;

- 3) III titolo = un'azione priva di dividendi con prezzo iniziale  $S_0^{(2)} = 100$  e prezzo dopo un anno pari a 80 nello stato 1 e 120 nello stato 2.

Ci proponiamo di stabilire se ci sono possibilità di arbitraggio e, in caso di risposta affermativa, di comporre un portafoglio di arbitraggio.

Scriviamo il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 309 & 309 \\ 230 & 190 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}.$$

Perché ci sia possibilità di arbitraggio dobbiamo provare che non esiste alcun vettore  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  tale che  $p = D \varphi$  e con entrambe le componenti positive.

Consideriamo perciò il sistema

$$\begin{aligned} 309 \varphi_1 + 309 \varphi_2 &= 300 \\ 230 \varphi_1 + 190 \varphi_2 &= 200 \\ 80 \varphi_1 + 120 \varphi_2 &= 100. \end{aligned}$$

Il sistema scritto sopra è un sistema lineare di tre equazioni in 2 incognite. Perché ammetta soluzione è necessario e sufficiente che la matrice incompleta (ossia la matrice dei coefficienti delle incognite) e la matrice completa (ossia la matrice dei coefficienti delle incognite e del termine noto) abbiano lo stesso rango. Ma, come si verifica facilmente, la matrice incompleta ha rango 2 e la matrice completa 3. Dunque il sistema non ammette soluzione e c'è possibilità di arbitraggio.

Vediamo di trovare un portafoglio di arbitraggio.

Prendiamo un portafoglio con costo nullo:  $p^T \vartheta = 0$ . Perciò dovremo avere:

$$300 \vartheta_1 + 200 \vartheta_2 + 100 \vartheta_3 = 0.$$

Scegliamo:

$$\vartheta_1 = -1, \quad \vartheta_2 = 1, \quad \vartheta_3 = 1.$$

Con questa scelta, se andiamo a vedere il flusso dei pagamenti nello stato 1, otteniamo:

$$309 \cdot (-1) + 230 \cdot 1 + 80 \cdot 1 = 1 > 0,$$

e nello stato 2:

$$309 \cdot (-1) + 190 \cdot 1 + 120 \cdot 1 = 1 > 0.$$

Il portafoglio scelto è un portafoglio di arbitraggio.

Vediamo ora di applicare il teorema fondamentale dell'arbitraggio facendo intervenire tra i titoli del portafoglio anche delle opzioni.

Consideriamo un'opzione call europea con sottostante un'azione avente prezzo  $S$  alla scadenza dell'opzione stessa. Se  $S > X$  con  $X$  prezzo di esercizio, il possessore esercita l'opzione e riceve  $S - X$ , se invece  $S \leq X$ , il possessore non esercita la call e riceve 0. Quindi alla scadenza il pagamento ricevuto dal detentore di una call è  $= \max\{S - X, 0\}$ .

Se l'opzione è una put europea e alla scadenza l'azione sottostante ha prezzo  $S < X$ , il detentore esercita la put, cioè vende l'azione al prezzo  $X$  ricevendo  $X - S$ . Se invece  $S \geq X$ , il detentore non esercita l'opzione e perciò riceve 0. Quindi alla scadenza il pagamento ricevuto dal detentore di una put è  $= \max\{X - S, 0\}$ .

Quanto detto sopra sussiste anche per le opzioni americane, tenendo presente che il detentore può esercitare l'opzione in qualunque momento entro la data di scadenza.

Si può fare una previsione matematica sul prezzo corrente di mercato di una call o di una put attraverso il metodo di pricing, cioè di valutazione del prezzo. Nei vari modelli che si possono utilizzare ed in particolare in quello di Black e Scholes per le opzioni call europee si assume sempre valida l'ipotesi della totale assenza di arbitraggio.

Vediamo un esempio di applicazione del teorema fondamentale dell'arbitraggio ad un portafoglio contenente un'opzione.

### Esempio 1.12.

Si abbiano 3 titoli ( $N = 3$ ) e due stati possibili ( $K = 2$ ).

I titoli siano i seguenti:

- 1) 1 obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 1$  e tasso d'interesse annuo del 10%;
- 2) 1 azione, priva di dividendi, con prezzo iniziale  $S_0 = 200$  e con prezzo al tempo  $T = 1$  anno pari a 250 nello stato 1 e 150 nello stato 2;
- 3) 1 call europea con titolo sottostante l'azione, con prezzo di esercizio  $X = 190$ , data di scadenza 1 anno e con prezzo iniziale, cioè il premio da pagare, pari a  $c_0 = 30$ .

Ci chiediamo se ci sono possibilità di arbitraggio.

Scriviamo il vettore dei prezzi e la matrice dei pagamenti:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,1 \\ 250 & 150 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}.$$

dove nella III riga della matrice dei pagamenti, corrispondente alla call, abbiamo tenuto presente che nello stato 1 l'azione ha prezzo  $S = 250 > X = 190$ ; dunque la call viene esercitata e dà il pagamento  $250 - 190 = 60$ . Nello stato 2 si ha  $S = 150 < X = 190$ ; dunque la call non viene esercitata e dà pagamento  $= 0$ .

Vediamo se esiste un vettore  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  tale che  $p = D\varphi$  e con entrambe le componenti positive.

Scriviamo il sistema corrispondente:

$$\begin{aligned} 1,1\varphi_1 + 1,1\varphi_2 &= 1 \\ 250\varphi_1 + 150\varphi_2 &= 200 \\ 60\varphi_1 &= 30. \end{aligned}$$

Dalla III equazione deduciamo

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

e sostituendo nella II equazione otteniamo:

$$125 + 150\varphi_2 = 200,$$

da cui

$$\varphi_2 = \frac{75}{150} = \frac{1}{2}.$$

Ma se nella I equazione poniamo  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$ , questa non è soddisfatta.

Dunque ci sono effettivamente delle possibilità di arbitraggio.

Vediamo di comporre un portafoglio di arbitraggio.

Prendiamo il costo del portafoglio nullo:

$$p^T \vartheta = \vartheta_1 + 200\vartheta_2 + 30\vartheta_3 = 0.$$

Scegliamo ad esempio

$$\vartheta_1 = 140, \quad \vartheta_2 = -1, \quad \vartheta_3 = 2.$$

Con questa scelta vediamo che nello stato 1 il flusso dei pagamenti è

$$1,1 \cdot 140 + 250 \cdot (-1) + 60 \cdot 2 = 274 - 250 = 24 > 0$$

e nello stato 2

$$1,1 \cdot 140 + 150 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 154 - 150 = 4 > 0.$$

Quindi il prezzo iniziale  $c_0 = 30$  della call consente di comporre un portafoglio di arbitraggio. Perciò il prezzo della call aumenterà perché ci sarà una forte richiesta da parte degli arbitraggisti.

Possiamo allora chiederci come si deve fissare il prezzo iniziale  $c_0$  della call in modo tale che non ci siano possibilità di arbitraggio.

Usiamo ancora il teorema fondamentale dell'arbitraggio, stabilendo per quale  $c_0 \exists \varphi > 0$  tale che  $p = D \varphi$ .

Dovremo allora determinare  $c_0$  in modo tale che si abbia:

$$\begin{aligned} 1,1 \varphi_1 + 1,1 \varphi_2 &= 1 \\ 250 \varphi_1 + 150 \varphi_2 &= 200 \\ 60 \varphi_1 &= c_0. \end{aligned}$$

Dalla prime due equazioni si deduce:

$$\varphi_1 \approx 0,6363, \quad \varphi_2 \approx 0,2727.$$

Sostituendo nell'ultima equazione otteniamo

$$c_0 \approx 38,178.$$

Dunque perché non ci sia possibilità di arbitraggio deve essere

$$c_0 \approx 38,178.$$

Se il prezzo della call fissato inizialmente è 30, come detto prima, il suo prezzo aumenta fino ad arrivare al valore di equilibrio  $\approx 38,178$  in corrispondenza del quale gli arbitraggisti non sono più interessati all'acquisto dell'opzione per cui il suo prezzo alla fine si stabilizza sul valore  $\approx 38,178$ .



# Capitolo 2

## Alcune proprietà matematiche delle opzioni ed il loro utilizzo

### 2.1 Introduzione.

Le opzioni si caratterizzano per una certa complessità dei fattori che determinano il loro valore e per un'asimmetria tra profitti e perdite: esse, infatti, come abbiamo visto, prospettano all'acquirente un risultato economico asimmetrico (illimitate possibilità di profitto e perdite limitate) e al venditore un risultato anch'esso asimmetrico, ma con segno opposto (profitti limitati e perdite potenzialmente illimitate).

In questo capitolo ci limitiamo a considerare opzioni che hanno come sottostante un'azione.

Tra i fattori che influenzano il prezzo di un'opzione scritta su un'azione noi terremo per il momento conto dei tre seguenti:

- 1) il prezzo corrente dell'azione;
- 2) la vita residua, cioè il tempo che manca alla data di scadenza;
- 3) il prezzo di esercizio.

In realtà vi sarebbero ulteriori fattori da prendere in considerazione, come la volatilità del prezzo dell'azione e il tasso d'interesse privo di rischio di cui parleremo più avanti, oltre ai dividendi attesi durante la vita dell'opzione, cui faremo un breve cenno in questo capitolo.

Il nostro scopo è di stabilire una serie di proprietà che valgono per le opzioni aventi come sottostante un'azione, stabilite da R. C. Merton nel 1973 sotto le seguenti ipotesi:

- non esistono costi di transazione;
- i tassi d'interesse attivi e passivi sono uguali;
- c'è completa assenza di possibilità di arbitraggio.

## 2.2 Proprietà delle call europee e americane.

Nel seguito utilizzeremo le seguenti notazioni:

$S$  è il prezzo dell'azione sottostante l'opzione;

$X$  è il prezzo di esercizio dell'opzione;

$\tau$  è la vita residua, che al tempo  $t$  è uguale a  $T - t$  con  $T$  data di esercizio;

$c(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una call europea;

$C(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una call americana.

Ovviamente quando  $\tau = 0$  si deve avere:

$$c(S, 0, X) = C(S, 0, X) = \max \{S - X, 0\}.$$

**Proposizione 2.1.** *Il prezzo di una call europea è non negativo.*

Dimostrazione

Sia  $c$  il prezzo di una call europea e supponiamo per assurdo  $c < 0$ . Consideriamo il portafoglio che si ottiene comprando la call: il costo del portafoglio è negativo, ma il pagamento assicurato dall'opzione alla scadenza è  $\max \{S - X, 0\} \geq 0$ .

Allora abbiamo costruito un portafoglio di arbitraggio contro l'ipotesi che avevamo inizialmente assunto. Ci troviamo di fronte a un assurdo e dunque  $c \geq 0$ .

**Osservazione 2.1.** La stessa proposizione vale anche per una call americana.

**Proposizione 2.2.** *Data una call americana, si ha:*

$$C(S, \tau, X) \geq \max \{S - X, 0\},$$

*ossia una call americana vale almeno quanto il suo valore di esercizio.*

Dimostrazione

Se si tiene presente l'osservazione 1, si ha  $C \geq 0$ .

Proviamo ora che  $C \geq S - X$ . Ragioniamo ancora per assurdo e supponiamo  $C < S - X$ . Notiamo che da tale ipotesi segue  $S - X > 0$ . Comprando la call ed esercitandola subito si ha un costo negativo:  $C - (S - X) < 0$  e nei tempi futuri, in tutti gli stati, il valore del portafoglio è 0, poichè sul portafoglio non c'è più niente per cui il pagamento è 0.

Contro l'ipotesi si è costruito un portafoglio di arbitraggio.

**Proposizione 2.3.** *Date una call americana e una europea sullo stesso titolo, con uguale prezzo di esercizio e uguale vita residua, la call americana vale almeno quanto quella europea, ossia*

$$C(S, \tau, X) \geq c(S, \tau, X).$$

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo  $C < c$ . Compriamo la call americana e assumiamo una posizione corta su quella europea. Il costo sostenuto per comporre il portafoglio è  $C - c < 0$  e dunque negativo.

Esaminiamo la situazione alla scadenza nella tabella dei pagamenti, indicando semplicemente con  $S$  il valore dell'azione alla scadenza e riportando i pagamenti nelle ultime due colonne:

	$S \leq X$	$S > X$
call americana	0	$S - X$
call europea	0	$-(S - X)$
Totale	0	0

Si noti che se  $S > X$ , il detentore della call europea la esercita ed ottiene il pagamento  $S - X$ , per cui il detentore del portafoglio ha una perdita di uguale entità.

Vediamo comunque che il nostro portafoglio è un portafoglio di arbitraggio (costo negativo e profitto nullo) per cui siamo ancora di fronte ad un assurdo.

**Proposizione 2.4.** *Data una call europea avente come sottostante un'azione di prezzo  $S$ , si ha*

$$c \leq S.$$

Dimostrazione

Per assurdo, sia  $c > S$ .

Allora si potrebbe comporre un portafoglio comprando l'azione e assumendo una posizione corta sulla call. Il costo iniziale sostenuto è  $S - c < 0$ . Alla scadenza della call si possono avere due casi:

	$S \leq X$	$S > X$
azione	$S$	$S$
call	0	$-(S - X)$
Totale	$S \geq 0$	$X \geq 0$

Il pagamento dovuto al portafoglio alla scadenza è non negativo e perciò abbiamo ancora un portafoglio di arbitraggio contro l'ipotesi.

**Osservazione 2.2.** La proposizione 2.4 sussiste anche per una call americana.

**Proposizione 2.5.** *Date due call americane sulla stessa azione e con il medesimo prezzo di esercizio, si ha:*

$$C(S, \tau_2, X) \geq C(S, \tau_1, X) \quad \text{se } \tau_2 > \tau_1.$$

Dimostrazione

Supponiamo

$$C(S, \tau_2, X) < C(S, \tau_1, X).$$

Se compriamo la call con vita residua  $\tau_2$  e assumiamo una posizione corta sull'altra, il costo iniziale del portafoglio sarà:

$$C(S, \tau_2, X) - C(S, \tau_1, X) < 0.$$

La call con vita residua minore sia esercitata al tempo  $t$ , antecedente o uguale alla data di scadenza; ciò comporta per il portafoglio un pagamento dato da  $-\max\{S(t) - X, 0\}$ . Al tempo  $t$  il valore della call con vita residua maggiore è  $C(S(t), T_2 - t, X)$ , avendo indicato con  $T_2$  la relativa data di scadenza.

Consideriamo

$$C(S(t), T_2 - t, X) - \max\{S(t) - X, 0\}.$$

Se tale valore è positivo, vendendo la call con vita residua maggiore si realizza un profitto positivo. Se tale valore è minore o uguale a zero, si esercita l'opzione allo stesso tempo  $t$  e si ricaverà

$$\max\{S(t) - X, 0\} - \max\{S(t) - X, 0\} = 0.$$

Si ha comunque un portafoglio di arbitraggio con costo negativo e profitto non negativo, contro l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio.

**Osservazione 2.3.** Si noti che l'enunciato della proposizione 2.5 è conforme al fatto che l'opzione americana con maggiore vita residua consente molte più possibilità di esercizio rispetto a quella con vita residua minore.

Sia  $B(\tau)$  il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga una unità di conto dopo un tempo pari a  $\tau$  per cui  $B(0) = 1$ .

Si può dimostrare la seguente

**Proposizione 2.6.** *In assenza di dividendi*

$$c(S, \tau, X) \geq \max\{S - X B(\tau), 0\}.$$

Dimostrazione

Poiché sappiamo che  $c(S, \tau, X) \geq 0$ , è sufficiente dimostrare:

$$c(S, \tau, X) \geq S - X B(\tau).$$

Ragionando per assurdo supponiamo  $c(S, \tau, X) < S - X B(\tau)$ .

Vendendo l'azione, comprando la call e collocando  $X B(\tau)$  in obbligazioni prive di rischio, componiamo un portafoglio con costo iniziale:

$$c(S, \tau, X) - S + X B(\tau)$$

che risulta negativo per l'ipotesi fatta.

Alla scadenza della call, ossia trascorso il tempo  $\tau$ , il valore del portafoglio sarà:

	$S \leq X$	$S > X$
azione	$-S$	$-S$
call	0	$S - X$
obbligazione	X	X
Totale	$X - S \geq 0$	0

In qualunque evenienza il valore del portafoglio è  $\geq 0$  e dunque abbiamo composto un portafoglio di arbitraggio contraddicendo l'ipotesi.

**Osservazione 2.4.** Poiché per la proposizione 2.3  $C(S, \tau, X) \geq c(S, \tau, X)$ , la proposizione 2.6 vale anche per le call americane.

**Osservazione 2.5.** La proposizione 2.6 vale in assenza di dividendi. Se alla scadenza della call sono pagati dividendi pari a  $D$ , ragionando come per la proposizione 2.6, con la sostituzione a fattore di  $B(\tau)$  di  $X$  con  $X + D$ , si può dimostrare che

$$c(S, \tau, X) \geq \max \{S - (X + D)B(\tau), 0\}.$$

**Proposizione 2.7.** *In assenza di dividendi una call americana non verrà mai esercitata prima della scadenza e quindi ha lo stesso valore di una corrispondente call europea cioè*

$$C(S, \tau, X) = c(S, \tau, X).$$

Dimostrazione

Ancora una volta ragioniamo per assurdo, supponendo che la call americana venga esercitata a tempo residuo  $\tau > 0$  (la scadenza si ha per  $\tau = 0$ ). Ovviamente

se la call viene esercitata, abbiamo  $S > X$  e il detentore riceve  $S - X$ .  
Per la proposizione 2.6 e l'osservazione 4 si ha

$$C(S, \tau, X) \geq \max \{S - XB(\tau), 0\}. \quad (2.2.1)$$

Se  $\tau > 0$  avremo  $B(\tau) < 1$  da cui

$$S - XB(\tau) > S - X > 0.$$

Allora dalla (2.2.1) discende

$$C(S, \tau, X) > S - X. \quad (2.2.2)$$

Ma risulta irragionevole aver esercitato la call poichè si è ricevuto  $S - X$  che per la (2.2.2) risulta inferiore a quanto si sarebbe ottenuto vendendola.

Il risultato della proposizione 2.7 è ottenuto sotto l'ipotesi che le opzioni siano scritte su azioni che non pagano dividendi. Nella realtà la maggior parte delle imprese paga dividendi agli azionisti e i possessori di opzioni devono tener conto che allo stacco dei dividendi il prezzo di mercato delle azioni diminuisce e quindi diminuisce anche il valore delle opzioni stesse, il cui possesso non dà diritto al dividendo. Dunque il pagamento di un dividendo può incentivare il possessore di una call americana a non attendere la scadenza per evitare la riduzione del prezzo dell'opzione allo stacco del dividendo. Pertanto, quando ci si attende che vengano distribuiti dividendi, non è possibile affermare che una call americana non verrà mai esercitata anticipatamente.

Le proposizioni seguenti mostrano la relazione che intercorre tra il prezzo di una call e il prezzo di esercizio e quella tra il prezzo di una call e il prezzo dell'azione sottostante.

**Proposizione 2.8.**  $c(S, \tau, X)$  è una funzione convessa del prezzo di esercizio  $X$ .

Dimostrazione

Ricordiamo prima di tutto la definizione di funzione convessa:

Data la funzione reale  $f = f(x)$  definita sull'intervallo  $(a, b)$ , diciamo che è convessa se, comunque presi  $x_1, x_2 \in (a, b)$  con  $x_1 \neq x_2$ , si ha

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

ossia se ogni punto del segmento di estremi  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  non sta al di sotto del grafico della funzione.

E' utile ora considerare la funzione definita su  $\mathbb{R}^+$  nel modo seguente:

$$X \mapsto \max \{S - X, 0\}$$

dove supponiamo  $S (\geq 0)$  fissato in  $\mathbb{R}^+$ .

Il suo grafico è rappresentato nella Figura 2.1:

Figura 2.1

La funzione presa in esame è chiaramente convessa poichè il suo grafico è l'unione di un segmento e di una semiretta.

Allora, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ , per definizione di funzione convessa si ha  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \max \{S - [\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2], 0\} &\leq \lambda \max \{S - X_1, 0\} + \\ &+ (1 - \lambda) \max \{S - X_2, 0\}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

La proposizione risulta dimostrata se proviamo che, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  risulta

$$c(S, \tau, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2). \quad (2.2.4)$$

Ragioniamo per assurdo supponendo che in corrispondenza di una data coppia  $(X_1, X_2)$  esista un  $\lambda \in [0, 1]$  tale che:

$$c(S, \tau, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) > \lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2).$$

Allora potremmo costruire un portafoglio di arbitraggio nel seguente modo: compriamo  $\lambda$  opzioni call sull'azione di prezzo  $S$  con vita residua  $\tau$  e prezzo di esercizio  $X_1$ ,  $(1 - \lambda)$  opzioni call sulla medesima azione con la stessa vita residua

e con prezzo di esercizio  $X_2$  ed assumiamo posizione corta su una call sempre sulla stessa azione con la stessa vita residua ma con prezzo di esercizio  $X_3 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ .

Il costo iniziale del portafoglio è

$$\lambda c(S, \tau, X_1) + (1 - \lambda) c(S, \tau, X_2) - c(S, \tau, X_3)$$

che risulta negativo per l'ipotesi fatta.

D'altra parte, alla scadenza il pagamento dovuto al portafoglio è dato da

$$\lambda \max \{S - X_1, 0\} + (1 - \lambda) \max \{S - X_2, 0\} - \max \{S - X_3, 0\}$$

che risulta non negativo per la (2.2.3).

Ma per ipotesi non c'è possibilità di arbitraggio e dunque, abbiamo ancora una volta ottenuto un assurdo per cui, comunque presi  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $X_1 \neq X_2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  deve valere la (2.2.4)

**Osservazione 2.6.** La proposizione 2.8 vale anche per call americane.

**Proposizione 2.9.** Se  $c(S, \tau, X)$  è una funzione omogenea di grado 1 in  $S$  e in  $X$ , allora è una funzione convessa di  $S$ .

Dimostrazione

Ricordiamo che  $c(S, \tau, X)$  è una funzione omogenea di grado 1 in  $S$  e in  $X$  se

$$\forall k \in \mathbb{R}^+ \quad c(kS, \tau, kX) = kc(S, \tau, X). \quad (2.2.5)$$

Dobbiamo dimostrare che, nell'ipotesi che valga la (2.2.5), presi  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^+$  con  $S_1 \neq S_2$ , si ha

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad c(\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2, \tau, X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X).$$

Poniamo

$$S_3 = \lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2 \quad X_1 = \frac{X}{S_1} \quad X_2 = \frac{X}{S_2} \quad \gamma = \lambda \frac{S_1}{S_3} \geq 0.$$

In effetti  $\gamma \leq 1$  poichè

$$\gamma = \frac{\lambda S_1}{S_3} = \frac{\lambda S_1}{\lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2} \quad \text{con} \quad (1 - \lambda) S_2 \geq 0.$$

Dunque  $\gamma \in [0, 1]$ .

Per la proposizione 2.8 abbiamo:

$$c(1, \tau, \gamma X_1 + (1 - \gamma)X_2) \leq \gamma c(1, \tau, X_1) + (1 - \gamma) c(1, \tau, X_2).$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza scritta sopra per  $S_3$  e sfruttando l'omogeneità di  $c$  deduciamo:

$$c(S_3, \tau, \gamma X_1 S_3 + (1 - \gamma) X_2 S_3) \leq \lambda S_1 c(1, \tau, X_1) + (1 - \lambda) S_2 c(1, \tau, X_2) \quad (2.2.6)$$

dove abbiamo tenuto presente che

$$\gamma S_3 = \lambda S_1, \quad (1 - \gamma) S_3 = \left(1 - \lambda \frac{S_1}{S_3}\right) S_3 = S_3 - \lambda S_1 = (1 - \lambda) S_2.$$

Ma, per le posizioni fatte in precedenza,

$$\gamma X_1 S_3 = \lambda S_1 \frac{X}{S_1} = \lambda X, \quad (1 - \gamma) X_2 S_3 = (1 - \lambda) S_2 \frac{X}{S_2} = (1 - \lambda) X.$$

Sostituendo nella (2.2.6) e tenendo presente l'omogeneità di  $c$ , otteniamo:

$$c(S_3, \tau, \lambda X + (1 - \lambda) X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X_1 S_1) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X_2 S_2).$$

D'altra parte

$$X_1 S_1 = X \quad X_2 S_2 = X$$

per cui infine deduciamo

$$c(S_3, \tau, X) \leq \lambda c(S_1, \tau, X) + (1 - \lambda) c(S_2, \tau, X)$$

che è ciò che volevamo provare.

A questo punto, tenendo presenti le proposizioni appena dimostrate e supponendo che l'azione sottostante la call non paghi dividendi, possiamo avere un'idea più precisa della dipendenza da  $S$  del valore di una call europea  $c(S, \tau, X)$ , supponendo fissati  $\tau$  e  $X$ .

Infatti:

1.  $\max\{S - X B(\tau), 0\} \leq c(S, \tau, X) \leq S$ ;
2. sotto opportune ipotesi la funzione:  $S \mapsto c(S, \tau, X)$  è convessa;
3.  $c(0, \tau, X) = 0$ .

L'ultimo risultato si ottiene dal punto 1. ponendo  $S = 0$  per cui

$$0 \leq c(0, \tau, X) \leq 0.$$

Inoltre alla data di scadenza (cioè per  $\tau = 0$ ) si deve avere

$$c(S, 0, X) = \max\{S - X, 0\}.$$

Infine osserviamo che da 1. discende che per  $S \rightarrow +\infty$   $c(S, \tau, X) \rightarrow +\infty$ .

In Figura 2.2 è rappresentato un probabile grafico di  $c(S, \tau, X)$  in funzione di  $S$  con  $X$  e  $\tau > 0$  fissati, supponendo  $c$  soddisfacente alle ipotesi della proposizione 2.9 e derivabile rispetto a  $S$ .

Figura 2.2

Figura 2.3

In Figura 2.3 a  $\tau$  sono attribuiti i due valori  $\tau_1$  e  $\tau_2$  con  $\tau_2 > \tau_1$ . Come si vede, più l'opzione call si avvicina alla scadenza (cioè  $\tau$  diminuisce) più il suo prezzo si avvicina al pagamento alla scadenza. Inoltre, la tangente al grafico della funzione ha sempre pendenza  $< 1$ , ossia

$$0 < \frac{\partial c}{\partial S} < 1.$$

Per la proposizione 2.7, in assenza di dividendi, ciò che abbiamo detto per le call europee si estende anche alle call americane.

Osserviamo comunque che in effetti non abbiamo ancora trovato un'espressione analitica vera e propria di  $c$ , ma ne abbiamo soltanto ottenuto delle importanti proprietà.

## 2.3 Relazione di parità put - call.

Consideriamo ora un'opzione put e utilizziamo le seguenti notazioni:  
 $p(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una put europea;  
 $P(S, \tau, X)$  è il valore (o prezzo) di una put americana.

Alla scadenza si deve avere:

$$p(S, 0, X) = \max \{X - S, 0\}.$$

La proposizione seguente stabilisce un'importante relazione che lega le call europee e le put europee, aventi come sottostante un'azione, nota come **relazione di parità put - call**.

**Proposizione 2.10.** *Nelle ipotesi che i tassi di interesse attivi e passivi siano uguali e in assenza di dividendi si ha:*

$$p(S, \tau, X) = c(S, \tau, X) - S + X B(\tau).$$

### Dimostrazione

Svolgeremo la dimostrazione in due fasi.

Fase 1.

Dapprima dimostriamo

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) \geq 0. \quad (2.3.1)$$

Ragioniamo per assurdo supponendo che si abbia

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) < 0.$$

Possiamo in tale ipotesi costruire un portafoglio di arbitraggio assumendo una posizione lunga sulla call, una posizione corta sulla put e sull'azione e dando in prestito  $X B(\tau)$ , ossia collocando  $X B(\tau)$  su obbligazioni prive di rischio. Il costo del portafoglio è

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau)$$

che risulta negativo in base all'ipotesi fatta. Vediamo alla scadenza il valore del portafoglio, ossia la tabella dei pagamenti:

	$S \leq X$	$S > X$
call	0	$S - X$
put	$-(X - S)$	0
azione	$-S$	$-S$
obbligazione	$X$	$X$
Totale	0	0

Dunque il valore del portafoglio è nullo con costo iniziale negativo. Il portafoglio è di arbitraggio per cui ci troviamo di fronte ad un assurdo. E' dunque vera la (2.3.1).

Fase 2.

Dimostriamo ora che

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) \leq 0. \quad (2.3.2)$$

Ragioniamo ancora per assurdo supponendo che si abbia

$$c(S, \tau, X) - p(S, \tau, X) - S + X B(\tau) > 0.$$

Possiamo costruire un portafoglio di arbitraggio assumendo una posizione corta sulla call, una posizione lunga sulla put e sull'azione e prendendo in prestito  $X B(\tau)$ . Il costo iniziale del portafoglio è:

$$-c(S, \tau, X) + p(S, \tau, X) + S - X B(\tau)$$

che risulta negativo per l'ipotesi fatta. Vediamo alla scadenza il valore del portafoglio:

	$S \leq X$	$S > X$
call	0	$-(S - X)$
put	$X - S$	0
azione	$S$	$S$
obbligazione	$-X$	$-X$
Totale	0	0

Dunque il valore del portafoglio è nullo con costo iniziale negativo. Il portafoglio è di arbitraggio per cui ci troviamo di fronte ad un assurdo avendo fatto l'ipotesi che ci sia assenza di possibilità di arbitraggio. E' dunque vera la (2.3.2).

Dalle (2.3.1) e (2.3.2) deduciamo:

$$p(S, \tau, X) + S - X B(\tau) \leq c(S, \tau, X) \leq p(S, \tau, X) + S - X B(\tau)$$

da cui

$$c(S, \tau, X) = p(S, \tau, X) + S - X B(\tau),$$

ossia la tesi.

**Osservazione 2.7.** Dalla relazione di parità put-call segue che, se si ha un'espressione esplicita per  $c(S, \tau, X)$ , si ottiene immediatamente anche l'espressione esplicita per  $p(S, \tau, X)$ .

**Osservazione 2.8.** Dalla relazione di parità put-call discendono alcune proprietà delle put europee grazie alle proprietà delle call europee. Precisamente:

1.  $c(S, \tau, X) \geq \max \{S - X B(\tau), 0\} \implies p(S, \tau, X) \geq \max \{X B(\tau) - S, 0\}$ ;
2.  $c(S, \tau, X) \leq S \implies p(S, \tau, X) \leq X B(\tau)$ ;
3. se la funzione  $S \mapsto c(S, \tau, X)$  è convessa, allora lo è anche la funzione  $S \mapsto p(S, \tau, X)$ ;
4. dai punti 1. e 2. (o dalla relazione di parità put-call tenendo presente che  $c(0, \tau, X) = 0$ ) discende:

$$p(0, \tau, X) = X B(\tau).$$

La figura 2.4 rappresenta un probabile grafico della funzione  $S \mapsto p(S, \tau, X)$  con  $X, \tau > 0$  fissati, nell'ipotesi che valga la relazione di parità put-call e che  $c$  sia convessa e derivabile rispetto a  $S$ .

Figura 2.4

= grafico della funzione:  $S \mapsto \max \{X B(\tau) - S, 0\}$ .

E' da rilevare che per una put europea si ha:

$$-1 < \frac{\partial p}{\partial S} < 0.$$

Finora abbiamo considerato solo put europee. Per quanto riguarda le put americane si potrebbe dimostrare la seguente

**Proposizione 2.11.** *Anche in assenza di dividendi, esiste una probabilità positiva che una put americana venga esercitata prima della scadenza. Dunque il valore di una put americana è strettamente maggiore del valore della corrispondente put europea, cioè*

$$P(S, \tau, X) > p(S, \tau, X).$$

Quanto asserito nella precedente proposizione mostra che c'è una differenza notevole tra una call e una put americane. La valutazione delle put americane è un compito più complesso di quella delle corrispondenti europee.

## 2.4 Utilizzo delle opzioni e loro combinazioni.

Nei paragrafi precedenti abbiamo ricavato alcune proprietà per le call e le put aventi come sottostante un'azione senza ancora avere un'espressione analitica vera e propria delle funzioni  $c(S, \tau, X)$  (o  $C(S, \tau, X)$ ) e  $p(S, \tau, X)$  (o  $P(S, \tau, X)$ ). In ogni caso è evidente che si tratta di titoli rischiosi. E' naturale a questo punto chiederci quali sono le finalità di chi utilizza le opzioni.

In primo luogo vi può essere una **finalità speculativa** che illustriamo riprendendo l'esempio alla fine del Capitolo 1 riguardante un portafoglio avente tra i titoli un'opzione nell'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio.

Ricordiamo che i titoli erano 3 e gli stati possibili 2. Precisamente i titoli erano i seguenti:

- 1) un'obbligazione priva di rischio con valore iniziale  $B_0 = 1$  e tasso d'interesse annuo del 10%;
- 2) un'azione, priva di dividendi, con prezzo iniziale  $S_0 = 200$  e con prezzo al tempo  $T = 1$  anno pari a 250 nello stato 1 e 150 nello stato 2;
- 3) una call europea con titolo sottostante l'azione, con prezzo di esercizio  $X = 190$ , data di esercizio 1 anno e con prezzo iniziale pari a  $c_0 = 38,178$ .

Se si possiede la somma di 38,178, con questa si può acquistare la call, che alla scadenza, cioè dopo un anno, nell'eventualità che si verifichi lo stato 1, ossia quello favorevole, fornisce il pagamento di 60 con un guadagno netto dato da

$$60 - 38,178 = 21,822.$$

Se invece si acquistano obbligazioni prive di rischio investendo la stessa cifra di 38,178 dopo un anno il guadagno netto è soltanto 3,8178 cioè l'interesse annuo e dunque decisamente inferiore a quanto si potrebbe ottenere con l'acquisto della call.

Se poi si comprasse direttamente l'azione, nell'eventualità che si verifichi lo stato 1, si potrebbe avere un guadagno netto di 50 e quindi superiore a quello che si avrebbe con l'acquisto della call, ma con un costo iniziale di 200 e dunque molto elevato.

Perciò, come possiamo vedere da questo semplice esempio, una finalità di coloro che compravendono opzioni è quella speculativa poiché è possibile conseguire guadagni rilevanti con un esborso modesto o comunque minore di quello necessario per l'acquisto delle azioni, ferma restando in ogni caso la componente di rischio.

Un altro aspetto delle opzioni è quello di **copertura dal rischio**.

Infatti è possibile combinare una o più opzioni con il titolo sottostante, in modo tale che o il titolo sottostante protegga le opzioni in caso di perdita o le opzioni proteggano il titolo da perdite.

Vediamone un esempio.

Supponiamo di comporre il seguente portafoglio: compriamo due call europee aventi come sottostante un'azione e assumiamo posizione corta sull'azione. Se il prezzo iniziale delle call e dell'azione sono rispettivamente  $c_0$  e  $S_0$ , il costo del portafoglio è

$$2c_0 - S_0.$$

Sia  $T$  la data di scadenza delle call,  $S$  il prezzo dell'azione a tale data e  $X$  il prezzo di esercizio delle call.

Il pagamento del portafoglio alla scadenza è dunque:

$$2 \max \{S - X, 0\} - S.$$

Questo è ovviamente il pagamento lordo.

Per avere il pagamento netto dobbiamo sottrarre il costo del portafoglio:

$$2 \max \{S - X, 0\} - 2c_0 - (S - S_0).$$

Ovviamente  $2 \max \{S - X, 0\} - 2c_0$  rappresenta il pagamento netto dovuto alle call, mentre  $-(S - S_0)$  è quello dovuto all'azione.

Rappresentiamo nella stessa figura i grafici in funzione di  $S$  delle funzioni che rappresentano i due pagamenti netti separatamente e della funzione che rappresenta il pagamento netto totale del portafoglio.

Per semplicità assumiamo:  $X = S_0$ .

Il primo grafico è l'unione di un segmento parallelo all'asse delle ascisse e di una semiretta avente pendenza pari a 2, il secondo è una semiretta con pendenza pari a  $-1$ , il terzo, a forma di V, è ottenuto sommando i due grafici precedenti.

Figura 2.5

Notiamo che se nel nostro portafoglio detenessimo solo la posizione corta sull'azione, all'aumentare di  $S$  potremmo andare incontro a perdite illimitate (la semiretta che rappresenta il pagamento netto dovuto alla posizione corta sull'azione dopo l'intersezione con l'asse delle ascisse per  $S = X$  è situata nel semipiano inferiore e quindi rappresenta una perdita). L'inserimento nel portafoglio della posizione lunga sulle due call, che comporta per il guadagno totale il grafico a V, ci protegge da eventuali forti movimenti del prezzo dell'azione.

Se si assume simultaneamente una posizione di segno opposto su una o più call e sul titolo sottostante si ottiene un esempio di strategia di copertura dal rischio. Ma in tal caso possiamo chiederci qual è il numero ottimale di call e di azioni su cui assumere posizioni opposte per avere una protezione perfetta dal rischio.

Supponiamo di avere un portafoglio con una posizione lunga su una call avente come sottostante un'azione e con una posizione corta sull'azione stessa.

La Figura 2.6 mostra il grafico del prezzo della call in funzione del prezzo azionario.

Figura 2.6

Supponiamo che il prezzo dell'azione sia tale da trovarci nel punto  $A$  della figura. Se il prezzo dell'azione presenta un incremento di  $dS$ , il nostro portafoglio, a causa della posizione corta sull'azione, subirà una variazione pari a  $-dS$  e dunque una perdita, ma contemporaneamente avrà un guadagno pari all'incremento  $dc$  che il prezzo della call ha a causa dell'aumento del prezzo dell'azione. Tuttavia, se teniamo presente che  $\frac{\partial c}{\partial S} < 1$ , deduciamo che  $dc < dS$ . Allora il portafoglio subisce in complesso una perdita a causa dell'aumento del prezzo azionario. Dunque con una call e una sola azione non si ha copertura perfetta dal rischio. Ma con opportuni aggiustamenti di posizioni si può eliminare la perdita del portafoglio.

Definiamo infatti la quantità denominata delta di un'opzione call:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} < 1.$$

Se anziché avere una posizione corta su un'azione si avesse una posizione corta su  $\Delta$  azioni, allora un aumento del prezzo azionario di  $dS$  determinerebbe una perdita pari a  $\Delta dS$ , che è molto vicino a  $dc$  se l'incremento  $dS$  è molto piccolo. Di conseguenza il guadagno nella posizione in opzioni viene controbilanciato, in via approssimata, dalla perdita nella posizione opposta nell'azione.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccola è la variazione.

La procedura che consiste nel controbilanciare i cambiamenti in  $c$  con una posizione di segno opposto in  $\Delta$  unità del titolo sottostante è detta **delta hedging**. Il portafoglio così ottenuto si dice **neutrale** rispetto a  $\Delta$ . Un tale portafoglio non è soggetto a movimenti imprevedibili, cioè è coperto e come tale esente da

rischi.

Osserviamo che la posizione del portafoglio resta neutrale per un periodo relativamente breve perché  $\Delta$  cambia durante la vita di un'opzione. In pratica, quando si utilizza una strategia di delta hedging, il portafoglio deve essere aggiustato periodicamente. In questo caso si parla di **ribilanciamento**.

Consideriamo ora un'opzione put (europea) scritta su un'azione che non paga dividendi. Definiamo la quantità denominata **delta** di un'opzione put nel modo seguente:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} < 0.$$

Poiché si tratta di un valore negativo, per avere copertura dal rischio bisogna assumere posizioni dello stesso segno sulla put e sull'azione sottostante.

Oltre alla strategia di copertura dal rischio, gli investitori possono attuare altri tipi di strategie utilizzando le opzioni. Infatti una delle caratteristiche delle opzioni è che possono essere combinate per creare un'ampia gamma di possibili funzioni di profitto.

**Definizione 2.1.** *Una combinazione di opzioni è una strategia operativa mediante opzioni che fa uso di call e di put sullo stesso titolo.*

Le combinazioni principali sono denominate:

- **straddle**
- **strangle**
- **strip**
- **strap**
- **spread**.

La **straddle** può essere di due tipi : *bottom straddle* o *top straddle*. La prima consiste nel comprare una call e una put con lo stesso prezzo di esercizio  $X$  e uguale data di esercizio  $T$ . Solitamente una call viene comprata se ci si aspetta un apprezzamento del sottostante, mentre si compra una put quando viceversa ci si aspetta un deprezzamento del sottostante. Se alla scadenza il prezzo del titolo sottostante è prossimo a  $X$ , la straddle comporta una perdita, mentre, se il prezzo del sottostante varia in modo significativo in una delle due direzioni, ne consegue un profitto. La *top straddle* consiste nel vendere una call e una put con lo stesso prezzo di esercizio  $X$  e uguale data di esercizio  $T$ . In tal caso, si

ha una perdita se il prezzo del titolo sottostante differisce in modo significativo dal prezzo di esercizio, mentre si ha un profitto se il sottostante ha un prezzo prossimo a quello di esercizio.

La **strangle** riguarda un'opzione call e un'opzione put con la stessa scadenza, ma con prezzi di esercizio diversi.

La **strip** consiste nell'acquisto di una call e di due put con lo stesso prezzo e la stessa data di esercizio. Si ritiene dunque in questo caso più probabile un deprezzamento del titolo sottostante.

La **strap** consiste nell'acquisto di due call e di una put con lo stesso prezzo e la stessa data di esercizio. Si ritiene dunque in questo caso più probabile un apprezzamento del titolo sottostante.

La **spread** è una strategia in cui si assumono posizioni su due o più opzioni dello stesso tipo. Una spread al rialzo si ottiene comprando una call (put) con prezzo di esercizio basso e vendendo una call (put) con prezzo di esercizio alto; una spread al ribasso si ottiene comprando una call (put) con prezzo di esercizio alto e vendendo una call (put) con prezzo di esercizio basso. Si possono utilizzare anche altre tipologie di spread, ma su ciò non insistiamo.

## 2.5 Opzioni esotiche.

Le opzioni che abbiamo considerato finora sono opzioni classiche dette **opzioni vanilla o opzioni standard**, per le quali il pagamento al momento dell'esercizio è:

- $\max \{S - X, 0\}$  per le call
- $\max \{X - S, 0\}$  per le put.

Ma recentemente sono state immesse sul mercato delle nuove opzioni, le **opzioni esotiche**, che rappresentano le opzioni di seconda generazione.

Queste differiscono dalle opzioni standard per il tipo di pagamento. Elenchiamone rapidamente le principali:

- **opzioni composte**, ossia opzioni su opzioni. Il sottostante è a sua volta un'opzione; ci sono quindi due prezzi di esercizio e due date di esercizio, relativi all'opzione composta e all'opzione sottostante;
- **opzioni con barriera**. Possono essere *down-and-in* o *up-and-in*. Le prime si comportano come un'opzione europea standard se il valore  $S$  del sottostante si mantiene al di sotto di un valore fissato  $\bar{S}$  che è detto **barriera**; se  $S$  supera  $\bar{S}$ , l'opzione si esaurisce ed è previsto un rimborso fisso. Per le seconde il rimborso fisso interviene quando  $S < \bar{S}$ ;

- **opzioni a scelta.** Il possessore alla scadenza può scegliere se l'opzione è una call o una put. Nella data prefissata della scelta il valore dell'opzione è  $\max\{c, p\}$  dove  $c$  è il valore della call sottostante e  $p$  è il valore della put sottostante. In genere per queste opzioni il prezzo è elevato;
- **opzioni retrospettive** o **Lookback.** Sono opzioni il cui valore dipende dal prezzo minimo o massimo raggiunto dall'azione sottostante durante la vita dell'opzione. Nel caso di una call *floating* il pagamento alla scadenza è dato da  $\max\{S - S_{min}, 0\}$ , mentre nel caso di una call *fixed* il pagamento alla scadenza è dato da  $\max\{S_{max} - X, 0\}$ ;
- **opzioni scritte su più attività.** Sono opzioni il cui sottostante è costituito da più attività ossia da più titoli. Questo paniere consente di diversificare il rischio dei singoli titoli componenti;
- **opzioni asiatiche.** Sono opzioni il cui pagamento dipende dal prezzo medio del sottostante ed è dato da

$$\max\{S_{medio} - X, 0\} \quad \text{per le call,}$$

$$\max\{X - S_{medio}, 0\} \quad \text{per le put,}$$

dove  $S_{medio}$  può essere la media aritmetica o la media integrale dei valori di  $S$ ;

- **opzioni Bermuda.** Possono essere esercitate prima della scadenza, ma solo a date prefissate.

# Capitolo 3

## Richiami di teoria della probabilità

### 3.1 Spazio di probabilità

Come abbiamo osservato nell'introduzione, per formulare modelli matematici in ambito finanziario occorre ricorrere al calcolo stocastico che è basato sulla teoria della probabilità.

Per tale motivo, scopo di questo capitolo è di richiamare alcuni concetti fondamentali di tale teoria.

Per elaborare modelli probabilistici bisogna prima di tutto fissare uno spazio di probabilità. Al fine di darne una definizione rigorosa, richiamiamo alcune definizioni.

**Definizione 3.1.** *Dato l'insieme  $\Omega \neq \emptyset$ , una famiglia  $\mathcal{A}$  di suoi sottoinsiemi è detta **algebra** dell'insieme  $\Omega$  se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

- 1)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2)  $A \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A) \in \mathcal{A}$
- 3)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .

**Proposizione 3.1.** *Se  $\mathcal{A}$  è un'algebra, allora si ha*

- i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
- iii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies B \setminus A \in \mathcal{A}$

Dimostrazione

Proviamo prima *i*).

Per definizione di algebra,  $\Omega \in \mathcal{A}$  da cui

$$\emptyset = \mathcal{C}(\Omega) \in \mathcal{A}.$$

Proviamo ora *ii*).

$$A, B \in \mathcal{A} \implies \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \in \mathcal{A}.$$

Ma

$$A \cap B = \mathcal{C}\mathcal{C}(A \cap B) \in \mathcal{A}.$$

Proviamo infine *iii*).

Siano  $A, B \in \mathcal{A}$ . Osserviamo che

$$B \setminus A = \mathcal{C}(A) \cap B.$$

La *iii*) segue immediatamente tenendo presente che, per definizione di algebra,  $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{A}$  e che per la *ii*) l'intersezione di due insiemi che appartengono a  $\mathcal{A}$  è ancora un elemento dell'algebra.

**Definizione 3.2.** *L'algebra  $\mathcal{A}$  è detta  $\sigma$ -algebra se soddisfa all'ulteriore proprietà:*

4) *se  $\{A\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , allora*

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Si osservi che per le leggi di De Morgan, se  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra, anche l'intersezione di un'infinità numerabile di insiemi che stanno in  $\mathcal{A}$  sta in  $\mathcal{A}$ .

Notiamo che l'intersezione di  $\sigma$ -algre è ancora una  $\sigma$ -algebra.

**Definizione 3.3.** *Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$ , denotiamo con  $\sigma(\mathcal{F})$  l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algre che contengono la famiglia  $\mathcal{F}$  e diciamo che  $\sigma(\mathcal{F})$  è la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{F}$ .*

Essendo l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algre contenenti  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma(\mathcal{F})$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 3.4.** *Dato lo spazio topologico  $\mathcal{T}$ , la sua  $\sigma$ -algebra di Borel, denotata con  $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ , è la  $\sigma$ -algebra generata dalla famiglia degli insiemi aperti di  $\mathcal{T}$ .*

**Definizione 3.5.** La coppia  $(\Omega, \mathcal{A})$  dove  $\Omega$  è un insieme diverso dall'insieme vuoto e  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di  $\Omega$  è detta spazio misurabile ed ogni sottoinsieme di  $\Omega$  che sta in  $\mathcal{A}$  è detto insieme misurabile.

**Definizione 3.6.** Dato un insieme  $\Omega \neq \emptyset$  e una sua  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ , chiamiamo misura ( $\sigma$ -additiva) per l'insieme  $\Omega$  una qualsiasi applicazione  $M$  a valori reali non negativi definita su  $\mathcal{A}$  che gode delle due proprietà seguenti:

- $M(\emptyset) = 0$
- se  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  è un'infinità numerabile di insiemi  $A_i \in \mathcal{A}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  disgiunti a due a due si ha

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} M(A_i).$$

La terna  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è detta spazio misura.

Un esempio ben noto di spazio misura è la terna  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$  dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue e  $m$  è la misura di Lebesgue.

Dalla definizione data di misura discende la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.** Se  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è uno spazio misura, si ha:

- la misura  $M$  gode della proprietà di finita additività, cioè

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \cap B = \emptyset \quad M(A \cup B) = M(A) + M(B);$$

- $\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \subseteq B \quad M(A) \leq M(B).$

Dimostrazione

Dimostriamo la prima parte della proposizione.

Siano  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  e poniamo  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  per  $i = 3, 4, \dots$

Per definizione di misura avremo

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = M(A) + M(B) + \sum_{i=3}^{+\infty} M(\emptyset) = M(A) + M(B).$$

Dimostriamo la seconda parte della proposizione.

Se  $A, B \in \mathcal{A}$  sono tali che  $A \subseteq B$ , allora potremo scrivere:

$$B = A \cup (B \setminus A) \implies M(B) = M(A) + M(B \setminus A) \implies M(A) \leq M(B),$$

poiché  $M(B \setminus A) \geq 0$ .

La proposizione è dimostrata in maniera completa.

Siamo ora in grado di dare la definizione rigorosa di spazio di probabilità.

**Definizione 3.7.** *Definiamo spazio di probabilità lo spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dove  $\Omega$  è detto insieme degli stati*

*$\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$ , detti eventi*

*$P$  è una misura definita su  $\mathcal{A}$ , detta misura di probabilità, tale che  $P(\Omega) = 1$ .*

Osserviamo che per la seconda parte della proposizione 3.2 otteniamo che:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \leq 1.$$

Dunque

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1].$$

Da un punto di vista fisico, gli elementi  $\omega$  di  $\Omega$  possono rappresentare lo stato di un fenomeno (come per esempio la posizione di una particella nello spazio geometrico o il prezzo di un titolo azionario) oppure il risultato di un esperimento. Quindi  $\Omega$  è l'insieme di tutti i possibili stati o di tutti i possibili risultati. Analogamente la definizione matematica di evento corrisponde, da un punto di vista fisico, alla nozione intuitiva di evento che si forma in modo naturale in tutti tutti noi quando osserviamo un dato fenomeno o un dato esperimento.

**Definizione 3.8.** *Un evento  $A$  è detto trascurabile se  $P(A) = 0$ , mentre è detto certo se  $P(A) = 1$ .*

Dalla definizione di spazio di probabilità discendono alcune semplici conseguenze:

a) Sia  $A$  un evento; posto  $A^C = \mathcal{C}(A)$ , si ha:

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

Infatti teniamo presente che

$$\Omega = A \cup A^C.$$

Poiché  $A \cap A^C = \emptyset$ , per definizione di misura di probabilità si ottiene:

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^C) \implies P(A^C) = 1 - P(A).$$

b) Se  $A, B$  sono eventi non necessariamente disgiunti si deduce:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (3.1.1)$$

Verifichiamo la relazione scritta sopra.

Figura 3.1

In primo luogo teniamo presente che

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{e} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

per cui

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \quad (3.1.2)$$

D'altra parte abbiamo anche:

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

per cui

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \quad (3.1.3)$$

Se ora sottraiamo membro a membro dalla (3.1.2) la (3.1.3), otteniamo

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

da cui segue la (3.1.1).

Ovviamente se i due insiemi sono disgiunti la (3.1.1) ci fornisce:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

relazione che deve sussistere, essendo  $P$  una misura.

Mostriamo due semplici esempi.

**Esempio 3.1.**

Consideriamo il caso del lancio in successione per due volte di una moneta. Allora lo spazio degli stati  $\Omega$  è dato da

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\},$$

dove  $TT$  sta ad indicare l'uscita di due teste,  $TC$  l'uscita di una testa e di una croce nell'ordine e così via.

Poiché  $\Omega$  è formato da un numero finito di elementi, possiamo prendere come  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  il suo insieme delle parti,  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

L'evento intuitivo: "è uscita almeno una testa" è rappresentato matematicamente dall'insieme:

$$A_1 = \{TT, TC, CT\}.$$

Analogamente

$$A_2 = \text{"non è uscita nessuna testa"} = \{CC\};$$

$$A_3 = \text{"è uscita testa al primo lancio"} = \{TT, TC\};$$

$$A_4 = \text{"è uscita testa o croce"} = \Omega;$$

$$A_5 = \text{"non sono uscite né testa né croce"} = \emptyset.$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  sono tutti eventi.

Se assumiamo che tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  aventi come unico elemento un singolo stato abbiano uguale probabilità, deduciamo:

$$P(\{TT\}) = P(\{TC\}) = P(\{CT\}) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4}.$$

Vediamo ora di determinare la probabilità dei cinque eventi considerati precedentemente.

Otteniamo:

$$P(A_1) = P(\{TT\}) + P(\{TC\}) + P(\{CT\}) = \frac{3}{4};$$

$$P(A_2) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_3) = P(\{TT\}) + P(\{TC\}) = \frac{1}{2};$$

$$P(A_4) = P(\Omega) = 1;$$

$$P(A_5) = P(\emptyset) = 0.$$

L'insieme  $\Omega$  può avere anche infiniti elementi, come mostriamo nell'esempio successivo.

### Esempio 3.2. Esempio del bersaglio

Supponiamo di dover colpire, ad esempio con una freccia, un bersaglio rappresentato da un insieme piano  $\Omega$ . Il verificarsi di uno stato ( o risultato)  $\omega$  si ha quando la freccia colpisce un determinato punto del bersaglio; dunque gli stati si identificano con i punti di  $\Omega$ . Un evento  $A$  è un sottoinsieme di  $\Omega$  e si interpreta nel modo seguente: *"è stato colpito un qualche punto appartenente al sottoinsieme  $A$  di  $\Omega$ ".*

Per dare rigore matematico alle nostre argomentazioni supponiamo che  $\Omega$  sia una regione piana misurabile secondo Lebesgue e assumiamo come  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  misurabili secondo Lebesgue.

La misura di probabilità è definita nel modo seguente:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \frac{\text{mis } A}{\text{mis } \Omega}.$$

Figura 3.2

## 3.2 Variabili casuali.

Un altro modo per descrivere una probabilità, dato uno spazio di probabilità, è quello di associare ad ogni stato un numero reale o una ennupla di numeri reali ossia di definire una funzione a valori in  $\mathbf{R}$  o in  $\mathbf{R}^n$  sull'insieme degli stati. Se

tale funzione soddisfa ad una opportuna ipotesi è detta **variabile casuale o aleatoria (random variable)**.

**Esempio 3.3.**

Riferiamoci all'esempio 1 e definiamo la seguente funzione:

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = \text{numero di volte che appare testa in } \omega''.$$

Allora

$$X(TT) = 2, \quad X(TC) = 1, \quad X(CT) = 1, \quad X(CC) = 0.$$

Una funzione di tale tipo è una variabile casuale.

Diamo la definizione rigorosa di variabile casuale.

**Definizione 3.9.** *Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , diciamo che la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una variabile casuale (o aleatoria) reale definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se è  $\mathcal{A}$ -misurabile, ossia se*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \text{ (cioè è un evento)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

E' immediato provare che, se l'insieme degli stati  $\Omega$  è formato da un numero finito di elementi e  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  (come nell'esempio 1), ogni funzione definita su  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$  è una variabile casuale.

E' banale dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 3.3.** *Siano  $X, Y$  due variabili casuali sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $c$  un numero reale fissato.*

*Allora  $X + c, cX, X + Y, X - Y, XY$  sono variabili casuali sullo stesso spazio di probabilità.*

Dimostriamo ora la proposizione

**Proposizione 3.4.** *Siano dati lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d)  $X$  è variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Dimostrazione

Dimostriamo dapprima che  $d) \implies a)$ .

Per definizione di variabile casuale

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e d'altra parte

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Ma per definizione di  $\sigma$ -algebra, il complementare di un evento è un evento e dunque

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che  $a) \implies b)$ .

Basta osservare che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x - \frac{1}{i}\}.$$

Per ipotesi gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x - \frac{1}{i}\}$  sono eventi per  $i = 1, 2, \dots$  e d'altra parte per definizione di  $\sigma$ -algebra anche la loro intersezione è un evento. Dimostriamo che  $b) \implies c)$ .

Segue dalla relazione

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$$

tenendo presente che il complementare di un evento è un evento.

Proviamo infine che  $c) \implies d)$ .

Basta ricordare la definizione di variabile casuale ed osservare che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x + \frac{1}{i}\}.$$

Le ulteriori implicazioni sono conseguenza di quelle dimostrate.

Si potrebbe poi dimostrare la seguente proposizione

**Proposizione 3.5.** *La funzione  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  è variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se e solo se  $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  per ogni aperto  $U \subseteq \mathbb{R}$  o equivalentemente se e solo se  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  per ogni insieme di Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .*

Utilizzando la proposizione 3.5, la definizione di variabile casuale a valori reali può essere generalizzata al caso di applicazioni, definite sull'insieme degli stati di uno spazio di probabilità, che assumano i loro valori in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.10.** Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si dice che la funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una variabile casuale o aleatoria su  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se  $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  per ogni aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  o equivalentemente se  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  per ogni insieme di Borel  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 3.1.** La definizione di variabile casuale su uno spazio di probabilità è analoga alla definizione di funzione definita su  $\mathbb{R}^n$  misurabile secondo Lebesgue. Il ruolo della misura di Lebesgue è svolto per le variabili casuali dalla misura di probabilità.

Nel seguito ci limiteremo in genere a considerare variabili casuali a valori reali.

**Definizione 3.11.** La variabile casuale  $X$  si dice discreta se assume solo un numero finito o un'infinità numerabile di valori, ossia se  $X(\Omega)$  è un sottoinsieme finito o numerabile di  $\mathbb{R}$ .

Si dice che la variabile casuale  $X$  è continua se  $X(\Omega)$  è un intervallo.

Nell'esempio 1 la variabile casuale introdotta è discreta.

**Definizione 3.12.** Data la variabile casuale reale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , l'applicazione:

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

tale che

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

è detta distribuzione (o legge) di  $X$  e scriviamo  $X \sim P_X$ .

Notiamo che per la proposizione 3.5 la distribuzione  $P_X$  è ben definita. Poiché

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\},$$

si suol dire che  $P_X(B)$  indica la probabilità che la variabile casuale  $X$  appartenga al Borelliano  $B$ .

**Osservazione 3.2.** Se  $X$  è una variabile casuale reale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si ha che  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$  è uno spazio di probabilità. Infatti è facile verificare che  $P_X$  è una misura e che  $P_X(\mathbb{R}) = 1$ .

La definizione di distribuzione si estende immediatamente anche a variabili casuali a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 3.13.** Considerata la variabile casuale reale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , si chiama *funzione di distribuzione* (o *funzione di ripartizione*) di  $X$  la funzione  $F_X(x)$  definita nel modo seguente:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}). \quad (3.2.1)$$

Si osservi che, essendo  $X$  variabile casuale, l'insieme  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  è un evento e dunque la funzione data dalla (3.2.1) è ben definita.

Dalla definizione di funzione di distribuzione si ottiene la seguente

**Proposizione 3.6.** La funzione di distribuzione della variabile casuale  $X$  gode delle tre seguenti proprietà:

- 1)  $F_X(x)$  è una funzione non decrescente;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

Sia  $X$  una variabile casuale discreta a più valori ed indichiamo con  $x_1, x_2, \dots$  i valori che assume (che sono in numero finito o eventualmente un'infinità numerabile), ordinati in ordine crescente per cui  $x_1 < x_2 < \dots$

Sia

$$p_i = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}), \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{dove } p_i > 0 \text{ e } \sum_i p_i = 1.$$

Nel seguito per brevità useremo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} \{X = x\} &:= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}; \\ \{X \leq x\} &:= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}; \\ P(X = x) &:= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}); \\ P(X \leq x) &:= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}). \end{aligned}$$

Con tali notazioni, possiamo scrivere:

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

La funzione

$$\begin{aligned} p_X : X(\Omega) &\rightarrow (0, 1) \\ x_i &\mapsto p_i \end{aligned}$$

è detta **funzione di probabilità** per la variabile casuale discreta  $X$ . Tale funzione individua in maniera completa la distribuzione  $P_X$  della variabile discreta

$X$ .

Ovviamente se la variabile casuale  $X$  è costante su  $\Omega$ , cioè se si ha

$$X(\omega) = c = \text{costante} \quad \forall \omega \in \Omega,$$

allora  $X$  è una variabile discreta ad un solo valore e  $P(X = c) = P(\Omega) = 1$ .

Vediamo ora quale forma viene ad assumere la funzione di distribuzione per la variabile casuale discreta  $X$ .

Per definizione, fissato  $x$ , si ha:

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

D'altra parte gli unici valori che  $X$  può assumere sono  $x_1, x_2, \dots$  e perciò nella determinazione della funzione di distribuzione di  $X$  svolgeranno un ruolo fondamentale gli  $x_i$  per  $i = 1, 2, \dots$

Se  $x < x_1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset,$$

se  $x \geq x_1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}$$

dove la scritta  $x_i \leq x$  sotto il simbolo di unione sta ad indicare che l'unione è estesa a tutti i valori dell'indice  $i$  tali che  $x_i \leq x$ .

Otteniamo perciò che  $F_X(x)$  ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } x < x_1 \quad F_X(x) &= 0 \\ \text{se } x \geq x_1 \quad F_X(x) &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

dove la scritta  $x_i \leq x$  sotto il simbolo di sommatoria sta ad indicare che la somma è estesa a tutti i valori dell'indice  $i$  tali che  $x_i \leq x$ .

Supponiamo ora che la variabile casuale  $X$  sia continua.

In analogia con le notazioni introdotte in precedenza, poniamo:

$$\begin{aligned} \{X \in B\} &:= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}; \\ P_X(B) &= P(X \in B) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

essendo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Se esiste una funzione a valori reali definita su  $\mathbb{R}$ , non negativa e sommabile secondo Lebesgue  $p_X(x)$  tale che

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B p_X(t) dt \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad (3.2.4)$$

questa è detta **funzione di densità di probabilità per la variabile casuale**  $X$ .

E' evidente che condizione necessaria affinché la funzione  $p_X(x)$  sia una funzione di densità di probabilità è che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1. \quad (3.2.5)$$

**Osservazione 3.3.** Dalla (3.2.4), deduciamo che se  $B$  ha misura di Lebesgue nulla, allora  $P(X \in B) = 0$  e dunque, se in particolare  $B = \{x\}$ , abbiamo  $P(X = x) = 0$ .

Se esiste una funzione di densità di probabilità, allora la funzione di distribuzione della variabile casuale  $X$  si esprime nella forma:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt, \quad (3.2.6)$$

**Osservazione 3.4.** Se esiste la funzione di densità di probabilità  $p_X(x)$ , la funzione di distribuzione è continua su  $\mathbb{R}$ .

Se poi  $p_X(x)$  è continua in  $x_0$ , la funzione  $F_X(x)$  risulta derivabile in  $x_0$  e  $\frac{dF_X}{dx}(x_0) = p_X(x_0)$ .

Vediamo ora alcuni esempi di distribuzioni di probabilità.

#### Esempio 3.4. Distribuzione di Bernoulli

Diciamo che la variabile casuale  $X$  ha una distribuzione di Bernoulli se  $X$  è discreta e può assumere solo i valori 0 e 1 con probabilità rispettivamente  $1 - p$  e  $p$  con  $p \in (0, 1)$ .

Vediamo quale forma assume la funzione di distribuzione  $F_X(x)$ .

Se  $x < 0$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset \implies F_X(x) = 0.$$

Se  $0 \leq x < 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X = 0\} \implies F_X(x) = P(X = 0) = 1 - p.$$

Se  $x \geq 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} = \Omega \implies F_X(x) = P(\Omega) = 1.$$

Il grafico della funzione di distribuzione di  $X$  è rappresentato nella Figura 3.3.

Figura 3.3

### Esempio 3.5. Distribuzione uniforme

Supponiamo dapprima che la variabile casuale  $X$  sia discreta ed assuma solo gli  $n$  valori  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Diciamo che  $X$  ha distribuzione uniforme se la corrispondente funzione di probabilità  $p_X$  è la seguente:

$$p_X : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow (0, 1)$$

$$i \mapsto p_i = \frac{1}{n}.$$

Se teniamo presente la (3.2.2), per la funzione di distribuzione di  $X$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \text{se } x < 1 & \quad F_X(x) = P(\emptyset) = 0 \\ \text{se } 1 \leq x < 2 & \quad F_X(x) = p_1 = \frac{1}{n} \\ \text{se } j \leq x < j+1 & \quad F_X(x) = p_1 + \dots + p_j = \frac{j}{n} \quad j = 2, \dots, n-1 \\ \text{se } x \geq n & \quad F_X(x) = P(\Omega) = 1. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Il grafico della funzione  $F_X$  nel caso discreto con  $n = 3$  è rappresentato in Figura 3.4.

Figura 3.4

Supponiamo ora che la variabile casuale  $X$  sia continua e che l'insieme dei suoi valori sia l'intervallo  $[a, b]$ .

Diciamo che  $X$  ha distribuzione uniforme se la funzione di densità di probabilità è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se } x < a \text{ o } x > b & \quad p_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad p_X(x) = \frac{1}{b - a}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Procuriamoci ora la funzione di distribuzione data dalla (3.2.6):

$$\begin{aligned} \text{se } x < a & \quad F_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b - a} dt = \frac{x - a}{b - a} \\ \text{se } x > b & \quad F_X(x) = \int_a^b \frac{1}{b - a} dt = 1. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Il grafico della funzione  $F_X$  è il seguente:

Figura 3.5

**Esempio 3.6. Distribuzione gaussiana o normale**

Sia  $X$  una variabile casuale continua.

Diciamo che  $X$  ha una distribuzione normale o gaussiana se la funzione di densità di probabilità è data da:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con  $\sigma, \mu$  costanti e  $\sigma > 0$ .

Il grafico di  $p_X$  ha la caratteristica forma a campana ed è simmetrico rispetto alla retta di equazione  $x = \mu$ .

E' immediato verificare che la funzione  $p_X(x)$  presenta un massimo per  $x = \mu$  e tale massimo vale  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ .

Determiniamo l'area sotto la curva grafico della funzione  $p_X$ , ossia calcoliamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione

$$\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

da cui

$$dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nell'integrale otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\sigma \exp\{-t^2\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Si noti che il risultato trovato assicura che  $p_X$  è una funzione di densità di probabilità.

Poiché l'altezza della curva grafico della funzione è  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  e l'area sotto la curva è 1,  $\sigma$  dà una misura di quanto è stretta la curva: se  $\sigma$  è grande abbiamo una curva bassa e larga, mentre se  $\sigma$  è piccolo la curva è alta e stretta e si contrae attorno alla retta  $x = \mu$ .

Nel caso in cui  $\sigma = 1, \mu = 0$ , si parla di **distribuzione gaussiana o normale standard**.

In Figura 3.6 è rappresentato il grafico di  $p_X(x)$  per  $\mu = 2$  e differenti valori per  $\sigma$ .

Figura 3.6

Una distribuzione normale si denota con  $N(\mu, \sigma^2)$  e per indicare che la variabile casuale  $X$  ha la distribuzione gaussiana  $N(\mu, \sigma^2)$  si usa la scrittura

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

La funzione di distribuzione nel caso di una distribuzione normale è data da:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

I valori di  $F_X$  vengono calcolati numericamente o vengono desunti dalle apposite tavole.

La distribuzione normale si incontra spesso nello studio dei fenomeni naturali, in particolare ogni volta che il risultato di un esperimento è dovuto alla somma di numerosi piccoli effetti che operano tutti in maniera indipendente e nessuno dei quali prevale sugli altri.

### Esempio 3.7. Distribuzione log - normale

Se  $X$  ha distribuzione normale, allora  $Z = e^X$  definisce una variabile casuale con distribuzione log - normale.

Viceversa, se  $Z$  è una variabile casuale positiva, il cui logaritmo naturale ha una distribuzione normale, allora  $Z$  ha distribuzione log - normale.

Si può verificare che se  $Z$  ha distribuzione log - normale la sua funzione di densità di probabilità  $f_Z$  è la seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } z \leq 0 & \quad f_Z(z) = 0 \\ \text{se } z > 0 & \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} \exp\left\{-\frac{(\log z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

## 3.3 Indipendenza di variabili casuali.

Siano  $X, Y$  due variabili casuali definite sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Si può mostrare che l'applicazione:

$$\begin{aligned} (X, Y) : \quad \Omega & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

è ancora variabile casuale (a valori in  $\mathbb{R}^2$ ) sullo stesso spazio di probabilità, tenendo presente che

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

Possiamo perciò definire la distribuzione di tale variabile casuale che viene denotata con  $P_{XY}$  ed è detta **distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$** , mentre le distribuzioni  $P_X$  e  $P_Y$  di  $X$  e  $Y$  sono dette **distribuzioni marginali** di  $(X, Y)$ . Ovviamente

$$P_{XY} : \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, 1]$$

e

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_{XY}(B_1 \times B_2) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_1, Y(\omega) \in B_2\}) \\ =: P(X \in B_1, Y \in B_2).$$

**Definizione 3.14.** Se  $X, Y$  sono due variabili casuali definite sullo stesso spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , la funzione

$$F_{XY}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y, \}) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

è detta *funzione di distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$* .

Nel caso che  $X, Y$  siano variabili casuali discrete è possibile introdurre la funzione di probabilità congiunta.

Se la variabile casuale  $X$  assume i valori  $x_1, x_2, \dots$  e la variabile casuale  $Y$  assume i valori  $y_1, y_2, \dots$  la **funzione di probabilità congiunta di  $X$  e  $Y$**  è la funzione  $p_{XY}$  tale che

$$p_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Vediamo quale forma assume la funzione di distribuzione congiunta  $F_{XY}$ :

$$\text{se } x < x_1 \text{ o } y < y_1 \quad F_{XY}(x, y) = 0$$

$$\text{se } x \geq x_1, y \geq y_1 \quad F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{XY}(x_i, y_j).$$

Per variabili casuali continue può esistere la **funzione di densità di probabilità congiunta**  $p_{XY}$ , cioè una funzione definita su  $\mathbb{R}^2$ , non negativa e sommabile (in  $\mathbb{R}^2$  nel senso di Lebesgue) tale che

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = \int \int_{B_1 \times B_2} p_{XY}(t, z) dt dz \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Si potrebbe provare che in tal caso le funzioni di densità di probabilità di  $X$  e  $Y$  sono date da

$$p_X(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} p_{XY}(t, z) dz \quad \text{e} \quad p_Y(z) = \int_{-\infty}^{-\infty} p_{XY}(t, z) dt.$$

La funzione di distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$  assume quindi l'espressione seguente:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(t, z) dt dz \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Definizione 3.15.** Due variabili casuali  $X, Y$  si dicono indipendenti se

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Proposizione 3.7.** Se  $X, Y$  sono variabili casuali discrete, sono indipendenti se e solo se

$$p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i) p_Y(y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Se  $X, Y$  sono variabili casuali continue ed esiste la funzione di densità di probabilità congiunta, sono indipendenti se e solo se

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.3.1)$$

#### Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare la condizione sufficiente.

Nel caso di variabili discrete la dimostrazione è banale.

Supponiamo dunque che  $X$  e  $Y$  siano variabili casuali continue.

Per ipotesi sussiste la (3.3.1).

Vogliamo provare che

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(t, z) dt dz = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_X(t) p_Y(z) dt dz \\ &= \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^y p_X(t) p_Y(z) dz = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt \int_{-\infty}^y p_Y(z) dz \\ &= F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Fubini.

L'indipendenza di due variabili casuali è in qualche modo correlata alla definizione elementare di eventi indipendenti.

Ricordiamo la seguente

**Definizione 3.16.** Due eventi  $A_1, A_2$  si dicono indipendenti se

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Ora estendiamo tale definizione alle sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ , cioè alle  $\sigma$ -algebre contenute in  $\mathcal{A}$ .

**Definizione 3.17.** Due sotto  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  di  $\mathcal{A}$  si dicono indipendenti se

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

**Definizione 3.18.** Data la variabile casuale  $X$  (a valori reali), si definisce  $\sigma$ -algebra da essa generata la  $\sigma$ -algebra, denotata con  $\sigma(X)$ , generata dalla famiglia costituita da tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$ , ossia la  $\sigma$ -algebra minimale che contiene tali insiemi.

Si potrebbe far vedere che

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B)\}_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}).$$

Ovviamente una variabile casuale  $X$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\sigma(X)$  da essa stessa generata; più precisamente  $\sigma(X)$  è la più piccola sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$  rispetto alla quale  $X$  è misurabile.

**Proposizione 3.8.** Due variabili casuali  $X$  e  $Y$  sono indipendenti se e solo se le  $\sigma$ -algebre da esse generate  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono indipendenti.

Dimostrazione

Dimostriamo soltanto la condizione sufficiente.

Per ipotesi  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono  $\sigma$ -algebre indipendenti. Vogliamo provare che  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti cioè che

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione di funzione di distribuzione, dobbiamo mostrare che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, \}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}). \quad (3.3.2)$$

D'altra parte

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, \} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y, \}$$

e posto

$$A_1(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, \}, \quad A_2(y) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y, \},$$

provare la (3.3.2) significa provare che

$$P(A_1(x) \cap A_2(y)) = P(A_1(x)) \cdot P(A_2(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ma tale relazione è vera perché  $A_1(x) \in \sigma(X)$ ,  $A_2(y) \in \sigma(Y)$   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e per ipotesi le due  $\sigma$ -algebre  $\sigma(X)$  e  $\sigma(Y)$  sono indipendenti.

Diamo ora alcuni esempi molto semplici di  $\sigma$ -algebre generate da una variabile casuale.

**Esempio 3.8.**

La variabile causale  $X$  sia tale che

$$X(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Per determinare  $\sigma(X)$ , teniamo presente che

$$\text{se } x < 1 \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset$$

$$\text{se } x \geq 1 \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega.$$

Concludiamo perciò che  $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$ , ossia è la sotto  $\sigma$ -algebra banale.

**Esempio 3.9.**

La variabile causale  $X$  sia tale che

$$X(\omega) = 0 \quad \text{o} \quad X(\omega) = 1.$$

Posto

$$I_0 = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\},$$

vediamo di determinare  $\sigma(X)$ . A tal fine teniamo presente che

$$\begin{array}{lll} \text{se} & x < 0 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset \\ \text{se} & 0 \leq x < 1 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = I_0 \\ \text{se} & x \geq 1 & \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega. \end{array}$$

La  $\sigma$ -algebra minimale che ha come suoi elementi gli insiemi  $\emptyset, I_0, \Omega$  è la seguente:

$$\{\emptyset, \Omega, I_0, I_0^C\}.$$

### 3.4 Momenti di una variabile casuale

Prima di dare la definizione di momento di ordine  $p$  di una variabile casuale, introduciamo alcune nozioni preliminari.

**Definizione 3.19.** Diremo che uno spazio misura  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$  è completo se la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla, cioè se  $A \in \mathcal{A}$  con  $M(A) = 0$  e  $B \subset A$ , allora anche  $B \in \mathcal{A}$ .

Un esempio di spazio misura completo è  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$  dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue e  $m$  è la misura di Lebesgue.

Ogni spazio misura può sempre essere completato.

Si può dimostrare, come nel caso della misura di Lebesgue, la seguente proposizione:

**Proposizione 3.9.** *Dato lo spazio misura completo  $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ , siano  $f$  e  $g$  funzioni definite su  $\Omega$  a valori reali tali che  $f(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A$  con  $M(A) = 0$ . Se  $f$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile, allora anche  $g$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile.*

Nel seguito supporremo che lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sia completo.

**Definizione 3.20.** *Siano  $X_1, X_2$  funzioni definite su  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Diremo che  $X_1 = X_2$  quasi sicuramente (q. s.) se*

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\}) = 1$$

o equivalentemente se

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\}) = 0.$$

Dalla proposizione 3.9 segue che se  $X_1, X_2$  sono funzioni reali definite su  $\Omega$  uguali q. s. e  $X_1$  è variabile casuale, lo è anche  $X_2$ .

Il nostro scopo è ora di mostrare che è possibile definire per una variabile casuale sullo spazio di probabilità completo  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un integrale relativo alla misura di probabilità  $P$  che è la generalizzazione di quello di Lebesgue per le funzioni  $\mathcal{L}$ -misurabili.

Dimostriamo dapprima la

**Proposizione 3.10.** *Sia  $A$  un evento, allora la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ :  $\chi_A$  è una variabile casuale.*

Dimostrazione

Ricordiamo che  $\chi_A$  è definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } \omega \in A & \quad \chi_A(\omega) = 1 \\ \text{se } \omega \in A^C & \quad \chi_A(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che per ipotesi  $A$  è misurabile e quindi lo è anche il suo complementare  $A^C$ .

Noi dobbiamo dimostrare che  $\chi_A$  è  $\mathcal{A}$ -misurabile cioè che

$$\{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ma basta osservare che

$$\begin{aligned} \text{se } x < 0 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A} \\ \text{se } 0 \leq x < 1 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = A^C \in \mathcal{A} \\ \text{se } x \geq 1 & \quad \{\omega \in \Omega : \chi_A(\omega) \leq x\} = A \cup A^C = \Omega \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

**Definizione 3.21.** Diremo che la funzione  $X^{(s)}$  a valori reali definita su  $\Omega$  è  $\mathcal{A}$ -semplice se è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di eventi, cioè se

$$X^{(s)} = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i},$$

dove  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sono eventi.

Per la proposizione precedente ogni funzione  $\mathcal{A}$ -semplice è una variabile casuale che chiameremo variabile casuale semplice.

**Osservazione 3.5.**

E' evidente che una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori è semplice.

Ma è anche facile verificare che una variabile casuale semplice è una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori.

Dunque le variabili casuali semplici si identificano con le variabili casuali discrete che assumono un numero finito di valori.

**Proposizione 3.11.** Se  $X$  è una variabile casuale non negativa, esiste una successione  $X_n^{(s)}$  di variabili casuali semplici con  $X_{n+1}^{(s)} \geq X_n^{(s)}$  tale che:

$$X(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n^{(s)}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

**Definizione 3.22.** Siano  $A$  un evento e  $X^{(s)} = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$  una variabile casuale semplice non negativa. Definiamo integrale di  $X^{(s)}$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il seguente numero reale:

$$\int_A X^{(s)} dP = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i \cap A). \quad (3.4.1)$$

Ovviamente se  $A = \Omega$

$$\int_{\Omega} X^{(s)} dP = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

Indichiamo con  $\mathcal{S}$  la classe delle variabili casuali semplici non negative.

Data una variabile casuale non negativa  $X$ , denotiamo poi con  $\mathcal{S}_-(X)$  la classe delle variabili casuali semplici non negative che sono maggiorate da  $X$ , cioè

$$\mathcal{S}_-(X) = \{X^{(s)} \in \mathcal{S} : 0 \leq X^{(s)}(\omega) \leq X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega\}.$$

**Definizione 3.23.** *Sia  $X$  una variabile casuale non negativa. Preso un qualsiasi evento  $A$ , si definisce integrale di  $X$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il seguente numero reale (esteso):*

$$\int_A X dP = \sup \left\{ \int_A X^{(s)} dP, \quad X^{(s)} \in \mathcal{S}_-(X) \right\}. \quad (3.4.2)$$

Se l'integrale di  $X$  su  $A$  è finito, si dice che  $X$  è sommabile su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  o  $P$ -sommabile su  $A$ .

**Osservazione 3.6.** Se  $X \in \mathcal{S}$ , la definizione (3.4.2) restituisce il valore dell'integrale definito dalla (3.4.1).

L'integrale su un evento di una variabile casuale non negativa gode di numerose proprietà, del tutto analoghe a quelle relative all'integrale su un insieme misurabile secondo Lebesgue di una funzione  $\mathcal{L}$ -misurabile non negativa e si dimostrano con le stesse argomentazioni.

Sussiste tra l'altro la seguente

**Proposizione 3.12.** *Se  $X, Y$  sono variabili casuali non negative e  $A$  è un evento si ha:*

- 1)  $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in A \implies \int_A X dP = 0;$
- 2)  $P(A) = 0 \implies \int_A X dP = 0;$
- 3)  $\int_A X dP = \int_\Omega X \chi_A dP;$
- 4)  $X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in A \implies \int_A X dP \leq \int_A Y dP.$

Ora estendiamo la definizione di integrale su un evento a variabili casuali che assumono i loro valori in tutto  $\mathbb{R}$ .

Sia  $X$  una variabile casuale di segno qualsiasi.

Poniamo

$$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^- = -\min\{X, 0\},$$

per cui risulta

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-.$$

Si noti che, essendo  $X$  variabile casuale, anche  $X^+$  e  $X^-$  sono variabili casuali.

**Definizione 3.24.** Sia  $X$  una variabile casuale a valori anche negativi. Diciamo che  $X$  è  $P$ -sommabile sull'evento  $A$  se

$$\int_A |X| dP < +\infty.$$

In tal caso si pone come integrale di  $X$  su  $A$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  il numero reale:

$$\int_A X dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP. \quad (3.4.3)$$

Si osservi che il secondo membro della precedente uguaglianza è ben definito ed è finito, essendo  $0 \leq X^-, X^+ \leq |X|$ .

Può essere utile talora poter disporre della nozione di integrale anche per variabili casuali non sommabili di segno qualunque.

Dunque diremo che  $X$  è  $P$ -integrabile su  $A$  se uno almeno dei due integrali

$$\int_A X^+ dP, \quad \int_A X^- dP$$

è finito.

In tal caso come valore dell'integrale di  $X$  su  $A$  si prende ancora il numero reale:

$$\int_A X dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP$$

che risulterà essere un ben definito elemento di  $\mathbb{R}$  esteso.

Alle variabili casuali sommabili su un evento rispetto alla misura di probabilità  $P$  si estendono tutte le proprietà di cui godono le funzioni reali sommabili nel senso di Lebesgue su un insieme  $\mathcal{L}$ -misurabile.

Richiamiamone alcune.

**Proposizione 3.13.** Siano  $X, Y$  variabili casuali sommabili sull'evento  $A$ .

1) Se  $c_1, c_2$  sono due numeri reali fissati, allora  $\int_A (c_1 X + c_2 Y) dP = c_1 \int_A X dP + c_2 \int_A Y dP$ ;

2) Se  $B, C$  sono eventi disgiunti contenuti in  $A$ , allora

$$\int_{B \cup C} X dP = \int_B X dP + \int_C X dP;$$

3)  $\left| \int_A X dP \right| \leq \int_A |X| dP$ ;

$$4) X = Y \text{ q.s in } A \implies \int_A X dP = \int_A Y dP;$$

5) se  $Z$  è una variabile casuale tale che  $|Z| \leq |X|$  in  $A$ , allora anche  $Z$  è sommabile su  $A$ .

Osserviamo inoltre che per la definizione data di integrale, valgono anche i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, come ad esempio quello di Beppo Levi e della convergenza dominata di Lebesgue.

Altre proprietà verranno enunciate all'occorrenza.

**Definizione 3.25.** Dato il numero reale  $p$  ( $p \geq 1$ ) e l'evento  $A$ , denotiamo con  $L^p(A)$  l'insieme delle variabili casuali  $X$  tali che  $|X|^p$  sia sommabile su  $A$ , cioè

$$L^p(A) = \left\{ X \text{ variabile casuale reale} : \int_A |X|^p dP < +\infty \right\}. \quad (3.4.4)$$

Come nel caso della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, si verifica facilmente che  $L^p(A)$  è uno spazio vettoriale.

Sempre in analogia con la teoria di Lebesgue, è conveniente introdurre nell'insieme delle variabili casuali sommabili su  $A$  la relazione di equivalenza:

$$X \sim Y \iff X = Y \text{ quasi sicuramente in } A$$

ed identificare una variabile casuale  $X$  con la classe di equivalenza da essa individuata. In tal modo con  $L^p(A)$  denotiamo più precisamente l'insieme quoziente rispetto alla relazione  $\sim$  dello spazio definito dalla (3.4.4). Se allora poniamo

$$\|X\|_{L^p(A)} = \left\{ \int_A |X|^p dP \right\}^{\frac{1}{p}},$$

tale quantità definisce una norma in  $L^p(A)$ .

Come nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, è possibile provare che lo spazio  $L^p(A)$  è uno spazio di Banach, cioè uno spazio vettoriale normato completo. Sussiste inoltre la seguente proposizione:

**Proposizione 3.14.** Se  $p$  e  $q$  sono numeri reali  $\geq 1$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $X \in L^p(A)$ ,  $Y \in L^q(A)$ , allora la variabile casuale  $XY \in L^1(A)$  e si ha:

$$\int_A XY dP \leq \|X\|_{L^p(A)} \|Y\|_{L^q(A)}. \quad (3.4.5)$$

La (3.4.5) è l'analogia della disuguaglianza di Hölder della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

Se in particolare  $p = q = 2$ , deduciamo che lo spazio  $L^2(A)$  è uno spazio di Hilbert poiché è dotato di un prodotto scalare. Infatti se  $X, Y \in L^2(A)$ , il loro prodotto scalare è dato da  $\int_A XY dP$ .

Siamo ora in grado, dato uno spazio di probabilità completo  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , di dare la definizione di **momento di ordine  $p$**  o **momento piesimo** di una variabile casuale  $X$ .

**Definizione 3.26.** *Sia data la variabile casuale  $X$  sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si definisce momento di ordine  $p$  o momento piesimo di  $X$  con  $p \in \mathbb{N}$ :*

$$E(X^p) = \int_{\Omega} X^p dP,$$

purché  $X \in L^p(\Omega)$ , cioè  $\int_{\Omega} |X|^p dP < +\infty$ .

Se  $X$  è una variabile casuale discreta che assume un numero finito di valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  rispettivamente, allora:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$$

per cui

$$|X|^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \chi_{A_i} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$\int_{\Omega} |X|^p dP = \sum_{i=1}^n |x_i|^p P(A_i) = \sum_{i=1}^n |x_i|^p p_i < +\infty.$$

Dunque  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  e

$$E(X^p) = \sum_{i=1}^n x_i^p p_i. \quad (3.4.6)$$

Sia  $X$  una variabile casuale discreta che assume un'un'infinità numerabile di valori  $x_1, x_2, \dots$ . Se  $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p p_i < +\infty$ , allora  $X \in L^p(\Omega)$  e

$$E(X^p) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^p p_i.$$

Sia  $X$  una variabile casuale continua con funzione di densità di probabilità  $p_X(x)$ .

Si potrebbe provare il seguente

**Teorema 3.1.** *Siano  $X$  una variabile casuale reale continua sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , con funzione di densità di probabilità  $p_X(x)$  e  $g$  una funzione reale definita su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}$ -misurabile. Allora*

$$g \circ X \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| p_X(x) dx < +\infty$$

e in tal caso vale:

$$\int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx < +\infty.$$

Si osservi che, nelle ipotesi del teorema, è facile provare che  $g \circ X$  è una variabile casuale.

Il teorema 3.1 si può generalizzare. Una sua generalizzazione, che ci sarà utile in seguito, è la seguente:

**Teorema 3.2.** *Siano  $X$  e  $Y$  variabili casuali reali continue sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con funzione di densità di probabilità congiunta  $p_{XY}(x, y)$  e  $g$  una funzione reale definita su  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}$ -misurabile. Allora*

$$g \circ (X, Y) \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y)| p_{XY}(x, y) dx dy < +\infty$$

e in tal caso vale:

$$\int_{\Omega} g(X, Y) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy.$$

Grazie al teorema 3.1, ponendo  $g(x) = x^p \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , si deduce che, data la variabile casuale  $X$  continua con funzione di densità di probabilità  $p_X$  se  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p p_X(x) dx < +\infty$ , allora  $X \in L^p(\Omega)$  e

$$E(X^p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p p_X(x) dx.$$

Un caso particolarmente interessante di momento si ha per  $p = 1$ ; il momento di ordine 1 è anche detto **valore atteso** o **media della variabile casuale**  $X$ .

**Proposizione 3.15.** *Il valore atteso di una variabile casuale  $X$  gode delle seguenti proprietà:*

- 1) se  $X = c$  ( $c = \text{costante}$ ), allora  $E(X) = c$ ;  
 2)  $\forall X$  v.c.  $\in L^1(\Omega)$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$   $E(cX) = cE(X)$ ;  
 3)  $\forall X, Y$  v.c.  $\in L^1(\Omega)$   $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ;  
 4) se  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti appartenenti a  $L^1(\Omega)$ , allora  $XY \in L^1(\Omega)$  e

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Dimostrazione

1)

La variabile  $X$  è discreta ed assume il solo valore  $c$  con probabilità 1. Dunque per la (3.4.6)

$$E(X) = cP(X = c) = c.$$

2), 3)

Tenendo presente che per definizione:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP,$$

le due proprietà sono conseguenza della linearità dell'integrale.

4)

Dimostriamo tale proprietà solo nel caso in cui  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali continue ed esiste la densità di probabilità congiunta per cui esistono anche le densità di probabilità per ciascuna variabile casuale.

In primo luogo osserviamo che grazie al teorema 3.2,

$$XY \in L^1(\Omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy|p_{XY}(x, y) dx dy < +\infty$$

e in tal caso vale:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_{XY}(x, y) dx dy. \quad (3.4.7)$$

D'altra parte, per ipotesi  $X, Y \in L^1(\Omega)$  per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_X(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |y|p_Y(y) dy < +\infty.$$

Inoltre, poiché  $X$  e  $Y$  sono indipendenti,  $p_X(x)p_Y(y) = p_{XY}(x, y)$ . Allora, applicando il teorema di Fubini otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy|p_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} |y|p_Y(y) dy < +\infty.$$

Dunque  $XY \in L^1(\Omega)$  e sussiste la (3.4.7). Per l'indipendenza di  $X$  e  $Y$  e per il teorema di Fubini, dalla (3.4.7) otteniamo:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy = E(X) E(Y).$$

Un altro caso particolarmente interessante di momento di una variabile casuale è costituito dal momento di ordine due della variabile casuale  $X - E(X)$ , comunemente detto **varianza della variabile casuale**  $X$  e denotato con  $\sigma_X^2$ .

**Definizione 3.27.** *Data la variabile casuale  $X$ , la sua varianza è definita nel modo seguente:*

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2). \quad (3.4.8)$$

La varianza fornisce una stima di quanto  $X$  si discosta in media dal proprio valore atteso.

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.16.** *Data la variabile casuale  $X$ , si ha:*

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2. \quad (3.4.9)$$

Dimostrazione

Per definizione di varianza, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) + E(-2E(X)X) + E((E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato dapprima la proprietà 3) e poi le proprietà 1) e 2) del valore atteso.

La radice quadrata positiva della varianza è detta **deviazione standard** della variabile casuale  $X$  e denotata con  $\sigma_X$ . (Si osservi che per definizione  $\sigma_X^2 \geq 0$ ). Nella teoria dei mercati finanziari la deviazione standard viene utilizzata per definire la volatilità del prezzo di un titolo finanziario.

**Proposizione 3.17.** *La varianza di una variabile casuale gode delle seguenti proprietà:*

- 1)  $\sigma_{X+c}^2 = \sigma_X^2$ , essendo  $c = \text{costante}$ ;
- 2)  $\sigma_{cX}^2 = c^2 \sigma_X^2$ , essendo  $c = \text{costante}$ ;

3) se  $X$  e  $Y$  sono variabili casuali indipendenti, allora

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \quad (3.4.10)$$

Dimostrazione

1)

$$\sigma_{X+c}^2 = E((X + c - E(X + c))^2) = E((X + c - E(X) - c)^2) = \sigma_X^2.$$

2)

$$\sigma_{cX}^2 = E((cX - E(cX))^2) = E(c^2(X - E(X))^2) = c^2 E((X - E(X))^2) = c^2 \sigma_X^2.$$

3)

Supponiamo  $X$  e  $Y$  variabili casuali indipendenti per cui, grazie alla proprietà

4) del valore atteso

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Se teniamo anche presente la (3.4.9) e la linearità della media, deduciamo allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{X+Y}^2 &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X) E(Y) \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X) E(Y) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

Vediamo alcuni esempi di valore atteso e di varianza di una variabile casuale.

### Esempio 3.10.

Prendiamo in esame la distribuzione di Bernoulli.

La variabile casuale  $X$  può assumere solo i valori 0 e 1 rispettivamente con probabilità  $(1 - p)$  e  $p$ .

Vogliamo calcolare valore atteso, varianza e deviazione standard.

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

$$\sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}.$$

### Esempio 3.11.

Supponiamo di avere un dado equo che viene lanciato e che all'uscita di una faccia si riceva un pagamento pari al numero uscito.

Tale pagamento è una variabile casuale  $X$  discreta che può assumere solo i valori: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e la funzione di probabilità è tale che

$$p_X(i) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Abbiamo quindi una variabile discreta con distribuzione uniforme.

Il pagamento medio che ci aspettiamo ad ogni lancio è:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

La varianza è:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} - (3,5)^2 \\ &= \frac{91}{6} - (3,5)^2 \simeq 15,166 - 12,25 = 2,916. \end{aligned}$$

La deviazione standard è

$$\sigma_X \simeq \sqrt{2,916} \simeq 1,7.$$

### Esempio 3.12.

Consideriamo una variabile casuale continua con distribuzione uniforme e sia  $[a, b]$  l'insieme dei suoi valori. Come sappiamo, la funzione densità di probabilità è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se } x < a \text{ o } x > b & \quad p_X(x) = 0 \\ \text{se } x \in [a, b] & \quad p_X(x) = \frac{1}{b-a}. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

È evidente che  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  poiché

$$\int_{\Omega} |X|^p dP = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p p_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b |x|^p dx < +\infty.$$

Il valore atteso è

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Per la varianza deduciamo:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (3.4.12)$$

Infine otteniamo dalla (3.4.12) che la deviazione standard è data da

$$\sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

**Esempio 3.13.**

Supponiamo che la variabile casuale  $X$  abbia una distribuzione gaussiana. Allora la funzione di densità di probabilità è data da:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{con } \sigma, \mu = \text{costante e } \sigma > 0.$$

Osserviamo che  $X \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}$  poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx < +\infty.$$

Il valore atteso è

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx. \quad (3.4.13)$$

Per il calcolo dell'integrale al secondo membro della (3.4.13) effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione:

$$t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \implies x = \mu + \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nella (3.4.13), deduciamo:

$$E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\{-t^2\} dt. \quad (3.4.14)$$

Ma il secondo integrale a secondo membro della (3.4.14) è nullo perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt = 1.$$

In definitiva otteniamo:

$$E(X) = \mu.$$

Determiniamo ora la varianza di  $X$ .

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E((X - E(X))^2) = E((X - \mu)^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile d'integrazione:

$$t = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \implies x - \mu = \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt.$$

Sostituendo nella (3.4.15), deduciamo:

$$\sigma_X^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\{-t^2\} dt. \quad (3.4.16)$$

Se integriamo per parti prendendo

$$f(t) = -\frac{1}{2} \exp\{-t^2\} \implies f'(t) = t \exp\{-t^2\}$$

e

$$g(t) = t \implies g'(t) = 1,$$

otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\{-t^2\} dt = -\frac{1}{2} t \exp\{-t^2\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Sostituendo tale risultato nella (3.4.16), abbiamo

$$\sigma_X^2 = \sigma^2.$$

Dunque, quando si ha una distribuzione gaussiana, la varianza è  $\sigma^2$  e la deviazione standard è  $\sigma$ . La deviazione standard misura il grado di dispersione dei valori attorno alla media  $\mu$ .

Si potrebbe inoltre provare che se  $X$  segue una distribuzione gaussiana con valore medio  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ , risulta  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$E((X - \mu)^{2k+1}) = 0 \quad (\text{momenti di } X - \mu \text{ di ordine dispari})$$

$$E((X - \mu)^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k} \quad (\text{momenti di } X - \mu \text{ di ordine pari}).$$

Pertanto sono sufficienti i due parametri  $\mu$  e  $\sigma$  per caratterizzare la distribuzione gaussiana e i momenti di ordine superiore non forniscono ulteriori informazioni.

**Definizione 3.28.** *Date due variabili casuali  $X$  e  $Y$  in  $L^2(\Omega)$ , con media  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  rispettivamente e varianza finita, si definisce covarianza la quantità*

$$\sigma_{XY} := \text{Cov}(X, Y) := E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

*Se  $\sigma_{XY} = 0$ , le due variabili si dicono non correlate.*

*Inoltre si definisce coefficiente di correlazione*

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Si noti che se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti sono anche non correlate, mentre non è vero il viceversa.

Inoltre se le due variabili sono non correlate, allora risulta  $\rho_{XY} = 0$ .

Infine si potrebbe dimostrare che:

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$$

### 3.5 Convergenza di successioni di variabili casuali.

Data una successione di variabili casuali  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ci sono diversi modi per definire la convergenza ad una variabile casuale  $X$  definita sullo stesso spazio di probabilità.

Una definizione, che è l'estensione più naturale del concetto di limite dell'analisi matematica, è quella di convergenza con probabilità 1.

**Definizione 3.29.** *La successione di variabili casuali  $X_n$  converge alla variabile casuale  $X$  con probabilità 1 (o quasi sicuramente) se:*

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\} = 1,$$

ossia se la probabilità che la convergenza non si verifichi è nulla.

Se si verifica la convergenza con probabilità 1 scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad \text{q.s.}$$

Una definizione di convergenza, che, come vedremo, nel calcolo stocastico viene utilizzata per la definizione di integrale di Ito, è la convergenza in media quadratica.

**Definizione 3.30.** *La successione di variabili casuali  $X_n$  converge alla variabile casuale  $X$  in media quadratica se  $X_n \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X \in L^2(\Omega)$  e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|^2) = 0.$$

Se si verifica la convergenza in media quadratica scriveremo:

$$\text{mq} - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X.$$

Analiticamente questo tipo di convergenza corrisponde alla convergenza in  $L^2$  della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

Si potrebbero dare altre definizioni di convergenza di successioni di variabili casuali, ma su ciò non insistiamo.

## 3.6 Aspettative condizionate.

Una previsione sul valore di una variabile casuale può essere ottenuto calcolandone il valore atteso, ma esso fornisce il tipo più grossolano di previsione. Quest'ultima può essere migliorata se si dispone di ulteriori informazioni. Ad esempio, la probabilità di un crollo finanziario può essere rivista se si dispone dell'informazione aggiuntiva che si è entrati in una pesante recessione, esprimendo tale probabilità come probabilità condizionata.

Vedremo di definire matematicamente i concetti di informazione, di struttura informativa e di aspettativa condizionata.

**Definizione 3.31.** *Se  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  è uno spazio di probabilità, allora un'informazione è un evento  $I$  (ossia un sottoinsieme di  $\Omega$  che sta in  $\mathcal{A}$ ).*

*Una struttura informativa è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{I}$ , contenente gli eventi informativi.*

Ricordiamo la definizione di **probabilità condizionata elementare**.

**Definizione 3.32.** *La probabilità condizionata elementare di un evento  $A \in \mathcal{A}$ , sotto la condizione  $I \in \mathcal{A}$ , ossia dato un evento  $I$ , con  $P(I) > 0$  è:*

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}. \quad (3.6.1)$$

Facciamo degli esempi ricorrendo agli esempi 1 e 2 visti nel paragrafo 2.

### Esempio 3.14.

Si considera il lancio in successione per due volte di una moneta.

Sia dato l'evento "è uscita almeno una testa", rappresentato matematicamente dall'insieme

$$A = \{TT, TC, CT\}.$$

Se non abbiamo alcuna informazione:

$$P(A) = \frac{3}{4}.$$

Ma supponiamo di aver ricevuto la seguente informazione: "è uscita almeno una croce". Tale informazione è rappresentata matematicamente dall'insieme

$$I = \{TC, CT, CC\}.$$

Allora, in base alla (3.6.1), la probabilità dell'evento  $A$  sotto la condizione  $I$  è data da

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\{TC, CT, \})}{P(\{TC, CT, CC\})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Questo perché l'informazione ricevuta ha in un certo senso ridotto lo spazio campione  $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$  ad uno più piccolo  $\Omega' = \{TC, CT, CC\} = I$  in cui non compare più  $TT$  ed inoltre all'evento  $A$  dobbiamo in realtà sostituire l'evento  $A \cap I = \{TC, CT\}$ . Se si tiene presente che il nuovo spazio campione è formato da tre stati e che gli eventi costituiti da un singolo stato sono tutti ugualmente probabili, avremo che la probabilità di ciascuno di tali eventi è  $\frac{1}{3}$  e poiché  $A \cap I$  contiene due stati si ottiene che  $P(A|I) = \frac{2}{3}$ .

**Esempio 3.15.**

Si deve colpire con una freccia un bersaglio rappresentato da un insieme piano  $\Omega$ , misurabile secondo Lebesgue.

Supponiamo di sapere che verrà colpito un punto della regione  $I$  (evento informativo). Allora la probabilità condizionata dell'evento  $A$ , (cioè che venga colpito un punto dell'insieme  $A$ ) dato l'evento  $I$  è:

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{\text{mis}(A \cap I)}{\text{mis}I}.$$

Dimostriamo la seguente

**Proposizione 3.18.** *Se gli eventi  $A$  e  $I$  sono indipendenti, allora*

$$P(A|I) = P(A).$$

Dimostrazione

La dimostrazione è immediata se si tiene presente la definizione elementare di eventi indipendenti.

Infatti

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A) \cdot P(I)}{P(I)} = P(A).$$

Introduciamo ora la seguente definizione:

**Definizione 3.33.** *Data la variabile casuale  $X$  discreta che assume gli  $n$  valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , si definisce aspettativa condizionata elementare di  $X$  sotto la condizione  $I$  o dato l'evento  $I$  nel modo seguente:*

$$E(X|I) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I). \quad (3.6.2)$$

Una definizione più generale è

**Definizione 3.34.** *L'aspettativa condizionata elementare della variabile casuale  $X$  sotto la condizione  $I$  è data da*

$$E(X | I) = \frac{E(X \chi_I)}{P(I)}. \quad (3.6.3)$$

E' facile provare che la definizione generale (3.6.3) si riduce alla (3.6.2) quando  $X$  assume  $n$  valori.

In primo luogo osserviamo che

$$E(X \chi_I) = \int_{\Omega} X \chi_I dP = \int_I X dP.$$

Allora, essendo  $X$  variabile discreta, dalla (3.6.3) otteniamo:

$$E(X | I) = \frac{E(X \chi_I)}{P(I)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P(\{X = x_i\} \cap I)}{P(I)} = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I).$$

Vogliamo ora definire l'aspettativa condizionata, data una struttura informativa. Questa, come vedremo, è una variabile casuale. A tal fine enunciamo senza dimostrarlo il seguente

**Teorema 3.3. Teorema di Kolmogorov.** *Sia  $X$  una variabile casuale definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , con  $E(|X|) < +\infty$ , e sia  $\mathcal{I}$  una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{A}$ . Allora esiste una variabile casuale  $Y$ , misurabile rispetto ad  $\mathcal{I}$ , con  $E(|Y|) < +\infty$  e tale che  $\forall I \in \mathcal{I}$  si ha*

$$\int_I Y dP = \int_I X dP.$$

*Inoltre  $Y$  è unica quasi sicuramente.*

Osserviamo che dire che  $Y$  è unica quasi sicuramente significa che può esistere un'altra variabile casuale  $Y^*$  con le stesse proprietà di  $Y$ , ma che  $Y$  e  $Y^*$  sono uguali quasi sicuramente.

Il teorema di Kolmogorov ci porta a dare la seguente definizione

**Definizione 3.35.** *La variabile casuale  $Y$ , la cui esistenza è assicurata dal teorema di Kolmogorov, è detta aspettativa condizionata di  $X$ , data la struttura informativa  $\mathcal{I}$ , e si scrive:*

$$Y = E(X | \mathcal{I}).$$

Diamo anche la definizione di **probabilità condizionata**  $P(A|\mathcal{I})$  di un evento  $A$ , data la struttura informativa  $\mathcal{I}$ :

$$P(A|\mathcal{I}) = E(\chi_A|\mathcal{I}),$$

dove  $\chi_A$  è la funzione caratteristica dell'evento  $A$ .

Alcune proprietà dell'aspettativa condizionata che valgono quasi sicuramente, ossia con probabilità 1, sono le seguenti:

1) Se  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ , cioè non si ha alcuna informazione, allora

$$E(X|\mathcal{I}) = E(X);$$

2) Linearità:

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2$  variabili casuali si ha

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2|\mathcal{I}) = c_1 E(X_1|\mathcal{I}) + c_2 E(X_2|\mathcal{I});$$

3) Se  $X$  è variabile casuale rispetto ad  $\mathcal{I}$ , cioè è  $\mathcal{I}$ -misurabile, allora

$$E(X|\mathcal{I}) = X;$$

4) se la variabile casuale  $M$  è  $\mathcal{I}$ -misurabile e limitata, allora

$$E(MX|\mathcal{I}) = M E(X|\mathcal{I});$$

5) Proprietà a torre:

Se  $\mathcal{I}^*$  è una sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{I}$ , allora:

$$E(E(X|\mathcal{I})|\mathcal{I}^*) = E(X|\mathcal{I}^*).$$

Dimostriamo la proprietà 1)

Sia  $Y = E(X|\mathcal{I})$  con  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Poiché  $Y$  è misurabile rispetto ad  $\mathcal{I}$ , avremo che

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} \in \mathcal{I} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ma per come è definita  $\mathcal{I}$ , risulta

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \emptyset \text{ o } = \Omega.$$

Perciò  $Y$  assume un solo valore su tutto  $\Omega$  ed è quindi costante.

D'altra parte, per il teorema di Kolmogorov,  $Y$  gode della proprietà

$$\int_I Y dP = \int_I X dP \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

In particolare avremo

$$\int_{\Omega} Y dP = \int_{\Omega} X dP,$$

ossia

$$E(Y) = E(X).$$

Ma, essendo  $Y$  costante, si ha

$$E(Y) = Y$$

e dunque la proprietà è dimostrata.

Dimostriamo la proprietà 3)

Se  $X$  è variabile casuale rispetto ad  $\mathcal{I}$ , gode di tutte le proprietà di cui gode  $Y = E(X | \mathcal{I})$ . Ma per l'unicità stabilita dal teorema di Kolmogorov,  $X = Y$  quasi sicuramente.

Non dimostriamo 2), 4) e 5), ma facciamo vedere che da 1) e 5) discende un'ulteriore proprietà:

$$6) E(E(X | \mathcal{I})) = E(X)$$

Infatti, poniamo  $\mathcal{I}^* = \{\emptyset, \Omega\}$ . Tenendo presente la proprietà 1), possiamo scrivere

$$E(E(X | \mathcal{I})) = E(E(X | \mathcal{I}) | \mathcal{I}^*) = E(X | \mathcal{I}^*) = E(X),$$

dove abbiamo anche sfruttato la proprietà a torre e ancora la proprietà 1).

In particolare, data la variabile casuale  $X$ , si può assumere come struttura informativa la  $\sigma$ -algebra generata da un'altra variabile casuale  $Z$  definita sullo stesso spazio di probabilità. In tal caso si usa spesso la notazione  $E(X | Z)$  in luogo di  $E(X | \sigma(Z))$ .

Supponiamo che le variabili casuali  $X$  e  $Z$  siano discrete e che assumano gli  $n$  valori:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e gli  $m$  valori  $z_1, z_2, \dots, z_m$  rispettivamente.

Indichiamo con  $I_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) il sottoinsieme di  $\Omega$  nei punti del quale  $Z$  assume il valore  $z_j$  ed osserviamo che

$$\bigcup_{j=1}^m I_j = \Omega.$$

Consideriamo poi l'aspettativa condizionata elementare della variabile casuale  $X$  sotto la condizione  $I_j$ , cioè  $E(X | I_j)$  data da

$$E(X | I_j) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I_j) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Introduciamo ora la variabile casuale discreta  $Y$  così definita:

$$\forall \omega \in I_j \quad Y(\omega) = E(X | I_j) = y_j \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Poiché  $Y$  è costante sugli stessi insiemi su cui è costante  $Z$ , segue che  $Y$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\sigma(Z)$  generata da  $Z$ .

Calcoliamo poi l'integrale esteso a  $I_j$  di  $Y$ , tenendo presente che:

$$Y = \sum_{i=1}^m y_i \chi_{I_i}.$$

Per la definizione di integrale di una variabile casuale semplice, otteniamo:

$$\int_{I_j} Y dP = \sum_{i=1}^m y_i P(I_i \cap I_j) = y_j P(I_j),$$

poiché

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j.$$

Ma, per come è definita  $Y$ , per  $j = 1, 2, \dots, m$  deduciamo:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} Y dP &= y_j P(I_j) = E(X, | I_j) P(I_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I_j) P(I_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(\{X = x_i\} \cap I_j) P(I_j)}{P(I_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(\{X = x_i\} \cap I_j) = \int_{I_j} X dP. \end{aligned}$$

D'altra parte, ogni insieme  $I$  che appartiene alla  $\sigma$ -algebra  $\sigma(Z)$  generata da  $Z$  è l'unione di insiemi  $I_j$  e dunque, per l'additività dell'integrale rispetto agli insiemi di integrazione, abbiamo:

$$\int_I Y dP = \int_I X dP \quad \forall I \in \sigma(Z).$$

Allora per il teorema di Kolmogorov concludiamo che la variabile casuale  $Y$  che assume gli  $m$  valori  $y_1, y_2, \dots, y_m$  con  $y_j = E(X | I_j) = E(X | \{Z = z_j\})$  per  $j = 1, 2, \dots, m$  è l'aspettativa condizionata della variabile casuale  $X$ , data la struttura informativa  $\sigma(Z)$ .

### Esempio 3.16.

Sia data la variabile casuale  $X$  discreta che assume gli  $n$  valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vogliamo determinare i valori assunti dall'aspettativa condizionata di  $X$ , data la struttura informativa rappresentata dalla  $\sigma$ -algebra generata da  $Z$ , con  $Z$  variabile casuale discreta che assume i valori 0 e 1.

Per quanto visto nell'esempio 2 sulle  $\sigma$ -algre generate da una variabile casuale, sappiamo che

$$\sigma(Z) = \{\emptyset, I_0, I_0^C, \Omega\}$$

con

$$I_0 = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = 0\}, \quad I_0^C = I_1 = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = 1\}.$$

Allora la variabile casuale  $E(X | Z)$  assume i due valori seguenti:

$$E(X | I_0) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | I_0) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(\{\omega \in I_0 : X(\omega) = x_i\})}{P(I_0)},$$

$$E(X | I_0^C) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(\{\omega \in I_0^C : X(\omega) = x_i\})}{1 - P(I_0)}.$$

**Proposizione 3.19.** *Se  $X$  e  $Z$  sono due variabili casuali indipendenti, allora*

$$E(X | Z) = E(X).$$

#### Dimostrazione

Dimostriamo la proposizione nel caso particolare in cui le variabili casuali  $X$  e  $Z$  sono discrete supponendo che assumano gli  $n$  valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e gli  $m$  valori  $z_1, z_2, \dots, z_m$  rispettivamente.

Per quanto visto in precedenza,  $E(X | Z)$  assume gli  $m$  valori:

$$y_j = E(X | \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = z_j\}) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Precisamente, posto  $I_j = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = z_j\}$ , si ha

$$\forall \omega \in I_j \quad E(X | Z)(\omega) = E(X | \{Z = z_j\}) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ma essendo  $X$  e  $Z$  variabili casuali indipendenti, abbiamo per  $j = 1, 2, \dots, m$ :

$$E(X | \{Z = z_j\}) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Z = z_j\})}{P(Z = z_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \frac{P(X = x_i) \cdot P(Z = z_j)}{P(Z = z_j)} = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = E(X).$$

Dunque

$$\forall \omega \in \Omega \quad E(X | Z)(\omega) = E(X).$$

# Capitolo 4

## Processi stocastici

### 4.1 Introduzione ai processi stocastici

Prima di dare la definizione formale di processo stocastico ci proponiamo di evidenziare la differenza concettuale tra processo deterministico e processo stocastico e di mostrare la necessità di ricorrere al calcolo stocastico per introdurre modelli matematici per la valutazione di titoli finanziari rischiosi come azioni e opzioni.

L'evoluzione temporale di moltissimi fenomeni che intervengono in fisica, ingegneria, chimica, biologia, nelle scienze sociali e in altri campi è governata da un'equazione differenziale ordinaria o da un sistema di equazioni di tale tipo.

Com'è noto, un'equazione differenziale ordinaria è una relazione tra una variabile indipendente  $t$  (che nel nostro caso assume il significato fisico di variabile temporale), una funzione incognita di questa variabile,  $x(t)$ , ed alcune sue derivate. Si definisce poi ordine dell'equazione l'ordine della derivata di ordine massimo della funzione incognita che compare nell'equazione stessa.

Un'equazione differenziale ordinaria del I ordine si presenta perciò nella forma:

$$F(t, x, x') = 0, \quad (4.1.1)$$

dove  $F$  è una funzione reale di tre variabili reali, assegnata generalmente in un insieme aperto  $D \in \mathbb{R}^3$ .

**Definizione 4.1.** *Una funzione reale  $x(t)$ , definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , è detta soluzione dell'equazione (4.1.1) in  $I$  se è derivabile in tale intervallo,  $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$  ed inoltre*

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

**Definizione 4.2.** *Un'equazione differenziale del I ordine si dice di forma normale, quando è scritta nel modo seguente:*

$$x' = f(t, x) \quad (4.1.2)$$

dove  $f$  è una funzione in due variabili, assegnata in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ , in genere supposto aperto.

Un problema che svolge un ruolo molto importante nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie è il problema di Cauchy.

**Definizione 4.3.** *Data l'equazione differenziale (4.1.2), se  $(t_0, x_0)$  è un punto della regione  $A$  su cui è definita la funzione  $f$ , si definisce problema di Cauchy per tale equazione relativo a  $(t_0, x_0)$  il problema che consiste nel trovarne una soluzione definita in un intorno  $I$  di  $t_0$  che verifichi la condizione, detta iniziale o di Cauchy,:*

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.1.3)$$

*In particolare, diciamo che il problema di Cauchy viene risolto localmente o in piccolo se non è fissato a priori l'intorno  $I$ , mentre diciamo che il problema di Cauchy viene risolto globalmente o in grande se  $f$  è definita in  $[a, b] \times \mathbb{R}$  e  $I = [a, b]$ .*

Nell'ipotesi che la funzione  $f$  soddisfi ad opportune ipotesi di regolarità sussistono teoremi che assicurano l'esistenza e l'unicità locale o globale della soluzione del problema di Cauchy.

Più in generale, un sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nella ennupla di funzioni incognite  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  si presenta nella forma:

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.4)$$

dove  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sono  $n$  funzioni reali in  $2n + 1$  variabili reali, assegnate in  $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ , generalmente aperto.

Possiamo estendere in maniera immediata al sistema (4.1.4) la definizione di soluzione in un intervallo data per una singola equazione differenziale del I ordine così come è immediato dare la definizione di sistema differenziale del I ordine in forma normale.

Questo si presenta nel modo seguente:

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.5)$$

con  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funzioni reali in  $n + 1$  variabili reali, assegnate in  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , generalmente aperto. Se usiamo le seguenti notazioni compatte:

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x' := (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad f := (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

il sistema (4.1.5) si può scrivere nella stessa forma (4.1.2) in cui abbiamo scritto una singola equazione anche se con diverso significato dei simboli:

$$x' = f(t, x). \quad (4.1.6)$$

Possiamo formulare anche il problema di Cauchy per il sistema (4.1.6) scritto in forma compatta, associando al sistema le condizioni iniziali o di Cauchy anch'esse scritte in forma compatta:

$$x(t_0) = x_0$$

dove

$$(t_0, x_0) \in A, \quad x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)), \quad x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Anche per i sistemi differenziali ordinari del I ordine sussistono teoremi di esistenza ed unicità locale o globale della soluzione del problema di Cauchy.

Consideriamo ora un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m > 1$ :

$$F(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad (4.1.7)$$

dove  $F$  è una funzione reale di  $m + 2$  variabili reali, assegnata in un aperto  $D \subset \mathbb{R}^{m+2}$ .

**Definizione 4.4.** *Una funzione reale definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  è detta soluzione dell'equazione (4.1.7) in  $I$  se è derivabile sino a  $m$  volte in tale intervallo,  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) \in D \quad \forall t \in I$  ed inoltre*

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

**Definizione 4.5.** *Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m$  si dice di forma normale, quando è scritta nel modo seguente:*

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) \quad (4.1.8)$$

dove  $f$  è una funzione in  $m + 1$  variabili, assegnata in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^{m+1}$ , in genere supposto aperto.

**Definizione 4.6.** *Data l'equazione differenziale (4.1.8), se  $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{m-1})$  è un punto dell'aperto  $A$  su cui è definita la funzione  $f$ , si definisce problema di Cauchy per l'equazione (4.1.8) relativo a  $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{m-1})$  il problema che consiste nel trovare una soluzione dell'equazione definita in un intorno  $I$  di  $t_0$  che verifichi le condizioni, dette iniziali o di Cauchy:*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}.$$

Anche per un'equazione differenziale in forma normale di ordine  $m$ , se la funzione  $f$  soddisfa ad opportune ipotesi di regolarità, sussistono teoremi che ci assicurano l'esistenza e l'unicità locale o globale della soluzione del problema di Cauchy.

In maniera analoga si può considerare un sistema di equazioni differenziali ordinarie ciascuna delle quali è di un diverso ordine.

Si noti comunque che una singola equazione differenziale ordinaria di ordine  $m > 1$  o un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine diverso da 1 è sempre equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del I ordine ancora in forma normale se lo sono l'equazione o il sistema di partenza.

Se allora abbiamo un fenomeno che dipende dal tempo, individuato dalla funzione  $x(t)$  soddisfacente l'equazione differenziale ordinaria (4.1.2) o (4.1.8) o da una ennupla di funzioni soddisfacente il sistema differenziale (4.1.6), sotto opportune ipotesi, note le condizioni iniziali, siamo in grado di prevedere con esattezza come evolve al trascorrere del tempo. Diciamo allora che un fenomeno siffatto è descritto mediante un **processo deterministico**.

Consideriamo un esempio di fenomeno fisico descritto mediante un processo deterministico.

Vogliamo stabilire quale posizione occuperà all'istante  $t$  il punto materiale libero  $(P, m)$ , di massa  $m$ , in moto rispetto ad un dato osservatore, note la forza totale agente sul punto e la posizione e la velocità del punto stesso all'istante iniziale. Il moto del punto, com'è noto, è governato dall'equazione fondamentale della dinamica:

$$m \vec{a} = \vec{F}(t, P, \vec{v}) \quad (4.1.9)$$

dove  $\vec{a}$  è l'accelerazione del punto,  $(P, \vec{F})$  è la forza totale agente sul punto della quale è nota la dipendenza dal tempo  $t$ , dalla posizione  $P$  del punto e dalla sua velocità  $\vec{v}$ .

A tale equazione associamo le condizioni iniziali

$$P(t_0) = P_0, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0,$$

essendo  $t_0$  l'istante iniziale.

Sia  $Ox_1x_2x_3$  il riferimento cartesiano ortonormale associato all'osservatore ed indichiamo con  $(x_1, x_2, x_3)$  la terna delle coordinate cartesiane del punto e con  $(F_1, F_2, F_3)$  la terna delle componenti di  $\vec{F}$  rispetto alla base che individua il riferimento. Allora l'equazione vettoriale (4.1.9) è equivalente al seguente sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine nella terna di funzioni incognite  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ :

$$m x_i'' = F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3') \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.10)$$

Il sistema (4.1.10) si può scrivere in forma normale dividendo entrambi i membri delle tre equazioni per  $m$ :

$$x_i'' = \frac{F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')}{m} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.11)$$

Al sistema (4.1.11) associamo le condizioni iniziali scritte nella forma

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad x_i'(t_0) = v_{0i} \quad i = 1, 2, 3,$$

dove  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  è la terna delle coordinate cartesiane della posizione  $P_0$  occupata dal punto all'istante  $t_0$  e  $(v_{01}, v_{02}, v_{03})$  è la terna delle componenti della velocità iniziale  $\vec{v}_0$  del punto lungo gli assi del riferimento.

Otteniamo così un problema di Cauchy per un sistema in forma normale di tre equazioni differenziali ordinarie del II ordine in tre funzioni incognite.

Se le funzioni  $F_i(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')$ , per  $i = 1, 2, 3$  sono sufficientemente regolari, il problema ammette una ed una sola soluzione per  $t \geq t_0$ .

Perciò note la posizione e la velocità iniziale del punto materiale, siamo in grado di stabilire esattamente la posizione che questo occupa ad ogni istante successivo a quello iniziale.

Il moto del punto materiale è dunque descritto mediante un **processo deterministico**, poichè, note le condizioni iniziali, siamo in grado di prevederne l'evoluzione.

Vediamo ora un esempio che interviene in biologia o nelle scienze sociali.

Se indichiamo con  $x(t)$  la popolazione di una data specie all'istante  $t$ , nell'ipotesi che questa sia isolata, cioè che non ci siano immigrazioni ed emigrazioni, il più semplicistico modello di crescita di tale popolazione è il seguente:

$$x' = ax$$

con  $a$  costante positiva (modello di Malthus).

Se allora assumiamo che all'istante iniziale  $t_0$  la popolazione sia  $x_0$ , per sapere

quale valore avrà raggiunto la popolazione al tempo  $t$ , dovremo risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned}x' &= ax \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

L'equazione differenziale che interviene nel nostro problema è un'equazione differenziale ordinaria del I ordine, lineare, omogenea, a coefficienti costanti. Com'è noto, la sua soluzione generale (cioè l'insieme di tutte le sue soluzioni) è data da

$$x(t) = C_1 e^{at}$$

con  $C_1$  costante arbitraria da determinarsi tramite la condizione iniziale. La soluzione del problema di Cauchy considerato, come si può verificare facilmente, è la seguente:

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Dunque, se una popolazione segue il modello di Malthus, la sua crescita è esponenziale ed è descritta mediante un processo deterministico.

E' da rilevare che se si considera la specie umana e si pone  $a = 0,02$ , il modello di Malthus è in accordo con i dati reali relativi alla crescita della popolazione umana sulla terra nel periodo tra il 1700 e il 1961. Non è invece realistico per gli anni successivi perché prevede una crescita eccessivamente elevata (nel 2510 la popolazione sulla terra dovrebbe essere di 200.000 bilioni).

Dunque tutti quei fenomeni evolutivi che sono governati da un'equazione differenziale ordinaria o da un sistema di equazioni differenziali ordinarie (per i quali sussistono teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy) sono descritti mediante processi deterministici, perché associando le condizioni iniziali possiamo prevederne con esattezza l'evoluzione.

Ma possiamo avere molti altri fenomeni la cui evoluzione non è prevedibile, perché viene influenzata da eventi casuali. Ad esempio, la crescita di una popolazione, per la quale prima abbiamo considerato il modello di Malthus, può essere influenzata da numerosissimi eventi casuali come siccità, abbondanza, catastrofi naturali, guerre e così via.

In particolare nel settore finanziario, non è possibile prevedere con esattezza il prezzo futuro di un dato titolo rischioso, ad esempio un'azione, conoscendone la storia passata, perché questo presenta un'influenza del caso. Infatti un evento del tutto imprevedibile, come il fallimento di una società, lo scoppio improvviso di un conflitto, la caduta di un governo, un atto terroristico di notevole violenza possono produrre delle notevoli oscillazioni nel prezzo dei titoli quotati in Borsa.

Ne è un esempio il terremoto prodotto su tutte le Borse mondiali dall'attentato alle Torri Gemelle di New York.

A causa delle frequenti ed intense variazioni dovute ad eventi casuali la funzione che alla variabile temporale  $t$  associa il valore di un'azione non risulta derivabile e dunque non può essere soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.

Per descrivere quei fenomeni la cui evoluzione è influenzata da eventi casuali non è più adeguata l'analisi matematica classica ed occorre introdurre i **processi stocastici** studiati nell'ambito del calcolo stocastico che, come già abbiamo osservato, è basato sulla teoria della probabilità.

## 4.2 Processi stocastici.

Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  uno spazio di probabilità e sia  $\Lambda$  un insieme non vuoto, i cui elementi sono gli istanti che vengono presi in considerazione ai fini dello studio del fenomeno evolutivo.

In genere avremo  $\Lambda = [0, +\infty)$  o  $[0, T]$  o un sottoinsieme numerabile di  $\mathbb{R}$  o anche  $\mathbb{N}$ .

**Definizione 4.7.** *Un processo stocastico è un'applicazione*

$$X : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n)$$

*tale che  $\forall t$  fissato  $\in \Lambda$*

$$X(t, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n)$$

*è una variabile casuale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .*

**Definizione 4.8.** *Definiamo realizzazione o traiettoria o funzione campione del processo stocastico relativa allo stato  $\omega$  fissato in  $\Omega$  la funzione del tempo*

$$X(\cdot, \omega) : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n).$$

Dunque un processo stocastico si può vedere come una famiglia di variabili casuali dipendente dal parametro reale  $t$  che varia in  $\Lambda$  o come l'insieme di tutte le funzioni campione relative agli stati, che sono funzioni del tempo definite in  $\Lambda$ .

Se  $\Lambda = \mathbb{N}$  o è un'infinità numerabile di istanti  $\{t_i\}_{i=1,2,\dots}$  si parla di **processo stocastico discreto** o **di successione di variabili casuali**.

Nel seguito useremo la notazione  $X_t(\cdot)$  in luogo di  $X(t, \cdot)$  e dunque scriveremo  $X_t(\omega)$  in luogo di  $X(t, \omega)$ .

Se riguardiamo un processo stocastico come una famiglia di variabili casuali

dipendente dal parametro  $t$ , lo dovremmo denotare nel modo seguente:  $\{X_t\}_{t \in \Lambda}$ , ma noi spesso per brevità scriveremo semplicemente  $X_t$ .

Nel seguito ci limiteremo a considerare processi stocastici a valori reali e spesso per noi sarà  $\Lambda = [0, +\infty)$ .

Per poter fare delle previsioni future in un dato istante  $t$  su un processo stocastico, si deve disporre di un certo insieme di informazioni  $\mathcal{I}_t$  al tempo  $t$ . Dal punto di vista matematico, per quanto abbiamo visto nel Capitolo 3, le strutture informative  $\mathcal{I}_t$  sono sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ .

Dunque, se si vogliono determinare i valori attesi futuri di un processo stocastico al fine di prendere una decisione, si deve specificare l'informazione corrente di cui si dispone. Nei modelli finanziari si suppone che i prezzi delle azioni, passati e correnti, siano noti agli investitori e che questi posseggano solo informazioni correnti e non informazioni future.

In generale, quando si studiano processi stocastici, si suppone di avere a disposizione una struttura informativa che varia a trascorrere del tempo:  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$ , ossia una famiglia di strutture informative dipendente dal parametro  $t$ .

Col passare del tempo, le informazioni utilizzate per fare previsioni su un processo stocastico aumentano, se si assume che le informazioni passate non vadano perdute. Per  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$  si ha perciò una successione crescente di  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{I}_{t_0} \subset \mathcal{I}_{t_1} \subset \dots \subset \mathcal{I}_{t_i} \subset \mathcal{I}_{t_{i+1}} \subset \dots$

**Definizione 4.9.** *Definiamo filtrazione su  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  una famiglia crescente  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  di sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{A}$ , cioè tale che  $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}_t$  se  $s < t$ .*

Considerata una filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  e due processi stocastici  $X_t, Y_t$ , come conseguenza dei risultati relativi all'aspettativa condizionata visti nel Capitolo 3, sussistono le due seguenti proprietà:

i) come conseguenza della linearità :

$$E(X_t + Y_t | \mathcal{I}_s) = E(X_t | \mathcal{I}_s) + E(Y_t | \mathcal{I}_s) \quad \text{se } s < t,$$

ossia si possono fare previsioni separate sui singoli processi stocastici e poi calcolare la previsione totale come somma delle singole previsioni;

ii) come conseguenza della proprietà a torre:

$$E(E(X_{t+\tau+s} | \mathcal{I}_{t+\tau}) | \mathcal{I}_t) = E(X_{t+\tau+s} | \mathcal{I}_t) \quad \text{se } \tau > 0, s > 0.$$

Vediamo di interpretare tale proprietà.

Assumiamo che le informazioni più recenti si abbiano al tempo  $t$ , ma si sia

interessati alla previsione di  $E(X_{t+\tau+s} | \mathcal{I}_{t+\tau})$ , cioè alla previsione di una previsione futura. Poiché non sono disponibili informazioni al tempo  $t + \tau$ ,  $E(X_{t+\tau+s} | \mathcal{I}_{t+\tau})$  è una variabile casuale i cui valori non sono noti. Questa proprietà ci dice però che l'aspettativa della futura aspettativa di  $X_{t+\tau+s}$  è uguale all'aspettativa di  $X_{t+\tau+s}$  date le informazioni che si hanno al tempo  $t$ . In altri termini l'applicazione ripetuta dell'operatore di aspettativa condizionata uguaglia l'aspettativa condizionata rispetto al più piccolo insieme di informazioni.

Dalla proprietà ii) prendendo  $t = 0$ , discende che:

$$E(E(X_{\tau+s} | \mathcal{I}_\tau) | \mathcal{I}_0) = E(X_{\tau+s} | \mathcal{I}_0) \quad \forall \tau, s > 0.$$

Denotando  $\tau + s$  con  $t$ , la precedente uguaglianza si riscrive nella forma

$$E(E(X_t | \mathcal{I}_\tau) | \mathcal{I}_0) = E(X_t | \mathcal{I}_0) \quad \forall \tau, t \text{ con } 0 < \tau < t. \quad (4.2.1)$$

Se  $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , cioè se  $\mathcal{I}_0$  è la  $\sigma$ -algebra banale, si ha:

$$E(X_t | \mathcal{I}_0) = E(X_t) \quad \forall t > 0,$$

per cui se  $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  dalla (4.2.1) discende

$$E(E(X_t | \mathcal{I}_\tau) | \mathcal{I}_0) = E(X_t) \quad \forall \tau, t \text{ con } 0 < \tau < t.$$

**Definizione 4.10.** *Si dice che il processo stocastico  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  se per ogni  $t \in \Lambda$  la variabile casuale  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ .*

Ricordiamo che la variabile casuale  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$  se tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \leq x\}$  con  $x \in \mathbb{R}$  sono in  $\mathcal{I}_t$ .

Spesso, dato il processo stocastico  $X_t$ , la scelta più semplice di filtrazione, rispetto alla quale  $X_t$  è adattato, è la seguente:

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{X_s; 0 \leq s \leq t\}),$$

ossia la più piccola  $\sigma$ -algebra rispetto alla quale tutte le  $X_s$ , con  $0 \leq s \leq t$ , sono misurabili. Dunque è la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente tutti gli insiemi  $\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \leq x\}$  al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$  ed al variare di  $s$  in  $[0, t]$ . In tal caso si parla di **filtrazione naturale**.

Disporre di questi insiemi informativi significa che tutte le informazioni che si hanno al tempo  $t$  su ogni stato  $\omega$  sono quelle che si ottengono dai valori  $X_s(\omega)$  con  $s \leq t$ .

Se  $X_t$  è il prezzo di un'azione, significa assumere che il prezzo al tempo  $t$  si forma sulla base dell'andamento che si osserva sul mercato fino al tempo  $t$ .

Nei paragrafi successivi esamineremo alcuni importanti esempi di processi stocastici.

### 4.3 Martingale.

La teoria delle martingale gioca un ruolo importante nella moderna teoria dei mercati finanziari. Intuitivamente, un processo stocastico si comporta come una martingala se le sue traiettorie non mostrano, in media, un particolare “trend” (cioè andamento), si comporta come una submartingala se, in media, il “trend” è crescente, come una supermartingala se, in media, il “trend” è decrescente.

**Definizione 4.11.** Dato il processo stocastico  $X_t$ , si dice che è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  se:

- 1) è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ ;
- 2)  $E(|X_t|) < +\infty \quad \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $E(X_T | \mathcal{I}_t) = X_t$  quasi sicuramente  $\forall t, T$  con  $0 \leq t < T$ .

In particolare la proprietà 3) ci dice che se al tempo  $t$  vogliamo fare una previsione di un valore futuro di una martingala disponendo delle informazioni presenti al tempo attuale, allora la miglior previsione del valore futuro è il valore corrente stesso.

**Definizione 4.12.** Dato il processo stocastico  $X_t$ , si dice che è una supermartingala (submartingala) rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  se:

- 1) è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ ;
- 2)  $E(|X_t|) < +\infty \quad \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $E(X_T | \mathcal{I}_t) \leq X_t$  ( $E(X_T | \mathcal{I}_t) \geq X_t$ ) quasi sicuramente  $\forall t, T$  con  $0 \leq t < T$ .

**Osservazione.**

Data una martingala, vediamo di calcolare il valore atteso condizionato per l'incremento  $X_{t+\delta} - X_t$  con  $\delta > 0$ :

$$E(X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t) = E(X_{t+\delta} | \mathcal{I}_t) - E(X_t | \mathcal{I}_t)$$

dove abbiamo fatto uso della linearità dell'aspettativa condizionata.

D'altra parte, per la proprietà 3) della definizione di martingala abbiamo

$$E(X_{t+\delta} | \mathcal{I}_t) = X_t.$$

Inoltre, poiché  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \in \Lambda}$  grazie alla proprietà 1), è misurabile e quindi variabile casuale rispetto a  $\mathcal{I}_t$  e per una proprietà dell'aspettativa condizionata:

$$E(X_t | \mathcal{I}_t) = X_t.$$

Perciò:

$$E(X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t) = 0.$$

Dunque per le martingale i valori attesi condizionati per gli incrementi futuri sono nulli, ossia gli incrementi futuri sono imprevedibili. Per le martingale non ci si possono aspettare tendenze per il futuro.

Nel caso delle supermartingale e delle submartingale, si ha rispettivamente:

$$E(X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t) \leq 0, \quad E(X_{t+\delta} - X_t | \mathcal{I}_t) \geq 0$$

ossia ci si può aspettare un trend decrescente e crescente rispettivamente.

Nella figura sottostante rappresentiamo una possibile traiettoria per una supermartingala e per una submartingala.

Figura 4.1

Supermartingala

Submartingala

### Esempio 4.1

Siano  $X$  una variabile casuale con  $E(|X|) < +\infty$  e  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  una filtrazione.

Poniamo  $M_t = E(X | \mathcal{I}_t)$ . Allora  $M_t$  è una martingala rispetto a  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

Infatti:

1. E' vera per la definizione di aspettativa condizionata;
2.  $E(|M_t|) = E(|E(X | \mathcal{I}_t)|) \leq E(E(|X| | \mathcal{I}_t)) = E(|X|)$ .  
Nel penultimo passaggio abbiamo sfruttato la seguente proprietà dell'aspettativa condizionata che in precedenza non abbiamo menzionato:

$$|E(X | \mathcal{I})| \leq E(|X| | \mathcal{I}),$$

mentre nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà 6) dell'aspettativa condizionata.

3. Se  $t < T$  per la proprietà a torre abbiamo:

$$E(M_T | \mathcal{I}_t) = E(E(X | \mathcal{I}_T) | \mathcal{I}_t) = E(X | \mathcal{I}_t) = M_t.$$

Abbiamo visto che se  $X_t$  è una martingala, le sue variazioni future, data l'informazione corrente, sono imprevedibili. Ma in generale i prezzi dei titoli finanziari non sono completamente imprevedibili e l'investitore razionale si attende che, in media, crescano.

Per esempio, se  $B_t$  rappresenta il prezzo di un'obbligazione che scade al tempo  $T$  con  $T > t$ , si ha

$$B_t < E(B_\tau | \mathcal{I}_t), \quad t < \tau < T,$$

ovvero  $B_t$  non segue una martingala, bensì una submartingala.

Un discorso analogo vale per i titoli rischiosi che abbiano rendimento atteso positivo, come, per esempio le azioni.

Le opzioni hanno invece un comportamento diverso; abbiamo visto nel Capitolo 2 che il valore di un'opzione call europea diminuisce man mano che ci si avvicina alla scadenza, ossia si comporta come una supermartingala.

Nonostante che i prezzi delle attività finanziarie siano più frequentemente super- o sub-martingale, questi con opportuni metodi possono essere trasformati in martingale per cui le martingale hanno acquistato notevole interesse nella moderna finanza. Comunque noi non insistiamo su tale questione.

## 4.4 Processi di Wiener e Moti Browniani.

I processi di Wiener giocano un ruolo importante nella descrizione, in tempo continuo, dell'andamento "normale" dei prezzi dei titoli di un mercato finanziario. Con l'aggettivo "normale" intendiamo escludere eventi rari, come un crollo finanziario.

Tali processi traggono il loro nome dal matematico Norbert Wiener che nel 1923 fornì una rappresentazione del moto Browniano.

Vediamo la definizione formale di processo di Wiener standard.

**Definizione 4.13.** *Un processo di Wiener standard è un processo stocastico  $W_t$  con  $t \geq 0$ , relativo ad una filtrazione  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$  tale che:*

- $W_0 = 0$  quasi sicuramente;

- $W_t$  è una martingala rispetto a  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ ;
- $E(W_t^2) < +\infty$ , ossia  $W_t \in L^2(\Omega) \quad \forall t \geq 0$ ;
- $E((W_t - W_s)^2 | \mathcal{I}_s) = t - s \quad \forall s \leq t$ ;
- le traiettorie di  $W_t$  sono continue in  $t$ .

Nella definizione di processo di Wiener non standard va modificata soltanto la penultima proprietà nel modo seguente:

$$E((W_t - W_s)^2 | \mathcal{I}_s) = \sigma^2(t - s) \quad \forall s \leq t$$

con  $\sigma$  costante positiva.

Poiché per  $t = 0$  un processo di Wiener è nullo quasi sicuramente e quindi è una variabile casuale costante, si assume  $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Dalla definizione di processo di Wiener discendono alcune proprietà:

- 1)  $W_t$  ha incrementi futuri non prevedibili (poiché è una martingala);
- 2)  $E(W_t) = 0$ , cioè il valore atteso di un processo di Wiener è nullo. Infatti, essendo  $W_0 = 0$ , abbiamo  $E(W_0) = 0$  e quindi

$$E(W_t) = E(W_t - W_0) = E(W_t - W_0 | \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{I}_0) = 0$$

essendo il processo di Wiener una martingala;

- 3)  $\sigma_{W_t}^2 = t$ , ossia  $W_t$  ha varianza pari a  $t \quad \forall t \geq 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= E(W_t^2) - (E(W_t))^2 = E(W_t^2) = E((W_t - W_0)^2) \\ &= E((W_t - W_0)^2 | \mathcal{I}_0) = t. \end{aligned}$$

Diamo ora la definizione di **moto Browniano**.

Il termine Browniano deriva dal nome del botanico Robert Brown che nel 1827 scoprì che le particelle di polline immerse in un fluido seguono movimenti caotici e irregolari. Albert Einstein nel 1905 formulò un modello matematico del moto Browniano. Ma già nel 1900 L. Bachelier aveva utilizzato il moto Browniano per descrivere il movimento dei prezzi azionari e degli altri indici finanziari sul mercato azionario di Parigi.

**Definizione 4.14.** *Un moto Browniano standard è un processo stocastico  $B_t$  con  $t \geq 0$  avente le seguenti proprietà:*

- $B_0 = 0$  quasi sicuramente;
- $B_t$  è continuo rispetto a  $t$ ;
- gli incrementi di  $B_t$  sono indipendenti, ossia se  $0 < t_0 < \dots < t_i$ , allora  $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  sono indipendenti;
- per  $0 \leq s < t$  gli incrementi  $B_t - B_s$  hanno distribuzione gaussiana con media 0 e varianza  $t - s$ , ossia  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .

Nel caso di un moto Browniano non standard, al quarto punto la varianza è  $\sigma^2(t - s)$ , cioè il caso standard corrisponde a  $\sigma = 1$ .

Come vedremo, un moto Browniano è correlato a quei particolari processi stocastici noti come **passeggiate casuali simmetriche**.

**Definizione 4.15.** *Definiamo passeggiata casuale simmetrica un processo stocastico discreto  $X : \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

- $\Lambda = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots\}$  con  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$   $i = 1, 2, \dots$ , per cui  $t_i = i \Delta t$
- all'istante  $t = 0$   $X$  è nullo quasi sicuramente;
- indicato con  $X_{t_i}$  il valore della variabile casuale  $X$  all'istante  $t_i$  e posto  $\Delta X_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$  con  $i = 1, 2, \dots$ , gli incrementi  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots$  sono indipendenti
- gli incrementi  $\Delta X_i$  della variabile casuale  $X$  possono assumere solo i due valori  $h (> 0)$  o  $-h$  con probabilità pari a  $\frac{1}{2}$ , qualunque sia lo stato  $\omega$  considerato.

In effetti si dimostra che si può approssimare un moto Browniano in ogni intervallo di tempo finito con passeggiate casuali simmetriche. Noi faremo un breve cenno a tale questione.

Ci limiteremo a considerare un moto Browniano standard, ma quanto diremo si estende anche ai moti Browniani non standard con le opportune modifiche.

Consideriamo una passeggiata casuale simmetrica.

Indichiamo con  $\Delta X$  la variazione di  $X$  ad ogni passo e calcoliamo il valore atteso di un singolo incremento:

$$E(\Delta X) = h \cdot \frac{1}{2} - h \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Per quanto riguarda la varianza, si ha:

$$\sigma_X^2 = E((\Delta X)^2) - (E(\Delta X))^2 = E((\Delta X)^2) = h^2 \cdot \frac{1}{2} + (-h)^2 \cdot \frac{1}{2} = h^2.$$

Consideriamo poi l'istante  $t = t_n = n \Delta t$  con  $n \in \mathbb{N}$  e poiché per  $t = 0$   $X$  assume il valore  $X_0 = 0$ , si ha

$$X_t = X_t - X_0.$$

Se al secondo membro di quanto scritto sopra aggiungiamo e togliamo:

$$X_{(n-1)\Delta t}, X_{(n-2)\Delta t}, \dots, X_{\Delta t},$$

deduciamo:

$$X_t = \sum_{i=1}^n \Delta X_i.$$

Per la linearità del valore atteso, otteniamo:

$$E(X_t) = E\left(\sum_{i=1}^n \Delta X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\Delta X_i) = 0.$$

Per quanto riguarda la varianza di  $X_t$ , tenendo presente l'indipendenza degli incrementi  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$ , risulta la seguente espressione:

$$\sigma_{X_t}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta X_i}^2 = n h^2 = \frac{t}{\Delta t} h^2.$$

A questo punto, se prendiamo una passeggiata casuale simmetrica tale che  $h = \sqrt{\Delta t}$ , abbiamo:

$$\sigma_{X_t}^2 = t.$$

Se ora facciamo tendere  $\Delta t$  a 0, mantenendo finito  $t$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , la distribuzione di  $X_t$  tende alla distribuzione normale con media 0 e varianza  $t$ , che è appunto la distribuzione di  $B_t = B_t - B_0$  per un moto Browniano standard.

Più in generale si prova che per  $\Delta t \rightarrow 0$ , con  $t$  finito, la passeggiata casuale nell'intervallo  $[0, t]$  tende ad un moto Browniano standard. Infatti, come per un moto Browniano,

- la passeggiata casuale da noi considerata parte dall'origine;
- gli incrementi successivi sono indipendenti;

- al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , e  $t$  finito, si può provare che  $X_t - X_s$  con  $s < t$  ha una distribuzione gaussiana con  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = t - s$ .

Riprendiamo in esame una passeggiata casuale simmetrica e calcoliamo ora il valore atteso del valore assoluto di  $\Delta X$ :

$$E(|\Delta X|) = h \cdot \frac{1}{2} + |-h| \cdot \frac{1}{2} = h.$$

Consideriamo poi la **variazione totale di  $X$  da 0 a  $t$** , data da  $\sum_{i=1}^n |\Delta X_i|$  e calcoliamone il valore atteso:

$$E\left(\sum_{i=1}^n |\Delta X_i|\right) = nh. \quad (4.4.1)$$

D'altra parte,  $h = \sqrt{\Delta t}$  e se teniamo presente che  $n = \frac{t}{\Delta t}$ , dalla (4.4.1) deduciamo:

$$E\left(\sum_{i=1}^n |\Delta X_i|\right) = \frac{t}{\Delta t} \sqrt{\Delta t} = \frac{t}{\sqrt{\Delta t}}.$$

Se ora facciamo tendere  $\Delta t$  a 0, mantenendo finito  $t$ , e dunque facendo tendere  $n$  a  $+\infty$ , troviamo che il valore atteso della variazione totale di  $X$  da 0 a  $t$  tende a  $+\infty$ .

Per il moto Browniano ciò implica che ogni porzione di quasi ogni traiettoria ha variazione illimitata.

Questa osservazione, come vedremo, svolge un ruolo importante nell'ambito del calcolo integrale stocastico.

Per quanto abbiamo visto, le passeggiate casuali descritte consentono di avere una rappresentazione approssimata del moto Browniano. Del resto non è possibile rappresentare con esattezza le traiettorie di un moto Browniano: ogni rappresentazione grafica è necessariamente un'approssimazione.

Vediamo ora quale relazione sussiste tra un processo di Wiener e un moto Browniano.

**Teorema 4.1.** *Un moto Browniano standard è un processo di Wiener standard rispetto alla filtrazione naturale  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .*

Dimostrazione

In primo luogo ricordiamo che la filtrazione naturale è tale che

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\})$$

per cui le informazioni al tempo  $t$  sono ricavate dalla storia del moto Browniano sino al tempo  $t$ .

Svolgiamo ora la dimostrazione.

Come abbiamo visto, un processo di Wiener è caratterizzato da cinque proprietà.

La prima e la quinta sono soddisfatte per definizione di moto Browniano.

Dimostriamo che  $B_t$  rispetto alla filtrazione naturale è una martingala.

La prima delle tre proprietà che definiscono una martingala è soddisfatta automaticamente per la scelta della filtrazione.

Per provare la seconda, ossia che  $E(|B_t|) < +\infty$ , basta osservare che, essendo  $B_0 = 0$ , tale condizione è certamente verificata per  $t = 0$ , mentre  $\forall t > 0$   $B_t$  ha una distribuzione gaussiana con media nulla e varianza  $t$  per cui

$$E(|B_t|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx < +\infty.$$

Dimostriamo la terza proprietà, ossia che

$$E(B_t | \mathcal{I}_s) = B_s \quad \text{per } 0 \leq s < t.$$

Ma se teniamo presente la definizione di filtrazione naturale, sarà sufficiente mostrare che

$$E(B_t | B_s) = B_s \quad \text{per } 0 \leq s < t. \quad (4.4.2)$$

D'altra parte, il primo membro della (4.4.2) si può scrivere nella forma:

$$E(B_t | B_s) = E(B_t - B_s + B_s | B_s) = E(B_t - B_s | B_s) + E(B_s | B_s), \quad \text{per } 0 \leq s < t, \quad (4.4.3)$$

avendo sfruttato la linearità dell'aspettativa condizionata.

Ma, se teniamo presente che, per definizione di moto Browniano, gli incrementi  $B_t - B_s$  e  $B_s = B_s - B_0$  con  $s < t$  sono indipendenti, grazie ad una proprietà dell'aspettativa condizionata, otteniamo:

$$E(B_t - B_s | B_s) = E(B_t - B_s) = 0, \quad (4.4.4)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà 4) dei moti Browniani. Dunque, per le (4.4.3), (4.4.4), deduciamo

$$E(B_t | B_s) = E(B_s | B_s) = B_s \quad \text{per } 0 \leq s < t,$$

che è il risultato che ci proponevamo di ottenere.

Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto presente che  $B_s$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra da esso generata ed abbiamo usato una proprietà dell'aspettativa condizionata.

Per quanto riguarda la terza proprietà dei processi di Wiener, è facile mostrare che  $B_t \in {}^2(\Omega)$ , ragionando come avevamo fatto per provare che  $B_t \in L^1(\Omega)$ .

Per dimostrare la quarta proprietà, cioè che

$$E((B_t - B_s)^2 | \mathcal{I}_s) = t - s \quad \forall s \leq t,$$

è sufficiente mostrare che

$$E((B_t - B_s)^2 | B_s) = t - s \quad \text{per } 0 \leq s < t.$$

Ma per stabilire questo risultato, basta ragionare come in precedenza, osservando che dall'indipendenza di  $B_t - B_s$  e  $B_s$  segue l'indipendenza di  $(B_t - B_s)^2$  e  $B_s$ , per cui, per una proprietà dell'aspettativa condizionata già utilizzata più volte, si ha

$$E((B_t - B_s)^2 | B_s) = E((B_t - B_s)^2) = t - s,$$

come ci proponevamo di ottenere. Ovviamente l'ultimo risultato è conseguenza del fatto che  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .

Il teorema è così dimostrato.

In realtà il legame tra processi di Wiener e moti Browniani è ancora più stretto: sussiste infatti il seguente teorema che non dimostriamo:

**Teorema 4.2. Teorema di Lévy.** *Ogni processo di Wiener è un moto Browniano.*

Pertanto nel seguito non faremo distinzione fra processo di Wiener e moto Browniano. In genere parleremo di processo di Wiener.

Enunciamo altre proprietà dei processi di Wiener.

- a) Poiché  $\sigma_{W_t}^2 = t$ , la varianza di  $W_t$  cresce illimitatamente per  $t \rightarrow +\infty$ , mentre la media è nulla ad ogni  $t$ . Di conseguenza, le tipiche traiettorie campione assumono valori sempre più grandi, in valore assoluto, al trascorrere del tempo.
- b) Poiché un processo di Wiener è anche un moto Browniano, gli incrementi successivi sono indipendenti e l'incremento  $W_t - W_s$  con  $0 \leq s < t$  ha distribuzione gaussiana con media 0 e varianza  $t - s$ .
- c) Quasi tutte le traiettorie di  $W_t$ , che per definizione sono continue rispetto a  $t$ , non sono derivabili rispetto al tempo  $\forall t \geq 0$ .

Dimostriamo l'ultima proprietà facendo vedere che per quasi tutte le traiettorie, fissato arbitrariamente  $t$  in  $[0, +\infty)$ , il limite per  $h$  tendente a 0 del rapporto incrementale  $\frac{W_{t+h} - W_t}{h}$  non può essere finito.

Infatti, preso  $h \in (0, \bar{h})$  con  $\bar{h} > 0$  e  $\epsilon > 0$  arbitrario, consideriamo

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon\right\}\right).$$

Essendo  $h > 0$ , si ha

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon\right\}\right) &= \\ &= P(\{\omega \in \Omega : |W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)| > h\epsilon\}). \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : |W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)| > h\epsilon\} &= \\ \{\omega \in \Omega : W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega) < -h\epsilon\} \cup \{\omega \in \Omega : W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega) > h\epsilon\}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega : |W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)| > h\epsilon\}) &= \\ P(\{\omega \in \Omega : W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega) < -h\epsilon\}) &+ \\ + P(\{\omega \in \Omega : W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega) > h\epsilon\}). \end{aligned}$$

D'altra parte,  $W_{t+h} - W_t$  ha una distribuzione gaussiana con media uguale a 0 e varianza uguale ad  $h$ . Allora otteniamo:

$$P(\{\omega \in \Omega : W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega) < -h\epsilon\}) = \int_{-\infty}^{-h\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx,$$

$$P(\{\omega \in \Omega : W_{t+h} - W_t > h\epsilon\}) = \int_{h\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx.$$

Dunque deduciamo

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon\right\}\right) &= \\ = \int_{-\infty}^{-h\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx &+ \int_{h\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx \\ = 2 \int_{h\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx. \end{aligned}$$

Effettuiamo ora nell'ultimo integrale scritto sopra il seguente cambiamento della variabile d'integrazione:

$$\lambda = \frac{x}{\sqrt{2h}} \implies dx = \sqrt{2h} d\lambda,$$

cosicché

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon\right\}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\epsilon\sqrt{\frac{h}{2}}}^{+\infty} \exp\{-\lambda^2\} d\lambda. \quad (4.4.5)$$

Se ora nella (4.4.5) facciamo il limite per  $h \rightarrow 0^+$ , poiché l'integrale tende a  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , otteniamo:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon\right\}\right) \rightarrow 1 \quad \text{per } h \rightarrow 0^+.$$

Ciò significa che, comunque si scelga  $\epsilon$ , per  $h \rightarrow 0^+$

$$\left|\frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}\right| > \epsilon \quad \text{quasi sicuramente,}$$

cioè la derivata è quasi sicuramente infinita.

Dunque abbiamo provato la proprietà c) di un processo di Wiener.

La non derivabilità delle traiettorie corrisponde all'estrema irregolarità che si riscontra in un processo di Wiener (o equivalentemente in un processo Browniano).

In Figura 4.2 rappresentiamo alcune possibili traiettorie di un processo di Wiener.

Figura 4.2

# Capitolo 5

## Calcolo classico e calcolo stocastico

Nella moderna teoria dei mercati finanziari, come già osservato più volte, svolgono un ruolo fondamentale i processi stocastici e in particolari i processi di Wiener.

Nel Capitolo precedente abbiamo visto che quasi tutte le traiettorie dei processi di Wiener non sono derivabili rispetto al tempo e che ogni loro porzione non è a variazione limitata. Ciò comporta che i tradizionali strumenti dell'Analisi Matematica classica risultano insufficienti. In particolare risultano inadeguati la nozione di integrale di Riemann-Stieltjes, che è una generalizzazione dell'integrale di Riemann, e il concetto di differenziale classico. Occorre utilizzare un nuovo calcolo, il calcolo stocastico.

Il calcolo stocastico è nato con lo scopo di dare significato alle equazioni differenziali che descrivono i processi stocastici. Esso ha origine dai lavori pionieristici di N. Wiener (1923), i cui risultati furono generalizzati da K. Ito (1944) ed esposti da J. L. Doob (1953), I. Gikhman e A. V. Skorokhod (1969), L. Arnold (1974). Nel 1966 R. L. Stratonovich diede una definizione di integrale stocastico diversa da quella data da Ito, ma noi tratteremo solo di quest'ultima perché la letteratura di teoria economica e finanziaria si basa principalmente sul calcolo di Ito.

E' comunque importante rilevare che il calcolo stocastico trova applicazione, non solo in ambito finanziario, ma in moltissimi altri campi.

Citiamone alcuni:

- Ingegneria aerospaziale: determinazione dell'orbita di satelliti, stima di posizione e velocità di veicoli spaziali, stima di traiettorie di rientro di capsule spaziali, come nelle Missioni Ranger, Mariner e Apollo della NASA, incluso Apollo 11 (primo sbarco sulla luna);
- Navigazione automatica di veicoli aerei, subacquei, terrestri, ecc.;

- Studio dei circuiti elettrici, Predizione delle maree, Biomedicina, Armi, Scienze sociali, ecc..

Il calcolo stocastico di Ito ha gli stessi scopi del calcolo classico dell'Analisi Matematica, ma le formule che si ottengono sono diverse da quelle classiche. Il calcolo stocastico, come quello classico, si divide in calcolo differenziale e calcolo integrale.

In questo capitolo esporremo la teoria dell'integrazione di Ito e nel capitolo successivo il calcolo differenziale poiché il differenziale stocastico assume significato solo in virtù del concetto di integrale.

## 5.1 Richiami sull'integrale di Riemann. Integrale di Riemann-Stieltjes.

Richiamiamo dapprima la definizione di **integrale di Riemann** dell'Analisi Matematica classica.

Sia  $G(t)$  una funzione a valori reali limitata, definita sull'intervallo  $[t_0, T]$ , e consideriamo una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

**Definizione 5.1.** Chiamiamo *somma di Riemann della funzione  $G$  relativa alla partizione  $\Pi$*  la seguente somma:

$$\sum(G, \Pi) = \sum_{j=1}^n G(\tau_j) (t_j - t_{j-1})$$

dove  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definizione 5.2.** Se esiste un numero  $I$  tale che  $\forall \epsilon > 0$  esiste una partizione  $\Pi_\epsilon$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che per ogni scelta di  $\tau_j$  in  $[t_{j-1}, t_j]$  risulti

$$\left| \sum(G, \Pi_\epsilon) - I \right| < \epsilon,$$

allora la funzione  $G$  è detta *integrabile secondo Riemann in  $[t_0, T]$*  e  $I$ , denotato con  $\int_{t_0}^T G(t) dt$ , è detto *integrale di Riemann di  $G$  da  $t_0$  a  $T$* .

E' ben noto che ogni funzione continua nell'intervallo  $[t_0, T]$  è integrabile secondo Riemann su tale intervallo.

Vediamo ora una generalizzazione, sempre in ambito classico, dell'integrale di Riemann: l'**integrale di Riemann-Stieltjes**.

Diamo dapprima la seguente definizione.

**Definizione 5.3.** Una funzione  $S(t)$  a valori reali definita sull'intervallo  $[t_0, T]$  è detta *funzione a variazione limitata* se esiste una costante  $C > 0$  tale per ogni partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

si abbia:

$$\sum_{j=1}^n |S(t_j) - S(t_{j-1})| \leq C.$$

Si può verificare facilmente che ogni funzione monotona è a variazione limitata.

**Definizione 5.4.** Date le due funzioni  $G(t), S(t)$ , con  $G(t)$  limitata e  $S(t)$  a variazione limitata, definite sullo stesso intervallo  $[t_0, T]$ , e, considerata la partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , definiamo *somma di Riemann-Stieltjes della funzione  $G$  rispetto alla funzione  $S$*  la somma seguente:

$$\sum(G, S, \Pi) = \sum_{j=1}^n G(\tau_j) (S(t_j) - S(t_{j-1}))$$

dove  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definizione 5.5.** Se esiste un numero  $I$  tale che  $\forall \epsilon > 0$  esiste una partizione  $\Pi_\epsilon$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che per ogni scelta di  $\tau_j$  in  $[t_{j-1}, t_j]$  risulti

$$\left| \sum(G, S, \Pi_\epsilon) - I \right| < \epsilon,$$

allora la funzione  $G$  è detta *integrabile rispetto a  $S$  secondo Riemann-Stieltjes* in  $[t_0, T]$  e  $I$ , denotato con  $\int_{t_0}^T G(t) dS(t)$ , è detto *integrale di Riemann-Stieltjes di  $G$  rispetto a  $S$  da  $t_0$  a  $T$* .

$G$  prende il nome di *funzione integranda* e  $S$  di *integratore*.

Una condizione sufficiente affinché una funzione  $G$  sia integrabile rispetto ad  $S$  secondo Riemann-Stieltjes è che sia continua.

Si osservi che l'integrale di Riemann è un caso particolare dell'integrale di Riemann-Stieltjes con integratore  $S(t) = t$ .

Si può anche provare la seguente proposizione:

**Proposizione 5.1.** *Se  $G$  è integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$  e  $S$  è derivabile con derivata integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$ , allora  $G$  è integrabile secondo Riemann-Stieltjes rispetto a  $S$  in  $[t_0, T]$  e si ha:*

$$\int_{t_0}^T G(t) dS(t) = \int_{t_0}^T G(t) S'(t) dt,$$

dove l'integrale al secondo membro è un integrale di Riemann.

Come abbiamo visto, nella definizione di integrale di Riemann-Stieltjes si richiede che l'integratore sia a variazione limitata. Ora, nel calcolo stocastico intervengono integrali in cui la funzione integranda può anche essere un processo stocastico  $G_t$  e l'integratore è un processo di Wiener,  $W_t$ , cioè integrali della forma

$$\int_{t_0}^T G_t dW_t.$$

Ovviamente in tal caso l'integrale non è un numero, ma una funzione a valori reali definita su  $\Omega$ , essendo  $G_t$  e  $W_t$  variabili casuali per cui:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \left( \int_{t_0}^T G_t dW_t \right) (\omega) = \int_{t_0}^T G(t, \omega) dW(t, \omega).$$

Dunque nell'integrale sopra scritto compaiono le traiettorie di  $W_t$  relative ai vari stati  $\omega$ , che, come sappiamo, non sono funzioni a variazione limitata. È evidente che allora non possiamo utilizzare la definizione classica di integrale di Riemann-Stieltjes.

Non risolveremmo il problema neppure se ricorressimo all'integrale di Lebesgue-Stieltjes, che è una generalizzazione dell'integrale di Lebesgue, poichè anche in tal caso si richiede che l'integratore sia una funzione a variazione limitata.

Pur non potendo utilizzare l'integrale di Riemann-Stieltjes in ambito stocastico, tuttavia consideriamo ugualmente la somma di Riemann-Stieltjes corrispondente all'integrale

$$\int_{t_0}^T W_t dW_t$$

ed alla partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ .

Tale somma è data da

$$\sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$$

con  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ , ed è una variabile casuale.

Calcoliamone il valore atteso:

$$E \left( \sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right) = \sum_{j=1}^n E (W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})).$$

D'altra parte

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} = W_{t_j} - W_{\tau_j} + W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}} \quad \text{e} \quad W_{\tau_j} = W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}} + W_{t_{j-1}},$$

per cui

$$\begin{aligned} W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) &= (W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}} + W_{t_{j-1}})(W_{t_j} - W_{\tau_j} + W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}}) \\ &= (W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})(W_{t_j} - W_{\tau_j}) + \\ &\quad + (W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})(W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}}) + W_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right) &= \\ &= \sum_{j=1}^n \{ E((W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})(W_{t_j} - W_{\tau_j})) + E((W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})^2) + E(W_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) \}. \end{aligned}$$

Ma, essendo un processo di Wiener anche un moto Browniano, gli incrementi successivi sono indipendenti per cui

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right) &= \\ &= \sum_{j=1}^n E(W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})E(W_{t_j} - W_{\tau_j}) + \sum_{j=1}^n E((W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})^2) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n E(W_{t_{j-1}})E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned}$$

Se poi teniamo presente che il valore atteso di un processo di Wiener è nullo e che  $E((W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})^2) = \tau_j - t_{j-1}$ , la relazione precedente fornisce:

$$E \left( \sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right) = \sum_{j=1}^n (\tau_j - t_{j-1}). \quad (5.1.1)$$

D'altra parte, potremo sempre scegliere  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ , in modo tale da avere:

$$\tau_j = t_{j-1} + \vartheta (t_j - t_{j-1}) \quad \text{dove } 0 \leq \vartheta \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Sostituendo nella (5.1.1), otteniamo:

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{j=1}^n W_{\tau_j} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right) &= \sum_{j=1}^n (t_{j-1} + \vartheta (t_j - t_{j-1}) - t_{j-1}) \\ &= \vartheta \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \vartheta (T - t_0). \end{aligned}$$

Il valore atteso dipende da  $\vartheta$ , ossia dalla scelta del punto  $\tau_j$ .

Per ovviare alla dipendenza da  $\vartheta$ , nell'integrale stocastico di Ito si pone sempre per convenzione  $\vartheta = 0$ , per cui si sceglie sempre  $\tau_j = t_{j-1}$ . Da notare che questa è già una prima differenza dall'integrale classico di Riemann-Stieltjes.

Nell'integrale stocastico definito da Stratonovich si prende  $\vartheta = \frac{1}{2}$ , ossia  $\tau_j$  è il punto medio dell'intervallo  $[t_{j-1}, t_j]$ .

## 5.2 Definizione di integrale di Ito

In questo paragrafo diamo la definizione di integrale di Ito iniziando dal caso più semplice per arrivare al caso più generale.

Siano  $G(t, \omega)$  una funzione a valori reali definita su  $[t_0, T] \times \Omega$  e  $W_t$  un processo di Wiener.

1) Supponiamo che la funzione  $G$  sia **non stocastica**, ossia non dipendente da  $\omega$ :

$$G(t, \omega) = G(t) \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \forall \omega \in \Omega$$

e che inoltre

$$G(t) = g = \text{costante} \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Allora definiamo l'integrale stocastico di Ito di  $G$  rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:

$$I_G = \int_{t_0}^T G(t) dW_t = g(W_T - W_{t_0}).$$

**Osservazione 5.1.** Ovviamente, essendo  $W_T$  e  $W_{t_0}$  variabili casuali, l'integrale  $I_G$  così definito è a sua volta una variabile casuale e dunque

$$\forall \omega \in \Omega \quad I_G(\omega) = g(W_T(\omega) - W_{t_0}(\omega)).$$

2) Supponiamo che la funzione  $G$  sia non stocastica, ossia che  $G(t, \omega) = G(t)$  e che  $G(t)$  sia una funzione semplice elementare, ossia che esista una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  ottenuta mediante i punti:  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che

$$G(t) = g_j \text{ (costante) se } t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Allora si definisce integrale stocastico di Ito di  $G$  rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  la seguente variabile casuale:

$$I_G = \int_{t_0}^T G(t) dW_t = \sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Figura 5.1

### 3) Caso generale

Supponiamo che la funzione  $G$  sia stocastica, ossia:

$$\begin{aligned} G : [t_0, T] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longmapsto G(t, \omega) \end{aligned}$$

e per ogni  $t$  fissato in  $[t_0, T]$  la funzione  $G(t, \cdot)$  è una variabile casuale.

L'integrale di Ito viene definito purché siano soddisfatte da  $G$  delle opportune ipotesi.

Quella più significativa è la **la condizione di non anticipazione (NA)**.

**Definizione 5.6.** Diciamo che la funzione stocastica  $G : [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa alla condizione di non anticipazione se  $\forall t \in [t_0, T]$   $G(t, \cdot)$  è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}_{[t_0, t]} = \sigma(\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq t\})$ , ossia rispetto alla  $\sigma$ -algebra generata dai  $W_\tau$  con  $\tau \in [t_0, t]$ .

Facciamo qualche esempio di funzioni non anticipanti definite in  $[t_0, T] \times \Omega$ :

- $G(t, \omega) = G(t)$ , cioè  $G$  non dipende da  $\omega$ ;
- $G(t, \omega) = W_t(\omega)$ ;
- $G(t, \omega) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |W_\tau(\omega)|$ .

Un esempio di funzione anticipante è

$$H(t, \omega) = \max_{t_0 \leq \tau \leq 2t} |W_\tau(\omega)|.$$

**Osservazione 5.2.** Richiedere che la funzione  $G(t, \cdot)$  sia non anticipante equivale a richiedere che la variabile casuale  $G(t, \cdot)$  sia indipendente da  $W_s - W_t$  con  $s > t$ , ossia che sia indipendente dalla storia futura del processo di Wiener e che quindi non dia anticipazioni su ciò che accadrà in futuro per il processo di Wiener. Questa osservazione è conseguenza delle proprietà dei processi di Wiener per cui l'incremento  $W_s - W_t$  è indipendente da  $W_t = W_t - W_0$  se  $s > t$ .

Per definire l'integrale di Ito nel caso generale, oltre all'ipotesi di non anticipazione, aggiungeremo altre due assunzioni di carattere tecnico:

- a)  $\forall \omega \in \Omega$  è definito l'integrale di Lebesgue  $\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt$  e la funzione che ad ogni  $\omega \in \Omega$  associa l'integrale

$$\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \tag{5.2.1}$$

è una variabile casuale.

Se in particolare la funzione  $G(t, \omega)$  ha traiettorie continue o continue a tratti con probabilità 1, allora l'integrale nella (5.2.1) è un integrale di Riemann con probabilità 1;

b)

$$E \left( \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right) < +\infty, \quad (5.2.2)$$

ipotesi che è conseguenza del fatto che definiremo l'integrale di Ito come limite in media quadratica.

**Osservazione 5.3.** Dalla condizione b) discende:

$$\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt < +\infty \quad \text{con probabilità } 1,$$

ossia la funzione  $G(\cdot, \omega) \in L^2([t_0, T])$  con probabilità 1.

Si potrebbe infatti provare la seguente proposizione:

**Proposizione 5.2.** *Sia  $X$  una variabile casuale non negativa sommabile sull'evento  $A$ , cioè tale che*

$$\int_A X dP < +\infty.$$

Allora

$$X < +\infty \quad \text{quasi sicuramente in } A.$$

Denotiamo con  $\mathcal{V}$  la classe delle funzioni stocastiche non anticipanti soddisfacenti alle condizioni a) e b).

Noi definiremo l'integrale di Ito per funzioni appartenenti alla classe  $\mathcal{V}$ .

- Consideriamo in primo luogo il caso particolare in cui la funzione stocastica  $G \in \mathcal{V}$  sia semplice elementare rispetto a  $t$ , ossia che esista una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G(t, \omega) = g_j(\omega) \quad \text{se } t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.3)$$

dove le variabili casuali  $g_j$  si suppongono limitate e misurabili rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{I}_{[t_0, t_{j-1}]}$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ , dovendo essere  $G$  non anticipante.

**Osservazione 5.4.** La forma di  $G$  e l'ipotesi di limitatezza di  $g_j$  per  $j = 1, 2, \dots, n$  assicurano che sono soddisfatte le proprietà a) e b).

Infatti, essendo  $G$  semplice elementare rispetto a  $t$ ,  $\forall \omega \in \Omega$  esiste l'integrale di

Lebesgue  $\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt$  e coincide con l'integrale di Riemann dato da:

$$\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt = \sum_{j=1}^n g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1}).$$

Tale integrale è una combinazione lineare di variabili casuali e dunque è una variabile casuale (proprietà a)). Inoltre per la limitatezza delle  $g_j$  deduciamo che

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \leq M \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Ciò implica per le proprietà relative all'integrazione rispetto alla misura di probabilità  $P$  delle variabili casuali

$$E \left( \int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt \right) \leq E(M) = M < +\infty,$$

ossia è soddisfatta anche la proprietà b).

**Definizione 5.7.** *Definiamo integrale di Ito della funzione stocastica semplice elementare  $G \in \mathcal{V}$ , soddisfacente la (5.2.3), rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:*

$$I_G(\omega) = \int_{t_0}^T G(t, \omega) dW_t = \sum_{j=1}^n g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)) \text{ con probabilità } 1. \quad (5.2.4)$$

E' evidente che l'integrale così definito è una variabile casuale. Nel seguito potremo anche omettere la dipendenza da  $\omega$ .

Vediamo di stabilire alcune proprietà dell'integrale di Ito per funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}$ .

I) Linearità

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall G_1, G_2$ , funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T (c_1 G_1(t, \omega) + c_2 G_2(t, \omega)) dW_t = \\ & = c_1 \int_{t_0}^T G_1(t, \omega) dW_t + c_2 \int_{t_0}^T G_2(t, \omega) dW_t \text{ con probabilità } 1. \end{aligned}$$

La dimostrazione è immediata per la linearità della somma.

II) Formula del valore medio

$\forall G$  funzione stocastica semplice elementare  $\in \mathcal{V}$

$$E(I_G) = 0.$$

Dimostrazione

Per la definizione (5.2.4) e la linearità del valore atteso, abbiamo:

$$E(I_G) = E\left(\sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) = \sum_{j=1}^n E(g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})). \quad (5.2.5)$$

Ma per l'ipotesi di non anticipazione le variabili casuali  $g_j$  e  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  risultano indipendenti per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Dalla (5.2.5) otteniamo allora

$$E(I_G) = \sum_{j=1}^n E(g_j) E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che il valore atteso degli incrementi di un processo di Wiener è nullo.

III)

$$E(I_G^2) = E\left(\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt\right).$$

Dimostrazione

Per la definizione (5.2.4)

$$\begin{aligned} E(I_G^2) &= E\left(\left\{\sum_{j=1}^n g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right\}^2\right) = \\ &= E\left(\sum_{j=1}^n g_j^2 (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 + 2 \sum_{i < j=1}^n g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right). \end{aligned}$$

Ora teniamo presente la linearità del valore atteso, l'indipendenza delle variabili casuali  $g_j$  e  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  e l'indipendenza di  $g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$  da  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  per  $i < j$ . Perciò otteniamo:

$$\begin{aligned} E(I_G^2) &= \sum_{j=1}^n E(g_j^2) E((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2) + \\ &+ 2 \sum_{i < j=1}^n E(g_i g_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})) E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$E((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2) = t_j - t_{j-1}, \quad E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

per le proprietà di un processo di Wiener e quindi

$$\begin{aligned} E(I_G^2) &= \sum_{j=1}^n E(g_j^2(\omega))(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n E(g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1})) = \\ &= E\left(\sum_{j=1}^n g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1})\right) = E\left(\int_{t_0}^T |G(t, \omega)|^2 dt\right). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto presente che la funzione  $G^2(\cdot, \omega)$  è una funzione semplice elementare rispetto al tempo per ogni  $\omega$  fissato in  $\Omega$  e dunque

$$\sum_{j=1}^n g_j^2(\omega)(t_j - t_{j-1})$$

è il suo integrale di Riemann sull'intervallo  $[t_0, T]$  che, come osservato in precedenza, risulta finito  $\forall \omega \in \Omega$ , essendo le variabili casuali  $g_j$  limitate. La relazione III) risulta così dimostrata.

**Osservazione 5.5.** Dalla proprietà III segue che se  $G$  è una funzione semplice elementare in  $\mathcal{V}$ , allora  $I_G \in L^2(\Omega)$ .

Prima di affrontare il caso di una funzione stocastica  $G \in \mathcal{V}$  di forma generale, è opportuno enunciare alcune proprietà sulle successioni di variabili casuali su uno spazio di probabilità.

Anche per le successioni di variabili casuali sussiste il teorema della convergenza dominata che si dimostra seguendo lo stesso metodo che si utilizza nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

**Teorema 5.1. Teorema della convergenza dominata.** *Siano  $Y$  una variabile casuale non negativa sommabile sull'evento  $A$  e  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una successione di variabili casuali tali che*

i)

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad q. s. \text{ in } A.$$

Allora  $X$  è sommabile su  $A$  e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP.$$

Ovviamente se  $A = \Omega$  l'ultima parte della tesi del teorema si può scrivere nella forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X).$$

Il teorema ammette il seguente corollario.

**Corollario 5.1.** *Siano  $A$  un evento e  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una successione di variabili casuali tale che*

i)

$$|X_n(\omega)| \leq M \quad \forall \omega \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{con } M = \text{costante} > 0;$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \quad \text{q. s. in } A.$$

Allora  $X$  è sommabile su  $A$  e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP.$$

Introduciamo ora la seguente definizione.

**Definizione 5.8.** *Diciamo che la successione di variabili casuali  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , è una successione di Cauchy in media quadratica se  $X_n \in L^2(\Omega) \forall n \in \mathbb{N}$  ed inoltre*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

*risulta*

$$E(|X_n - X_m|^2) < \epsilon.$$

E' facile verificare che se una successione  $X_n$  converge in media quadratica alla variabile casuale  $X$  è una successione di Cauchy in media quadratica. Ma è possibile provare anche il viceversa:

**Proposizione 5.3.** *Se  $X_n$  è una successione di Cauchy in media quadratica, allora esiste una variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$  tale che*

$$mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X, \quad \text{ossia} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|^2) = 0.$$

La proposizione 5.3 ci dice che lo spazio vettoriale normato  $L^2(\Omega)$ , con norma  $\|X\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{E(|X|^2)}$ , è completo. Dunque  $L^2(\Omega)$  è uno spazio di Banach. Questo risultato si può in effetti estendere ad ogni spazio  $L^p(\Omega)$  con  $p \geq 1$ .

Prima di dare la definizione generale di integrale stocastico di Ito, enunciamo il seguente

**Lemma 5.1.** *Sia  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}$ . Allora esiste una successione  $G_n(t, \omega)$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right) = 0. \quad (5.2.6)$$

Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare il lemma nel caso in cui  $G \in \mathcal{V}$  sia limitata e tale che  $G(\cdot, \omega)$  sia continua in  $[t_0, T]$  per ogni  $\omega \in \Omega$ .

A tal fine per ogni intero positivo  $n$  consideriamo una partizione dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti equidistanti  $t_0 < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$  per cui

$$t_j^{(n)} = t_0 + \frac{j}{n} (T - t_0) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ora approssimiamo  $G$  con la successione di funzioni semplici elementari così definite:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G_n(t, \omega) = G(t_{j-1}^{(n)}, \omega) \quad \text{se } t_{j-1}^{(n)} \leq t < t_j^{(n)} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Figura 5.2

E' immediato verificare che, fissato arbitrariamente  $\omega$  in  $\Omega$ , grazie alla continuità di  $G$  rispetto a  $t$ , per  $n \rightarrow +\infty$  la successione  $G_n(\cdot, \omega)$  converge uniformemente a  $G(\cdot, \omega)$ , ossia

$$\forall \omega \text{ fissato in } \Omega \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{[t_0, T]} |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)| = 0.$$

D'altra parte, come è noto dalla teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, la convergenza uniforme implica la convergenza in  $L^2([t_0, T])$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt = 0 \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (5.2.7)$$

Ma, essendo  $G$  limitata e quindi anche  $G_n$ , si ha che

$$\exists M > 0 \quad \text{tale che} \quad \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \leq M \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per il corollario del teorema della convergenza dominata si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left( \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right) dP = 0,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \int_{t_0}^T |G_n(t, \omega) - G(t, \omega)|^2 dt \right) = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

Diamo ora la definizione di integrale di Ito nel caso generale.

**Definizione 5.9.** *Se  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}$ , si definisce l'integrale stocastico di Ito di  $G$  rispetto a  $W_t$  da  $t_0$  a  $T$  nel modo seguente:*

$$I_G := \int_{t_0}^T G(t, \cdot) dW_t = mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T G_n(t, \cdot) dW_t, \quad (5.2.8)$$

dove  $G_n$  è una successione di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}$  tale che sia soddisfatta la condizione (5.2.6).

**Osservazione 5.6.** La definizione data è ben posta. Infatti è facile provare che il limite (5.2.8) esiste grazie al lemma 5.1, alla proprietà III) dell'integrale di Ito delle funzioni stocastiche semplici ed alla completezza di  $L^2(\Omega)$ .

Vediamo di verificarlo.

Il lemma 5.1 assicura l'esistenza di una successione  $G_n$  di funzioni stocastiche semplici elementari in  $\mathcal{V}$  che soddisfa alla condizione (5.2.6).

Mostriamo che la successione

$$\int_{t_0}^T G_n dW_t$$

è di Cauchy in media quadratica.

In primo luogo notiamo che  $\int_{t_0}^T G_n dW_t \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  per la proprietà III)

dell'integrale di Ito delle funzioni stocastiche semplici.

Inoltre facciamo vedere che

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

risulta

$$E \left( \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right) < \epsilon.$$

A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} E \left( \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right) &= E \left( \left\{ \int_{t_0}^T (G_n - G_m) dW_t \right\}^2 \right) = \\ &= E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G_m|^2 dt \right), \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la proprietà III).

Nel seguito, per brevità, ometteremo la dipendenza da  $\omega$ , ma è sottinteso che tutto ciò che scriveremo vale  $\forall \omega \in \Omega$ .

Aggiungendo e togliendo  $G$  nella relazione precedente, deduciamo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T |G_n - G_m|^2 dt &= \int_{t_0}^T |(G_n - G) + (G - G_m)|^2 dt = \\ &= \| (G_n - G) + (G - G_m) \|_{L^2([t_0, T])}^2. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Ma per la disuguaglianza triangolare:

$$\| (G_n - G) + (G - G_m) \|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq (\| G_n - G \|_{L^2([t_0, T])} + \| G - G_m \|_{L^2([t_0, T])})^2.$$

Inoltre se si tiene presente la disuguaglianza di Cauchy:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

si ottiene:

$$\| (G_n - G) + (G - G_m) \|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq 2 \left( \| G_n - G \|_{L^2([t_0, T])}^2 + \| G - G_m \|_{L^2([t_0, T])}^2 \right).$$

Allora

$$\begin{aligned} E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G_m|^2 dt \right) &\leq \\ 2 \left[ E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G|^2 dt \right) + E \left( \int_{t_0}^T |G_m - G|^2 dt \right) \right] &= \\ 2 E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G|^2 dt \right) + 2 E \left( \int_{t_0}^T |G_m - G|^2 dt \right). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

D'altra parte grazie alla (5.2.6)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

risulta

$$E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G|^2 dt \right), E \left( \int_{t_0}^T |G_m - G|^2 dt \right) < \frac{\epsilon}{4}. \quad (5.2.12)$$

Tenendo conto della (5.2.12), la (5.2.11), fornisce:

$$E \left( \int_{t_0}^T |G_n - G_m|^2 dt \right) < \epsilon \quad \forall n, m > n_\epsilon. \quad (5.2.13)$$

Ricordando poi la (5.2.9), deduciamo che

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ tale che } \forall n, m > n_\epsilon$$

si ha

$$E \left( \left| \int_{t_0}^T G_n dW_t - \int_{t_0}^T G_m dW_t \right|^2 \right) < \epsilon,$$

per cui concludiamo che la successione

$$\int_{t_0}^T G_n dW_t$$

è di Cauchy in media quadratica. Ma allora per la proposizione 5.3 esiste una variabile casuale  $X \in L^2(\Omega)$  tale che

$$mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T G_n(t, \cdot) dW_t = X.$$

$X$  è appunto l'integrale stocastico di Ito di  $G$ .

Si potrebbe anche mostrare che la definizione data è indipendente dalla scelta della successione  $G_n$ .

**Osservazione 5.7.** Da quanto detto nell'osservazione 5.6, risulta che l'integrale stocastico di Ito è una variabile casuale appartenente a  $L^2(\Omega)$ .

### 5.3 Esempio di calcolo di un integrale stocastico.

Ci proponiamo ora, come esempio, di calcolare il seguente integrale stocastico:

$$\int_0^T W_t dW_t \quad (5.3.1)$$

dove dunque  $G(t, \omega) = W_t(\omega) \quad \forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ .

Dobbiamo in primo luogo provare che  $W_t \in \mathcal{V}$  relativamente all'intervallo  $[0, T]$ . Infatti osserviamo che  $W_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$   $\forall t \in [t_0, T]$  e dunque soddisfa alla proprietà di non anticipazione. Inoltre le sue traiettorie sono continue rispetto al tempo per cui  $\forall \omega \in \Omega$  è definito l'integrale di Lebesgue  $\int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt$  ed è un integrale di Riemann. Infine è soddisfatta anche la condizione:

$$E \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) < +\infty,$$

poiché

$$E \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) = \int_{\Omega} \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) dP$$

e, come si può provare, è possibile scambiare l'integrale su  $\Omega$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  con l'integrale rispetto al tempo per cui:

$$\begin{aligned} E \left( \int_0^T |W_t(\omega)|^2 dt \right) &= \int_0^T \left( \int_{\Omega} |W_t(\omega)|^2 dP \right) dt \\ &= \int_0^T E(W_t^2) dt = \int_0^T t dt = \frac{1}{2} T^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Allora possiamo definire l'integrale stocastico di  $W_t$  rispetto a  $W_t$  da 0 a  $T$ .

Conformemente a quanto avevamo visto nel paragrafo 3 nel caso di una funzione stocastica continua rispetto a  $t$ , suddividiamo l'intervallo  $[0, T]$  in  $n$  intervalli di uguale ampiezza mediante la partizione  $\Pi$  ottenuta mediante i punti  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  per cui

$$t_j = \frac{j}{n} T \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Per semplicità di scrittura abbiamo indicato con  $t_j$  ciò che prima avevamo denotato con  $t_j^{(n)}$ .

Consideriamo poi la successione  $W_n(t, \omega)$  con  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall \omega \in \Omega \quad W_n(t, \omega) = W_{t_{j-1}}(\omega) \quad \text{se } t_{j-1} \leq t < t_j.$$

Verifichiamo che la successione  $W_n$  di funzioni stocastiche semplici elementari appartenenti alla classe  $\mathcal{V}$  è tale che :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) = 0.$$

Infatti

$$E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) = \int_{\Omega} \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) dP.$$

Ma

$$\int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |W_{t_{j-1}}(\omega) - W_t(\omega)|^2 dt$$

per cui

$$E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} |W_{t_{j-1}}(\omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) dP.$$

Se scambiamo l'integrale su  $\Omega$  rispetto alla misura di probabilità  $P$  con gli integrali rispetto al tempo otteniamo:

$$E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} E((W_t - W_{t_{j-1}})^2) dt.$$

Per una proprietà degli incrementi di un processo di Wiener che abbiamo già sfruttato numerose altre volte otteniamo:

$$\begin{aligned} E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(t_j - t_{j-1})^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} = \frac{T^2}{2n}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \int_0^T |W_n(t, \omega) - W_t(\omega)|^2 dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{2n} = 0,$$

come ci proponevamo di dimostrare.

A questo punto applichiamo la definizione di integrale stocastico di Ito:

$$\int_0^T W_t dW_t = mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T W_n dW_t.$$

Ma, essendo  $W_n$  funzioni stocastiche semplici elementari,

$$\int_0^T W_n dW_t = \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Posto per semplicità

$$S_n = \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}),$$

in base alla definizione di integrale stocastico di Ito, dobbiamo calcolare il limite in media quadratica di  $S_n$ , ossia  $mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

A tal fine poniamo:

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} = \Delta W_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tenendo presente che:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

possiamo scrivere:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{(W_{t_{j-1}} + \Delta W_j)^2 - (W_{t_{j-1}})^2 - (\Delta W_j)^2\}.$$

Ma, essendo  $W_{t_{j-1}} + \Delta W_j = W_{t_j}$  deduciamo:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{W_{t_j}^2 - (W_{t_{j-1}})^2 - (\Delta W_j)^2\} = \\ &= \frac{1}{2} (W_{t_1}^2 - W_{t_0}^2 + W_{t_2}^2 - W_{t_1}^2 + \dots + W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente che  $t_0 = 0$  e che  $W_0 = 0$ .

A questo punto otteniamo che

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2.$$

Per determinare  $mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2$ , calcoliamo

$$E \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 \right) = \sum_{j=1}^n E((\Delta W_j)^2) = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = t_n - t_0 = T.$$

Questo risultato ci suggerisce che potrebbe essere

$$mq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 = T,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right) = 0.$$

Verifichiamolo.

$$\begin{aligned} & E \left( \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right) = \\ & = E \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^4 + 2 \sum_{i < j=1}^n (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 \right) = \\ & = \sum_{j=1}^n E((\Delta W_j)^4) + 2 \sum_{i < j=1}^n E((\Delta W_i)^2) E((\Delta W_j)^2) + \\ & + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n E((\Delta W_j)^2), \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

dove abbiamo sfruttato l'indipendenza degli incrementi.

D'altra parte, se teniamo presente che gli incrementi di un processo di Wiener hanno distribuzione gaussiana, grazie ad una proprietà dei momenti di ordine pari per una distribuzione gaussiana con media nulla, si ha

$$E((\Delta W_j)^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k} \quad \text{con } \sigma \text{ deviazione standard.}$$

Allora  $E((\Delta W_j)^4)$  si ottiene dalla formula scritta sopra ponendo  $k = 2$  e tenendo presente che  $\sigma^2 = t_j - t_{j-1} = \frac{T}{n}$ . Dunque:

$$E((\Delta W_j)^4) = 3 \frac{T^2}{n^2}.$$

Andando a sostituire nella (5.3.2) e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E \left( \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right) &= \\
 &= 3 \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} + 2 \sum_{i < j=1}^n (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \\
 &= 3 \sum_{j=1}^n \frac{T^2}{n^2} + 2 \sum_{i < j=1}^n \frac{T}{n} \cdot \frac{T}{n} + T^2 - 2T \sum_{j=1}^n \frac{T}{n} = \\
 &= 3n \frac{T^2}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{T^2}{n^2} + T^2 - 2Tn \frac{T}{n} = \\
 &= 3 \frac{T^2}{n} + T^2 - \frac{T^2}{n} + T^2 - 2T^2 = 2 \frac{T^2}{n},
 \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \left( \sum_{j=1}^n (\Delta W_j)^2 - T \right)^2 \right) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{n} = 0.$$

In conclusione otteniamo:

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

Più in generale si ha:

$$\int_{t_0}^T W_t dW_t = \frac{1}{2} (W_T^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (T - t_0).$$

La formula ottenuta è differente dal calcolo integrale classico, se andiamo a considerare un analogo integrale di Riemann-Stieltjes.

Sia  $x(t)$  una funzione reale, definita sull'intervallo  $[t_0, T]$ , a variazione limitata, derivabile e con derivata integrabile secondo Riemann sull'intervallo di definizione. Grazie alla derivabilità, la funzione risulta continua e quindi integrabile secondo Riemann su  $[t_0, T]$ .

Sotto tali ipotesi esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes :

$$\int_{t_0}^T x(t) dx(t)$$

ed è esprimibile come un integrale di Riemann

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^T x(t) dx(t) &= \int_{t_0}^T x(t) x'(t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (x^2(t)) dt = \frac{1}{2} (x^2(T) - x^2(t_0)).
 \end{aligned}$$

Se confrontiamo tale risultato con quello ottenuto per l'integrale stocastico di Ito, vediamo che in quest'ultimo abbiamo in più il termine:  $-\frac{1}{2}(T - t_0)$ .

## 5.4 Proprietà dell'integrale stocastico di Ito.

**Proposizione 5.4.** *Per l'integrale stocastico di Ito valgono le seguenti proprietà:*

- *Linearità:*

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall G_1, G_2 \in \mathcal{V} \\ \int_{t_0}^T (c_1 G_1 + c_2 G_2) dW_t = c_1 \int_{t_0}^T G_1 dW_t + c_2 \int_{t_0}^T G_2 dW_t \quad q.s.;$$

- *Additività rispetto all'intervallo di integrazione*

$$\forall G \in \mathcal{V} \quad \forall s : t_0 \leq s \leq T \quad \int_{t_0}^T G dW_t = \int_{t_0}^s G dW_t + \int_s^T G dW_t \quad q.s.;$$

- *Formula del valore atteso:*

$$\forall G \in \mathcal{V} \quad E \left( \int_{t_0}^T G dW_t \right) = 0;$$

- *Formula di correlazione:*

$$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{V} \quad E \left( \int_{t_0}^T G_1 dW_t \cdot \int_{t_0}^T G_2 dW_t \right) = E \left( \int_{t_0}^T G_1 \cdot G_2 dt \right)$$

dove gli integrali al primo membro sono integrali stocastici, mentre l'integrale al secondo membro è un integrale di Riemann o di Lebesgue.

Dalla formula di correlazione, ponendo  $G_1 = G_2 = G$ , si ottiene la

- *Formula della media quadratica:*

$$E \left( \left( \int_{t_0}^T G dW_t \right)^2 \right) = E \left( \int_{t_0}^T |G|^2 dt \right).$$

Per quanto riguarda la dimostrazione della proposizione, osserviamo che le proprietà di linearità, del valor medio e della media quadratica le abbiamo già stabilite per funzioni stocastiche semplici elementari. Sempre per funzioni semplici elementari si potrebbe ottenere con facilità la proprietà di additività rispetto

all'intervallo di integrazione così come anche la formula di correlazione con argomentazioni analoghe a quelle fatte per provare la formula della media quadratica. Nel caso di una funzione stocastica generale le proprietà si ottengono da quelle per le funzioni semplici elementari con un passaggio al limite.

Per una data funzione  $G(t, \omega) \in \mathcal{V}$ , definita su  $[t_0, T] \times \Omega$ , introduciamo il seguente processo stocastico:

$$X_t(\omega) = \int_{t_0}^t G(\tau, \omega) dW_\tau(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Si può dimostrare il seguente teorema

**Teorema 5.2.** *Il processo stocastico  $X_t$  è una martingala rispetto alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ . Inoltre  $X_t$  ha traiettorie continue con probabilità 1.*

Dimostrazione

Diamo la dimostrazione solo della prima parte del teorema e limitatamente al caso di funzioni semplici elementari.

Supponiamo dunque che  $G(t, \omega)$  sia una funzione stocastica semplice elementare in  $\mathcal{V}$ , per cui esiste una partizione  $\Pi$  dell'intervallo  $[t_0, T]$  mediante i punti  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  tale che:

$$\forall \omega \in \Omega \quad G(t, \omega) = g_j(\omega) \quad \text{per } t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Per dimostrare che  $X_t$  è una martingala dobbiamo far vedere che:

- 1)  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ ;
- 2)  $E(|X_t|) < +\infty \quad \forall t \in [t_0, T]$ ;
- 3)  $E(X_t | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) = X_s \quad q.s. \quad \forall s, t \in [t_0, T] \quad \text{con } s < t.$

Proviamo 1).

Osserviamo che, considerata la partizione  $\Pi$ , si possono avere due casi: o  $t$  è un punto della partizione oppure non lo è, cioè  $\exists \bar{j} \in \{1, 2, \dots, n\}$  tale che  $t = t_{\bar{j}}$  oppure  $t_{\bar{j}-1} < t < t_{\bar{j}}$ .

Nel primo caso avremo

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Nel secondo caso aggiungiamo  $t$  come punto in più nella partizione e lo denotiamo  $t_{\bar{j}}$ . Dunque ora la partizione è ottenuta mediante i punti:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{\bar{j}} = t < \dots < t_{n+1} = T.$$

Con questo artificio otteniamo ancora

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^{\bar{j}} g_j(\omega) (W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Poiché  $\mathcal{I}_{[t_0, t]} = \sigma\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq t\}$  e  $t_j \leq t$  per  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , abbiamo che  $W_{t_j}$  e  $W_{t_{j-1}}$  sono misurabili rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$  e quindi è misurabile anche la loro differenza, ossia  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  è variabile casuale rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$ . Ma anche  $g_j$  per  $j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ , grazie alla condizione di non anticipazione, è variabile casuale, ossia è misurabile, rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$ . Allora qualunque sia  $t \in [t_0, T]$ ,  $X_t$  è variabile casuale rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, t]}$  perché è la somma di prodotti di variabili casuali rispetto a tale  $\sigma$ -algebra. Dunque  $X_t$  è adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ .

Dimostriamo la 2). Osserviamo che, per quanto visto nel punto precedente, possiamo scrivere che preso,  $t \in [t_0, T]$ ,

$$|X_t(\omega)| \leq \sum_{j=1}^{\bar{j}} |g_j(\omega)| |W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)|,$$

per cui

$$E(|X_t|) \leq \sum_{j=1}^{\bar{j}} E(|g_j| |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|),$$

grazie alle proprietà del valore atteso.

Ma, essendo  $g_j$  indipendente da  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ , otteniamo:

$$E(|X_t|) \leq \sum_{j=1}^{\bar{j}} E(|g_j|) E(|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|) \leq M \sum_{j=1}^{\bar{j}} E(|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|),$$

dove  $M$  è una costante positiva la cui esistenza è assicurata dalla limitatezza delle  $g_j$ .

Se poi teniamo presente che

$$|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}| \leq |W_{t_j}| + |W_{t_{j-1}}|$$

e che, per definizione di moto di Wiener  $E(|W_t|) < +\infty \quad \forall t$ , deduciamo:

$$E(|X_t|) \leq M \sum_{j=1}^{\bar{j}} (E(|W_{t_j}|) + E(|W_{t_{j-1}}|)) < +\infty,$$

come volevamo dimostrare.

Infine dimostriamo la 3) o meglio dimostriamo la proprietà equivalente:

$$E(X_t - X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) = 0 \quad q.s. \quad \forall s, t \in [t_0, T] \quad \text{con } s < t.$$

Tale proprietà è equivalente alla 2) perché, essendo  $X_t$  adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{I}_{[t_0, t]}\}_{t \in [t_0, T]}$ , si ha che  $X_s$  è variabile casuale rispetto a  $\mathcal{I}_{[t_0, s]}$  e quindi

$$E(X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) = X_s.$$

Se consideriamo ancora, come nel punto 1) la partizione  $\Pi$ , può avvenire che  $s$  e  $t$  siano punti della partizione oppure che non lo siano. In quest'ultimo caso possiamo sempre aggiungerli alla partizione.

Allora assumiamo che  $s = t_{n_1}$ ,  $t = t_{n_2}$  con  $n_2 > n_1$ . Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \sum_{j=1}^{n_2} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) - \sum_{j=1}^{n_1} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \\ &= \sum_{j=n_1+1}^{n_2} g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned}$$

Grazie alla linearità dell'aspettativa condizionata deduciamo

$$E(X_t - X_s | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} E(g_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathcal{I}_{[t_0, s]}).$$

Ma poiché l'indice  $j$  nella somma scritta sopra va da  $n_1 + 1$  a  $n_2$ , abbiamo che  $t_{j-1} \geq s$  e  $t_j > s$  per cui, a causa dell'indipendenza degli incrementi del processo di Wiener, gli incrementi  $(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$  per  $j = (n_1 + 1), \dots, n_2$  sono indipendenti dagli incrementi  $W_\tau = W_\tau - W_0$  per  $t_0 \leq \tau \leq s$ . Essendo  $\mathcal{I}_{[t_0, s]} = \sigma(\{W_\tau : t_0 \leq \tau \leq s\})$ , la  $\sigma$ -algebra generata da ogni incremento  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  per  $j = (n_1 + 1), \dots, n_2$  è indipendente da  $\mathcal{I}_{[t_0, s]}$ . D'altra parte, come sappiamo, per la condizione di non anticipazione,  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  è indipendente dal corrispondente  $g_j$ . A questo punto possiamo applicare la seguente proprietà dell'aspettativa condizionata che non abbiamo menzionato in precedenza:

**Proposizione 5.5.** *Siano date le variabili casuali sullo stesso spazio di probabilità  $X, Y$  e la struttura informativa  $\mathcal{I}$ . Se  $Y$  è indipendente da  $X$  e  $\sigma(Y)$  è indipendente da  $\mathcal{I}$ , allora:*

$$E(XY | \mathcal{I}) = E(X | \mathcal{I}) E(Y).$$

Utilizzando tale proprietà, possiamo scrivere

$$\sum_{j=n_1+1}^{n_2} E(g_j(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} E(g_j | \mathcal{I}_{[t_0, s]}) E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = 0,$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il valore atteso degli incrementi di un processo di Wiener è nullo.

Abbiamo perciò dimostrato che, nel caso di funzioni semplici elementari,  $X_t$  è una martingala.

Il risultato ottenuto si può estendere a funzioni stocastiche generali mediante un passaggio al limite.



# Capitolo 6

## Calcolo differenziale stocastico

### 6.1 Differenziale stocastico.

In ambiente stocastico non c'è una definizione formale di derivata. Il differenziale stocastico acquista significato solo in virtù dell'integrale stocastico di Ito.

**Definizione 6.1.** Sia  $X_t$  un processo stocastico definito in  $[t_0, T]$  soddisfacente  $\forall t \in [t_0, T]$  alla relazione seguente con probabilità 1:

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t F(\tau, \omega) d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau, \omega) dW_\tau \quad (6.1.1)$$

dove  $F$  è una funzione reale non anticipante tale che  $\int_{t_0}^t |F(\tau, \omega)| d\tau < +\infty$  quasi sicuramente  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $G$  è una funzione reale che appartiene alla classe  $\mathcal{V}$  (relativamente all'intervallo  $[t_0, T]$ ) e  $X_{t_0}$  è una variabile casuale rispetto a  $\mathcal{I}_{t_0} = \sigma(W_{t_0})$ .

Diremo allora che  $X_t$  ha differenziale stocastico dato da:

$$dX_t = F(t, \cdot) dt + G(t, \cdot) dW_t. \quad (6.1.2)$$

E' da rilevare che il differenziale stocastico è solo una scrittura simbolica per esprimere la relazione (6.1.1) in maniera più compatta.

#### Esempio 6.1.

Riprendiamo l'esempio di calcolo di un integrale stocastico del Capitolo precedente:

$$\int_{t_0}^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(T - t_0).$$

Indicato  $T$  con  $t$  e la variabile d'integrazione con  $\tau$ , possiamo scrivere:

$$W_t^2 = W_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t d\tau + 2 \int_{t_0}^t W_\tau dW_\tau.$$

Per la definizione di differenziale stocastico (6.1.2) si ha:

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t.$$

Si noti che nell'analisi classica manca il primo termine, mentre è presente un termine analogo al secondo:

$$d(x^2) = 2x dx.$$

Quando la funzione  $G$  è identicamente nulla, si ha il caso **non stocastico**.

Enunciamo ora per il calcolo differenziale stocastico l'analogo del teorema di derivazione delle funzioni composte del calcolo differenziale classico.

**Teorema 6.1.** *Sia  $X_t$  un processo stocastico definito in  $[t_0, T]$  avente il differenziale stocastico:*

$$dX_t = F(t, \cdot) dt + G(t, \cdot) dW_t.$$

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U$ ,  $\partial_x U$ ,  $\partial_{xx}^2 U$  continue. Allora vale la formula di Ito:*

$$\begin{aligned} U(t, X_t) &= U(t_0, X_{t_0}) + \\ &+ \int_{t_0}^t \left\{ \partial_\tau U(\tau, X_\tau) + F(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2} G^2(\tau, \cdot) \partial_{xx}^2 U(\tau, X_\tau) \right\} d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t G(\tau, \cdot) \partial_x U(\tau, X_\tau) dW_\tau \end{aligned}$$

con probabilità 1 e con  $t_0 \leq t \leq T$ .

In altri termini, se indichiamo con  $Y_t$  il processo stocastico  $Y_t := U(t, X_t)$ , questo ha differenziale stocastico dato da

$$\begin{aligned} dY_t &= \left\{ \partial_t U(t, X_t) + F(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) + \frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) \right\} dt + \\ &+ G(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) dW_t. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

La (6.1.3), utilizzando la (6.1.2), si può anche scrivere nella forma:

$$dY_t = \partial_t U(t, X_t) dt + \partial_x U(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) dt. \quad (6.1.4)$$

Il caso analogo in Analisi Classica è tradotto dal seguente teorema:

**Teorema 6.2.** *Sia  $X(t)$  una funzione reale derivabile in  $[t_0, T]$ .*

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U, \partial_x U$  continue.*

*Posto  $Y(t) = U(t, X(t)) \quad \forall t \in [t_0, T]$ , si ha che  $Y$  è derivabile e quindi differenziabile in  $[t_0, T]$  e precisamente:*

$$dY(t) = \partial_t U(t, X(t)) dt + \partial_x U(t, X(t)) X'(t) dt. \quad (6.1.5)$$

La (6.1.5), tenendo presente che  $X'(t) dt = dX(t)$ , si può anche scrivere nella forma:

$$dY(t) = \partial_t U(t, X(t)) dt + \partial_x U(t, X(t)) dX(t). \quad (6.1.6)$$

Confrontando la (6.1.6) con la formula di Ito (6.1.4), vediamo che nel caso classico non compare l'ultimo termine  $\frac{1}{2} G^2(t, \cdot) \partial_{xx}^2 U(t, X_t) dt$ .

Ovviamente se  $X_t$  non è una funzione stocastica, poiché  $G \equiv 0$ , si ottiene dalla (6.1.4) la formula classica.

C'è un modo mnemonico per ricordare più rapidamente la formula (differenziale) di Ito.

La (6.1.4) si può infatti riscrivere in forma più compatta anche nella maniera seguente:

$$dY_t = \partial_t U(t, X_t) dt + \partial_x U(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(t, X_t) (dX_t)^2$$

dove  $(dX_t)^2 = G^2 dt$  e per calcolarlo si utilizzano le seguenti regole moltiplicative:

$\times$	$dW_t$	$dt$
$dW_t$	$dt$	0
$dt$	0	0

La formula di Ito ha la seguente generalizzazione al caso di più variabili

**Teorema 6.3.** *Siano  $X_t^{(i)}$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , processi stocastici con il differenziale stocastico dato da:*

$$dX_t^{(i)} = F_i(t, \cdot) dt + G_i(t, \cdot) dW_t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

*Inoltre sia  $U : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le derivate parziali  $\partial_t U, \partial_{x_i} U, \partial_{x_i x_j}^2 U$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) continue.*

Allora il processo stocastico  $Y_t = U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$  ha differenziale stocastico dato da:

$$\begin{aligned} dY_t = & \left\{ \partial_t U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) + \sum_{i=1}^n F_i(t, \cdot) \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_i(t, \cdot) G_j(t, \cdot) \partial_{x_i x_j}^2 U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \right\} dt + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^n G_i(t, \cdot) \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \right\} dW_t. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Il differenziale stocastico di  $Y_t$  si può anche scrivere nella forma compatta:

$$\begin{aligned} dY_t = & \partial_t U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dt + \\ & + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j}^2 U(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}, \end{aligned}$$

dove per il calcolo di  $dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}$  si seguono le stesse regole moltiplicative della tabella mostrata sopra.

## 6.2 Applicazioni della formula di Ito.

### • Polinomi

Ci proponiamo di calcolare il seguente differenziale stocastico:  $d(W_t^n)$ .

Applichiamo la formula di Ito ponendo:

$$U(t, x) = U(x) = x^n \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = U(W_t) = W_t^n.$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Ito (6.1.4) otteniamo:

$$\begin{aligned} d(W_t^n) = & \partial_t U(W_t) dt + \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt = \\ = & \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

dove abbiamo tenuto presente che  $U$  non dipende da  $t$ .

Poiché:

$$\partial_x U(x) = n x^{n-1}, \quad \partial_{xx}^2 U(x) = n(n-1) x^{n-2},$$

la (6.2.1) assume la forma:

$$d(W_t^n) = n W_t^{n-1} dW_t + \frac{1}{2} n(n-1) W_t^{n-2} dt.$$

Il primo termine compare anche nel calcolo classico, mentre il secondo è un termine aggiuntivo proprio del calcolo stocastico.

Infatti in ambito classico si ha

$$dx^n = n x^{n-1} dx.$$

A questo punto scriviamo l'espressione ottenuta in forma integrale:

$$W_t^n - W_{t_0}^n = \frac{1}{2} n(n-1) \int_{t_0}^t W_\tau^{n-2} d\tau + n \int_{t_0}^t W_\tau^{n-1} dW_\tau.$$

Ora poniamo  $n-1 = k$  e ricaviamo dalla relazione scritta sopra il secondo integrale a secondo membro:

$$\int_{t_0}^t W_\tau^k dW_\tau = \frac{1}{k+1} (W_t^{k+1} - W_{t_0}^{k+1}) - \frac{1}{2} k \int_{t_0}^t W_\tau^{k-1} d\tau.$$

Anche in tal caso abbiamo un termine analogo al caso classico (il primo) ed un termine aggiuntivo.

Dalla formula ottenuta possiamo dedurre un risultato che già avevamo ricavato. Infatti se poniamo  $k = 1$  otteniamo:

$$\int_{t_0}^t W_\tau dW_\tau = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (t - t_0).$$

### • Funzione esponenziale

Vogliamo calcolare il seguente differenziale stocastico:  $d(e^{W_t})$ .

Applichiamo la formula di Ito ponendo:

$$U(t, x) = U(x) = e^x \quad \text{e} \quad X_t = W_t \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t) = U(W_t) = e^{W_t}.$$

Inoltre

$$dX_t = dW_t \quad \text{e quindi} \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Dalla formula di Ito (6.1.4) otteniamo:

$$\begin{aligned} d(e^{W_t}) &= \partial_t U(W_t) dt + \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt = \\ &= \partial_x U(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t) dt, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

dove abbiamo tenuto presente che  $U$  non dipende da  $t$ .

Esplicitando le derivate otteniamo:

$$d(e^{W_t}) = e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt = e^{W_t} \left( dW_t + \frac{1}{2} dt \right).$$

Confrontando con il caso classico vediamo che è presente un termine aggiuntivo proprio del calcolo stocastico.

In forma integrale deduciamo:

$$e^{W_t} - e^{W_{t_0}} = \int_{t_0}^t e^{W_\tau} dW_\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{W_\tau} d\tau$$

che possiamo scrivere anche nella forma:

$$\int_{t_0}^t e^{W_\tau} dW_\tau = e^{W_t} - e^{W_{t_0}} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{W_\tau} d\tau.$$

### • Differenziale di un prodotto e formula di integrazione per parti

Ci proponiamo di calcolare il seguente differenziale stocastico:

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}),$$

dove  $X_t^{(1)}$ ,  $X_t^{(2)}$  sono due processi stocastici aventi differenziali stocastici:

$$dX_t^{(i)} = F_i(t, \cdot) dt + G_i(t, \cdot) dW_t, \quad i = 1, 2.$$

Dobbiamo utilizzare la formula di Ito nel caso di due variabili ( $n = 2$ ).

Poniamo

$$U(t, x_1, x_2) = U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \text{per cui} \quad U(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} X_t^{(2)}.$$

Per la formula di Ito:

$$\begin{aligned} d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) &= \partial_t U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dt + \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dX_t^{(i)} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 G_i(t, \cdot) G_j(t, \cdot) \partial_{x_i x_j}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) dt. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Procuriamoci le derivate:

$$\begin{aligned}\partial_t U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= 0, & \partial_{x_1} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= X_t^{(2)}, & \partial_{x_2} U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= X_t^{(1)}, \\ \partial_{x_i}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= 0 & \text{per } i &= 1, 2, \\ \partial_{x_1 x_2}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= \partial_{x_2 x_1}^2 U(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) &= 1.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione del differenziale (6.2.3) otteniamo:

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + G_1(t, \cdot) G_2(t, \cdot) dt. \quad (6.2.4)$$

Si osservi che l'ultimo termine a secondo membro rappresenta un termine aggiuntivo rispetto al caso classico.

Se per uno almeno dei due processi  $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$  si verifica il caso non stocastico, ossia se  $G_1$  o  $G_2 \equiv 0$ , si ottiene la formula classica.

Utilizzando la formula del differenziale di un prodotto possiamo ottenere la formula di integrazione per parti.

Infatti se esplicitiamo il differenziale stocastico (6.2.4), deduciamo

$$X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_{t_0}^{(1)} X_{t_0}^{(2)} = \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)} dX_\tau^{(1)} + \int_{t_0}^t X_\tau^{(1)} dX_\tau^{(2)} + \int_{t_0}^t G_1(\tau, \cdot) G_2(\tau, \cdot) d\tau,$$

da cui

$$\int_{t_0}^t X_\tau^{(1)} dX_\tau^{(2)} = X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_{t_0}^{(1)} X_{t_0}^{(2)} - \int_{t_0}^t X_\tau^{(2)} dX_\tau^{(1)} - \int_{t_0}^t G_1(\tau, \cdot) G_2(\tau, \cdot) d\tau.$$

### 6.3 Equazioni differenziali stocastiche.

Consideriamo ora in ambito stocastico il concetto analogo a quello di equazione differenziale ordinaria del I ordine in forma normale dell'Analisi Matematica classica.

Ricordiamo che un'equazione di tale tipo si presenta nel modo seguente:

$$x' = f(x, t)$$

dove la funzione incognita  $x(t)$  è a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  è una funzione assegnata di due o  $n + 1$  variabili, a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

Come abbiamo osservato in precedenza, per questa equazione svolge un ruolo molto importante il problema di Cauchy che si ottiene associando all'equazione stessa la condizione iniziale o di Cauchy:

$$x(t_0) = x_0.$$

Volendo introdurre nel calcolo stocastico un concetto analogo a quello di equazione differenziale ordinaria del calcolo classico, bisogna tenere presente che nel calcolo stocastico non si dà la definizione di derivata, ma solo quella di differenziale stocastico.

**Definizione 6.2.** *Si definisce equazione differenziale stocastica di Ito un'equazione della forma:*

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (6.3.1)$$

per la quale l'incognita è rappresentata dal processo stocastico  $X_t$ .

Un processo stocastico che verifichi la (6.3.1) viene detto *processo di Ito*.

Del processo stocastico  $X_t$  si devono determinare le traiettorie e le probabilità ad esse associate.

Per quanto riguarda le funzioni  $\mu$  e  $\sigma$ , il coefficiente  $\sigma$  è detto coefficiente di diffusione, mentre  $\mu$  è un coefficiente che descrive l'andamento del processo. Si assume che  $\mu$  e  $\sigma$  siano non anticipanti, cioè che, date le informazioni al tempo  $t$ , possono essere osservate (per esempio dagli operatori sul mercato se  $X_t$  è il prezzo di un'azione).

$W_t$  è un processo di Wiener adattato ad una opportuna famiglia di strutture informative  $\{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ .

Il termine  $dW_t$  rappresenta gli eventi imprevedibili che si verificano durante l'intervallo temporale infinitesimo  $dt$ .

All'equazione differenziale stocastica (6.3.1) si associa la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi,$$

dove  $\xi$  è una variabile casuale nota che rappresenta il valore del processo stocastico all'istante iniziale  $t_0$ ; per tale ragione  $\xi$  è detta **valore iniziale**.

La (6.3.1) unita alla condizione iniziale è un modo simbolico per scrivere:

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu(\tau, X_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau. \quad (6.3.2)$$

Come si vede dalla (6.3.2), trovare la soluzione di un'equazione differenziale stocastica di Ito significa determinarne la dipendenza dai valori passati e contemporanei del processo di Wiener.

Si noti che se  $\sigma = 0$ , l'unica influenza stocastica su  $X_t$  è quella esercitata dalla variabile casuale  $\xi$ .

Il processo stocastico incognito  $X_t$  può essere a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^n$

ed anche il processo di Wiener può essere a valori reali o a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Nel seguito ci limiteremo a considerare solo processi stocastici  $X_t$  e  $W_t$  a valori reali.

Per un'equazione stocastica di Ito si possono definire due tipi di soluzioni: **soluzioni forti** e **soluzioni deboli**.

- **soluzioni forti**

Il processo di Wiener è assegnato, cioè è **esogeno**;

- **soluzioni deboli**

Il processo di Wiener è incognito, cioè è **endogeno**, così come il processo stocastico  $X_t$ .

Noi ci occuperemo soltanto di soluzioni forti.

Per dare la definizione di soluzione forte, facciamo alcune premesse.

Indichiamo con  $\mathcal{I}_t$  la più piccola  $\sigma$ -algebra rispetto alla quale il valore iniziale  $\xi$  e le variabili casuali  $W_\tau$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$  siano misurabili. Si ha dunque che  $\mathcal{I}_t$  è indipendente dagli incrementi  $W_s - W_t$  con  $s > t$ , ossia più precisamente è indipendente dalle  $\sigma$ -algebre generate da tali incrementi. Analogamente il valore iniziale  $\xi$  è indipendente dagli incrementi  $W_s - W_{t_0}$  con  $s > t_0$ . Se  $\xi$  è costante con probabilità 1,  $\mathcal{I}_t$  coincide con la  $\sigma$ -algebra generata dai  $W_\tau$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$ , a meno di eventi con probabilità nulla.

Chiameremo  $(\Omega, P, \{\mathcal{I}_t\}_{t \geq t_0}, W_t, \xi)$  l'**assetto canonico del problema**.

**Definizione 6.3. Soluzione forte.** Una soluzione forte della (6.3.1) rispetto al prefissato processo di Wiener  $W_t$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, T]$  e con la condizione iniziale  $\xi$  è un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$  continuo rispetto a  $t$  tale che:

1)  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ , ossia è non anticipante,  $\forall t \in [t_0, T]$ ;

2)  $X_{t_0} = \xi$  con probabilità 1;

3)  $\int_{t_0}^T |\mu(\tau, X_\tau)| d\tau < +\infty$  e  $\int_{t_0}^T |\sigma(\tau, X_\tau)|^2 d\tau < +\infty$  con probabilità 1;

4)  $X_t$  verifica la (6.3.2)  $\forall t \in [t_0, T]$  con probabilità 1.

In altri termini, assegnate  $\mu$  e  $\sigma$ , solo  $\xi(\omega)$  e i valori di  $W_\tau(\omega)$  con  $t_0 \leq \tau \leq t$  determinano  $X_t(\omega)$  e ciò può avvenire in modo univoco, ai sensi della seguente

**Definizione 6.4. Unicità forte.** Se, ogni volta che  $X$  e  $\tilde{X}$  sono soluzioni forti nell'intervallo di tempo  $[t_0, T]$  della (6.3.1) rispetto allo stesso processo di Wiener e con la stessa condizione iniziale, vale  $P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = 1 \quad \forall t \in [t_0, T]$ , diremo che per la (6.3.1) vale l'unicità forte.

**Teorema 6.4. Esistenza e unicità della soluzione forte.** Assumiamo che esista una costante  $L > 0$  tale che  $\mu$  e  $\sigma$  verifichino le due seguenti condizioni:

$$i) \quad |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \forall x, y$$

**condizione di Lipschitzianità;**

$$ii) \quad |\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2) \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \forall x$$

**condizione di restrizioni sulla crescita.**

Inoltre  $\xi$  sia una variabile casuale indipendente dall'evoluzione futura del processo di Wiener, ossia da  $W_t - W_{t_0}$ ,  $t > t_0$ .

Allora esiste in  $[t_0, T]$  una soluzione forte della (6.3.1) con la condizione iniziale  $\xi$ . Si ha inoltre unicità della soluzione in senso forte.

La condizione di Lipschitzianità può anche essere scritta nella forma:

$$i') \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq L_\mu |x - y|, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L_\sigma |x - y|,$$

dove  $L_\mu, L_\sigma$  sono costanti positive, poiché dalla i') discende la i) con  $L = L_\mu + L_\sigma$ .

La dimostrazione del teorema di esistenza e unicità della soluzione forte è analoga a quella di Picard-Lindelöf per le equazioni differenziali ordinarie, in quanto si usa un metodo di approssimazioni successive per costruire una soluzione.

### Osservazione 6.1.

Si può dare la definizione di soluzione forte della (6.3.1) anche nell'intervallo  $[t_0, +\infty)$ . In tal caso si parla di **soluzione globale** (nel futuro).

Tale soluzione è il processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \geq t_0}$  continuo rispetto a  $t$  tale che:

1)  $X_t$  è misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$ , ossia è non anticipante,  $\forall t \geq t_0$

2)  $X_{t_0} = \xi$  con probabilità 1;

3)  $\int_{t_0}^t |\mu(\tau, X_\tau)| d\tau, \int_{t_0}^t |\sigma(\tau, X_\tau)|^2 d\tau < +\infty$  con probabilità 1  $\forall t \geq t_0$ ;

4)  $X_t$  verifica la (6.3.2)  $\forall t \geq t_0$  con probabilità 1.

Nell'ipotesi che per ogni  $\tilde{T} > t_0$  esista una costante positiva  $L_{\tilde{T}}$  tale che le condizioni i) e ii) del teorema 6.4 siano soddisfatte su ogni intervallo  $[t_0, \tilde{T}]$ , allora la (6.3.1) ammette una soluzione definita su tutta la semiretta reale  $[t_0, +\infty)$ , ossia una soluzione globale.

**Osservazione 6.2.**

Le ipotesi del teorema 6.4 sono condizioni sufficienti, ma non necessarie. Anche se non sono soddisfatte il problema può comunque avere soluzione, come vedremo dall'esempio 6.3.

Vediamo alcuni esempi.

**Esempio 6.2.**

Sia data l'equazione differenziale stocastica (6.3.1) con  $\mu(t, X_t) = \mu = \text{costante}$  e  $\sigma(t, X_t) = \sigma = \text{costante}$  cui associamo la condizione iniziale:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sigma dW_t \\ X_{t_0} &= \xi. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Il problema (6.3.3) è facilmente risolvibile  $\forall t \geq t_0$  ricorrendo alla corrispondente equazione integrale, ossia

$$X_t = \xi + \int_{t_0}^t \mu d\tau + \int_{t_0}^t \sigma dW_\tau,$$

da cui deduciamo

$$X_t = \xi + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0}) \quad \forall t \geq t_0.$$

Nel caso non stocastico, quando  $\sigma = 0$ , si ha

$$X_t = \xi + \mu(t - t_0).$$

Essendo il valore iniziale  $\xi$  una variabile stocastica,  $X_t$  ha traiettorie diverse in corrispondenza di ogni stato  $\omega \in \Omega$ . Precisamente per la forma di  $X_t$  vediamo che ogni traiettoria di  $X_t$  è una semiretta passante per il punto  $(t_0, \xi(\omega))$  ( $\omega \in \Omega$ ) con pendenza  $\mu$ . Dunque per  $\sigma = 0$  le traiettorie sono tutte semirette parallele tra loro (vedi la Figura 6.1)

Consideriamo un caso particolare, ponendo

$$\mu = 1, \quad \sigma = 0, \quad t_0 = 0, \quad \xi(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

In tal caso le traiettorie coincidono: abbiamo perciò un'unica traiettoria il cui grafico è una semiretta uscente dall'origine con pendenza 1 (vedi la Figura 6.1).  $X_t$  è dunque un processo deterministico.

Figura 6.1

Supponiamo ora inalterati gli altri dati del problema eccetto  $\sigma$  che prendiamo pari a 0,5.

Nella figura 6.2 sono rappresentate alcune traiettorie (approssimate) di  $X_t$  in corrispondenza di diverse traiettorie del processo di Wiener.

Figura 6.2

Le traiettorie si discostano dalla retta di pendenza 1 per una serie di oscillazioni casuali ed imprevedibili dovute al fatto che  $\sigma \neq 0$ .

**Osservazione 6.3.**

Tanto maggiore è  $\sigma$  tanto maggiore è lo scostamento delle traiettorie dall'andamento che ci si aspetterebbe per un processo deterministico.

Calcoliamo il valore atteso del processo stocastico  $X_t$  supponendo  $\xi$  costante:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\xi) + E(\mu(t - t_0)) + E(\sigma(W_t - W_{t_0})) = \\ &= \xi + \mu(t - t_0) + \sigma E(W_t - W_{t_0}) = \\ &= \xi + \mu(t - t_0). \end{aligned}$$

In media ci si aspetta che  $X_t$  segua l'andamento deterministico che si avrebbe in ambito classico.

### Esempio 6.3.

Consideriamo l'equazione stocastica di Ito non lineare:

$$\begin{aligned} dX_t &= dt + 2\sqrt{X_t}dW_t, \quad t \geq 0 \\ X_0 &= \xi, \end{aligned}$$

dove  $\xi$  è una variabile casuale non negativa.

La funzione  $\sigma(t, x) = 2\sqrt{x}$  non è lipschitziana in ogni insieme che contenga lo 0.

Tuttavia, anche se non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità, si può determinare una soluzione esplicita per questo problema, data da

$$X_t = (W_t + \sqrt{\xi})^2.$$

Verifichiamo che il processo stocastico  $X_t$  della forma scritta sopra è soluzione del problema utilizzando la formula di Ito.

Poniamo

$$U(t, x) = U(x) = x^2, \quad Z_t = W_t + \sqrt{\xi} = \sqrt{\xi} + \int_0^t dW_\tau$$

per cui  $dZ_t = dW_t$  e  $F \equiv 0$   $G \equiv 1$ .

Poiché  $X_t = U(Z_t)$ , per la formula di Ito si ha:

$$\begin{aligned} dX_t &= \partial_x U(W_t + \sqrt{\xi}) dW_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 U(W_t + \sqrt{\xi}) dt = \\ &= 2(W_t + \sqrt{\xi}) dW_t + dt = dt + 2\sqrt{X_t} dW_t. \end{aligned}$$

Inoltre è soddisfatta anche la condizione iniziale poiché  $W_0 = 0$ .

## 6.4 Equazioni differenziali stocastiche lineari.

**Definizione 6.5.** L'equazione differenziale stocastica (6.3.1) si dice lineare se  $\mu$  e  $\sigma$  si presentano nella forma:

$$\mu(t, X_t) = A_t X_t + a_t, \quad \sigma(t, X_t) = B_t X_t + b_t,$$

con  $A_t, B_t, a_t, b_t$  funzioni note del tempo.

Se  $a_t = b_t = 0$ , l'equazione si dice **lineare ed omogenea**, se  $B_t = 0$ , l'equazione si dice **lineare in senso stretto**.

#### Osservazione 6.4.

Se le funzioni  $A_t, B_t, a_t, b_t$  sono limitate ed integrabili in  $[t_0, T]$ , allora si può provare che siamo nelle condizioni di applicabilità del teorema di esistenza ed unicità della soluzione forte in  $[t_0, T]$ .

Ad esempio mostriamo la condizione di lipschitzianità di  $\mu$  e  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} & |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \\ &= |A_t x + a_t - A_t y - a_t| + |B_t x + b_t - B_t y - b_t| \\ &= |A_t(x - y)| + |B_t(x - y)| \\ &\leq \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |A_t| \right) |x - y| + \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |B_t| \right) |x - y| \\ &= L |x - y|. \end{aligned}$$

Se poi le funzioni  $A_t, B_t, a_t, b_t$  sono limitate ed integrabili su ogni intervallo  $[t_0, \tilde{T}]$ , allora l'equazione lineare ammette una soluzione forte globale.

Nel seguito supporremo che  $A_t, B_t, a_t, b_t$  soddisfino alle condizioni che assicurano l'esistenza della soluzione forte in  $[t_0, T]$  o della soluzione forte globale.

Occupiamoci dapprima delle equazioni differenziali stocastiche lineari in senso stretto, cioè di equazioni nella forma:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t) dt + b_t dW_t$$

cui associamo la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi$$

Di tale problema differenziale siamo in grado di scrivere esplicitamente la soluzione data da:

$$X_t = \Psi_{t, t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right) \quad \forall t \geq t_0, \quad (6.4.1)$$

dove

$$\Psi_{t, t_0} = \exp \left\{ \int_{t_0}^t A_\tau d\tau \right\}.$$

Verifichiamo che il processo stocastico dato dalla (6.4.1) è la soluzione cercata.

Posto

$$Y_t = \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau,$$

il processo  $X_t$ , dato dalla (6.4.1), si scrive come:

$$X_t = Y_t \Psi_{t, t_0}.$$

Calcoliamone il differenziale con la regola del prodotto e tenendo presente che la funzione  $\Psi_{t, t_0}$  non è stocastica. Otteniamo:

$$\begin{aligned} dX_t &= \Psi'_{t, t_0} Y_t dt + \Psi_{t, t_0} dY_t \\ &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t A_\tau d\tau \right\} A_t Y_t dt + \Psi_{t, t_0} (\Psi_{t, t_0}^{-1} a_t dt + \Psi_{t, t_0}^{-1} b_t dW_t) \\ &= A_t Y_t \Psi_{t, t_0} dt + a_t dt + b_t dW_t \\ &= (A_t X_t + a_t) dt + b_t dW_t. \end{aligned}$$

Dunque  $X_t$  dato dalla (6.4.1) è soluzione dell'equazione.

Ci resta ancora da verificare la condizione iniziale:

$$X_{t_0} = \Psi_{t_0, t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^{t_0} \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^{t_0} \Psi_{\tau, t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right) = \xi.$$

Perciò la soluzione del problema è data dalla (6.4.1).

Calcoliamo il valore atteso di tale soluzione:

$$\begin{aligned} m_t = E(X_t) &= E(\Psi_{t, t_0} (\xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau)) \\ &= \Psi_{t, t_0} (E(\xi) + E(\int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau) + E(\int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau)) \\ &= \Psi_{t, t_0} (E(\xi) + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto presente che l'integrale  $\int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau$  non è stocastico e che l'integrale di Ito ha media nulla.

Ora deriviamo rispetto al tempo il valore atteso trovato.

$$\begin{aligned} m'_t &= \Psi'_{t, t_0} (E(\xi) + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau) + \Psi_{t, t_0} \Psi_{t, t_0}^{-1} a_t \\ &= \Psi_{t, t_0} A_t (E(\xi) + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau, t_0}^{-1} a_\tau d\tau) + a_t = A_t m_t + a_t. \end{aligned}$$

Dunque il valore atteso di  $X_t$  soddisfa all'equazione differenziale ordinaria:

$$m'_t = A_t m_t + a_t$$

con la condizione iniziale:

$$m_{t_0} = E(\xi).$$

Si noti che l'equazione differenziale ordinaria cui soddisfa  $m_t$  si ottiene dall'equazione stocastica cui soddisfa  $X_t$  togliendo la parte stocastica.

#### Esempio 6.4. Equazione di Ornstein-Uhlenbeck

Ci proponiamo di risolvere l'equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t,$$

dove  $\lambda$  e  $\sigma$  sono costanti ed inoltre

$$\lambda > 0, \quad t_0 = 0 \quad \text{e} \quad X_0 = \xi.$$

Tale equazione è detta equazione di Ornstein-Uhlenbeck e trova applicazioni nella fisica dei circuiti.

È un'equazione stocastica lineare in senso stretto con  $A_t = -\lambda$ ,  $a_t = 0$ ,  $b_t = \sigma$ .

Determiniamo

$$\Psi_{t,0} = \exp \left\{ \int_0^t -\lambda d\tau \right\} = e^{-\lambda t}.$$

La soluzione del problema è

$$X_t = e^{-\lambda t} \left( \xi + \int_0^t e^{\lambda \tau} \sigma dW_\tau \right) = \xi e^{-\lambda t} + \int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-\tau)} dW_\tau.$$

Calcoliamo  $m_t = E(X_t)$ .

Per quanto stabilito prima ci basta risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m'_t &= -\lambda m_t \\ m_0 &= E(\xi). \end{aligned}$$

Come è immediato verificare, la sua soluzione è

$$m_t = E(\xi) e^{-\lambda t}.$$

Il valore atteso di  $X_t$  tende a 0 per  $t \rightarrow +\infty$  e quindi in media le traiettorie di un tale processo stocastico “tendono” a zero per  $t \rightarrow +\infty$ .

Passiamo ora a considerare le **equazioni differenziali stocastiche lineari di tipo generale**:

$$dX_t = (A_t X_t + a_t) dt + (B_t X_t + b_t) dW_t$$

con la condizione iniziale

$$X_{t_0} = \xi.$$

Anche in questo caso si può scrivere la formula risolutiva del problema:

$$X_t = \Psi_{t,t_0} \left( \xi + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} (a_\tau - B_\tau b_\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Psi_{\tau,t_0}^{-1} b_\tau dW_\tau \right), \quad (6.4.2)$$

dove  $\Psi_{t,t_0}$  è soluzione del problema

$$\begin{aligned} d\varphi_t &= A_t \varphi_t dt + B_t \varphi_t dW_t \\ \varphi_{t_0} &= 1. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Si noti che l'equazione differenziale stocastica cui soddisfa  $\Psi_{t,t_0}$  è l'equazione omogenea associata a quella di partenza.

Tuttavia, la formula risolutiva scritta sopra non si può in genere esplicitare in forma completa perchè non si riesce a determinare  $\Psi_{t,t_0}$  esplicitamente. Ciò è possibile se i coefficienti  $A_t$  e  $B_t$  sono costanti, ossia  $A_t = A$ ,  $B_t = B$  con  $A, B$  costanti. Infatti in tal caso si ha:

$$\Psi_{t,t_0} = e^{(A-B^2/2)(t-t_0) + B(W_t - W_{t_0})} = e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})}. \quad (6.4.4)$$

Verifichiamo che la (6.4.4) è soluzione del problema (6.4.3). Utilizziamo la formula del differenziale di un prodotto tenendo presente che il fattore  $e^{(A-B^2/2)(t-t_0)}$  è non stocastico.

$$\begin{aligned} d\Psi_{t,t_0} &= d \left\{ e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})} \right\} \\ &= e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} e^{B(W_t - W_{t_0})} (A - B^2/2) dt + e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} d(e^{B(W_t - W_{t_0})}). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo differenziale applichiamo la formula di Ito ponendo:

$$U(t, x) = e^{Bx}, \quad x = W_t - W_{t_0} = \int_{t_0}^t dW_\tau \quad \text{per cui } F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Deduciamo allora:

$$d(e^{B(W_t - W_{t_0})}) = B e^{B(W_t - W_{t_0})} dW_t + \frac{1}{2} B^2 e^{B(W_t - W_{t_0})} dt.$$

Sostituendo nel differenziale stocastico di  $\Psi_{t,t_0}$  deduciamo:

$$\begin{aligned} d\Psi_{t,t_0} &= e^{(A-B^2/2)(t-t_0)} \cdot \left[ e^{B(W_t-W_{t_0})} (A - B^2/2) dt + B e^{B(W_t-W_{t_0})} dW_t + \frac{1}{2} B^2 e^{B(W_t-W_{t_0})} dt \right] \\ &= A \Psi_{t,t_0} dt + B \Psi_{t,t_0} dW_t. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\Psi_{t_0,t_0} = 1.$$

Dunque la funzione  $\Psi_{t,t_0}$  è soluzione del problema (6.4.3).

### Osservazione 6.5.

Si può provare che anche nel caso generale  $m_t = E(X_t)$  è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria:

$$m'_t = A_t m_t + a_t$$

con la condizione iniziale:

$$m_{t_0} = E(\xi).$$

Vediamo alcuni esempi.

### Esempio 6.5. Processo che ritorna alla media

Si definisce processo che ritorna alla media il processo stocastico soluzione della seguente equazione differenziale stocastica lineare:

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t) dt + \sigma X_t dW_t, \quad \lambda, \mu, \sigma = \text{costanti}, \quad \lambda > 0$$

con la condizione iniziale all'istante  $t_0 = 0$ :

$$X_0 = \xi.$$

In tal caso si ha dunque:

$$A_t = -\lambda, \quad a_t = \lambda\mu, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Grazie al risultato precedente deduciamo:

$$\Psi_{t,0} = e^{-(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad X_t = \Psi_{t,0} \left[ \xi + \lambda\mu \int_0^t e^{(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma W_\tau} d\tau \right].$$

Determiniamo ora  $m_t$  tenendo presente a quale problema differenziale soddisfa:

$$m'_t = -\lambda m_t + \lambda\mu$$

$$m_0 = E(\xi).$$

L'equazione differenziale ordinaria cui soddisfa  $m_t$  è un'equazione del I ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea.

Com'è noto, la sua soluzione generale è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

La soluzione generale dell'omogenea associata è  $C e^{-\lambda t}$  con  $C$  costante arbitraria, mentre, come è immediato verificare, una soluzione particolare dell'equazione completa è la costante  $\mu$ . Dunque la soluzione generale dell'equazione cui soddisfa  $m_t$  è

$$C e^{-\lambda t} + \mu.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo:

$$m_t = (E(\xi) - \mu) e^{-\lambda t} + \mu.$$

Per  $t \rightarrow +\infty$  vediamo che la media di  $X_t$  tende a  $\mu$ .

Quindi nel processo che ritorna alla media il parametro  $\mu$  rappresenta quel valore cui tende il valore atteso del processo al trascorrere del tempo.

Le traiettorie del processo al trascorrere del tempo “tendono” in media al valore  $\mu$ .

Nella Figura 6.3 è rappresentata una traiettoria approssimata di un processo che ritorna alla media.

Figura 6.3

### Esempio 6.6. Processo geometrico

Un processo geometrico è un processo stocastico che soddisfa l'equazione differenziale stocastica lineare omogenea:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

con  $\lambda$  e  $\mu$  costanti e la condizione iniziale

$$X_0 = \xi \quad (t_0 = 0).$$

Dunque in tal caso:

$$A_t = \mu, \quad a_t = 0, \quad B_t = \sigma, \quad b_t = 0.$$

Si ha perciò:

$$\Psi_{t,0} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad X_t = \xi \Psi_{t,0}. \quad (6.4.5)$$

Il processo geometrico ha notevole importanza in ambito finanziario poiché, come vedremo, secondo il modello di Samuelson, il prezzo delle azioni è descritto mediante un processo di tale tipo.

Stabiliamo due interessanti proprietà del processo geometrico.

- Se esplicitiamo la (6.4.5) e teniamo presente che  $X_0 = \xi$ , otteniamo:

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (6.4.6)$$

da cui

$$\log \frac{X_t}{X_0} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t. \quad (6.4.7)$$

D'altra parte,  $W_t$  segue una distribuzione gaussiana con media nulla e varianza uguale a  $t$ , mentre il termine  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  è una variabile casuale costante.

Se ci procuriamo il valore medio e la varianza del II membro della (6.4.7), deduciamo:

$$E((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t) = E((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t) + E(\sigma W_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t;$$

$$\begin{aligned} \text{Var}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t) &= E(((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)^2) \\ &= E(\sigma^2 W_t^2) = \sigma^2 E(W_t^2) = \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Concludiamo pertanto che  $\log \frac{X_t}{X_0}$  segue una distribuzione gaussiana con media  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  e varianza  $\sigma^2 t$ .

Tenendo presente la definizione di variabile casuale avente distribuzione log-normale, possiamo asserire che, se  $X_t$  è un processo geometrico, allora  $\frac{X_t}{X_0}$  ha una distribuzione log-normale.

- Se il valore iniziale è limitato, il processo geometrico ha la proprietà a martingala, ossia

$$E(X_T | \mathcal{I}_t) = X_t e^{\mu(T-t)} \quad \text{con } t < T. \quad (6.4.8)$$

La (6.4.8) ci dice che non  $X_t$ , bensì  $X_t e^{-\mu t}$  si comporta come una martingala. Infatti, supponiamo valga la (6.4.8) e consideriamo:

$$E(X_T e^{-\mu T} | \mathcal{I}_t) = e^{-\mu T} E(X_T | \mathcal{I}_t) = e^{-\mu T} X_t e^{\mu(T-t)} = X_t e^{-\mu t}.$$

Vediamo di dimostrare la (6.4.8).

A tal fine premettiamo il seguente

**Lemma 6.1.** *Se  $W_t$  è un processo di Wiener e  $\sigma$  è una costante, allora:*

$$E(e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t) = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} \quad \text{con } t < T.$$

Dimostrazione

Poniamo

$$Z_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t}$$

e determiniamone il differenziale stocastico tenendo presente che è il prodotto di una funzione non stocastica per una stocastica.

$$\begin{aligned} dZ_t &= -\frac{\sigma^2}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t} dt + e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} d(e^{\sigma W_t}) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\sigma W_t} dt + e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \left[ \sigma e^{\sigma W_t} dW_t + \frac{\sigma^2}{2} e^{\sigma W_t} dt \right] \\ &= \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} dW_t = \sigma Z_t dW_t. \end{aligned}$$

L'espressione integrale corrispondente è:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau \quad (6.4.9)$$

dove

$$Z_0 = e^{\frac{\sigma^2}{2}T}.$$

In particolare per  $t = T$ , otteniamo:

$$e^{\sigma W_T} = Z_T = e^{\frac{\sigma^2}{2}T} + \int_0^T \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau.$$

Allora

$$\begin{aligned} E(e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t) &= E(e^{\frac{\sigma^2}{2}T} | \mathcal{I}_t) + E\left(\int_0^T \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau | \mathcal{I}_t\right) \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2}T} + \int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che l'integrale di Ito

$$\int_0^t \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-\tau) + \sigma W_\tau} dW_\tau$$

è una martingala.

Infine grazie alla (6.4.9) risulta:

$$E(e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t) = Z_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t},$$

che è il risultato che dovevamo dimostrare.

Proviamo ora la (6.4.8).

A tal fine richiamiamo una proprietà dell'aspettativa condizionata che abbiamo enunciato in precedenza.

Siano  $X$  e  $M$  due variabili casuali e  $\mathcal{I}$  una struttura informativa. Se  $M$  è limitata e misurabile rispetto a  $\mathcal{I}$ , allora si ha:

$$E(M X | \mathcal{I}) = M E(X | \mathcal{I}).$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} E(X_T | \mathcal{I}_t) &= E(X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} | \mathcal{I}_t) \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E(X_0 e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t), \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto presente la linearità dell'aspettativa condizionata.

Ma d'altra parte  $X_0$  è variabile casuale limitata ed anche misurabile rispetto a  $\mathcal{I}_t$  per cui, grazie alla proprietà dell'aspettativa condizionata ricordata prima, otteniamo:

$$E(X_T | \mathcal{I}_t) = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E(e^{\sigma W_T} | \mathcal{I}_t).$$

Se a questo punto applichiamo il lemma 6.1, concludiamo che:

$$\begin{aligned} E(X_T | \mathcal{I}_t) &= X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_t} \\ &= X_0 e^{\mu(T-t)} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = X_t e^{\mu(T-t)}. \end{aligned}$$

# Capitolo 7

## Il modello di Black-Merton-Scholes di valutazione delle opzioni call

### 7.1 Modelli matematici per i prezzi azionari.

Il primo modello per i prezzi azionari risale a **L. Bachelier** (1900) che, prendendo in considerazione i dati della borsa di Parigi, propose di ricorrere al moto Browniano per descrivere l'andamento dei prezzi delle azioni.

Il lavoro di Bachelier fu pionieristico e all'avanguardia poichè la prima formulazione matematica del moto Browniano risale agli studi di Einstein del 1905 e solo nel 1923 Wiener formalizzò il processo da lui ideato, equivalente ad un processo Browniano.

Il modello di Bachelier si può formulare nel modo seguente.

Se  $S_t$  è il prezzo di un'azione al tempo  $t$ , allora

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

dove  $S_0$  rappresenta il prezzo dell'azione al tempo  $t = 0$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti e  $W_t$  è un moto Browniano, ossia un processo di Wiener.

Il difetto di tale formulazione sta nel fatto che  $S_t$  può diventare negativo anche se  $S_0$  è positivo. I prezzi azionari non sono mai negativi e quindi tale modello non è adeguato ai dati empirici.

Comunque, nonostante l'inadeguatezza del suo modello, Bachelier può essere considerato il fondatore della matematica finanziaria moderna.

Nel 1965 **P.Samuelson** propose un modello nel quale le fluttuazioni del prezzo azionario sono descritte mediante un processo geometrico.

Samuelson studiò i **rendimenti dei prezzi azionari**.

**Definizione 7.1.** Si definisce rendimento del prezzo di un'azione relativo all'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  il seguente rapporto:

$$(\Delta S + \text{eventuali dividendi})/S,$$

dove  $\Delta S$  rappresenta la variazione del prezzo azionario nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  e  $S$  è il prezzo dell'azione al tempo  $t$ .

Nel caso in cui non compaiano dividendi, il rendimento è dato da

$$\frac{\Delta S}{S}.$$

Supponiamo di determinare un insieme di rendimenti del prezzo di un'azione relativi ad intervalli di tempo successivi tutti di uguale ampiezza  $\Delta t$  (ad esempio  $\Delta t$  può essere 1 giorno).

Sia  $S_i$  il prezzo dell'azione al tempo  $t_i$  con  $i = 1, \dots, m$ .

Allora il rendimento relativo all'intervallo  $(t_i, t_{i+1})$  è dato da:

$$\rho_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Empiricamente Samuelson ha osservato che la distribuzione dei rendimenti di un dato prezzo azionario può essere approssimata con una distribuzione gaussiana. Inoltre, sempre da studi empirici, è emerso che, se  $\Delta t$  è l'ampiezza dell'intervallo tra due rilevamenti successivi, la distribuzione gaussiana dei rendimenti ha **valore atteso** proporzionale a  $\Delta t$  ed è quindi esprimibile nella forma  $\mu\Delta t$  con  $\mu$  costante ed analogamente la **varianza** risulta proporzionale a  $\Delta t$  ed è quindi della forma  $\sigma^2\Delta t$  con  $\sigma$  costante.

In base a tali osservazioni, Samuelson propose che il prezzo azionario  $S_t$  seguisse un processo geometrico e quindi soddisfacesse ad un'equazione differenziale stocastica della forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti.

Infatti, come si verifica facilmente, se  $S_t$  è un processo geometrico, si trovano risultati in accordo con le osservazioni empiriche.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione stocastica scritta sopra per  $S_t$  ottenendo così:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

dove il primo membro può essere interpretato come il rendimento del prezzo azionario nell'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ .

Se calcoliamo il valore atteso di tale rendimento deduciamo:

$$E\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) = E(\mu dt) + E(\sigma dW_t) = \mu dt + \sigma E(dW_t) = \mu dt,$$

dove abbiamo tenuto presente che il valore atteso dell'incremento di un processo di Wiener è nullo.

Analogamente calcoliamone la varianza:

$$E\left(\left(\frac{dS_t}{S_t} - \mu dt\right)^2\right) = E((\sigma dW_t)^2) = \sigma^2 E((dW_t)^2) = \sigma^2 dt.$$

Allora vediamo che se l'andamento dei prezzi azionari segue un processo geometrico si trovano, per valore atteso e varianza, risultati in accordo con i dati empirici.

Dunque nel modello di Samuelson il prezzo di ogni azione segue un processo geometrico con parametri  $\mu$  e  $\sigma$ , dove:

$\mu$  = **tasso di rendimento atteso**

$\sigma^2$  = **tasso di varianza dei rendimenti.**

Nella pratica si stima  $\mu$  considerando il **rendimento medio**, ossia la media aritmetica di un dato numero di rendimenti rilevati ad intervalli di tempo pari a  $\Delta t$ :  $\rho_i$  con  $i = 1, \dots, m - 1$  per cui

$$\mu \Delta t = \frac{1}{m - 1} \sum_{i=1}^{m-1} \rho_i.$$

L'investitore si aspetta che  $\mu$  sia maggiore di  $r$ , tasso di interesse del mercato, e dunque deve sostenere un rischio.

In finanza  $\sigma$  viene chiamata **volatilità del prezzo azionario**.

Una volatilità alta comporta rendimenti distanti dal rendimento medio, mentre se  $\sigma$  è piccolo i rendimenti sono più vicini al valore medio e quindi l'investimento è più sicuro.

La volatilità è perciò una misura del rischio del titolo, misurando lo scostamento dal rendimento atteso.

Se  $\sigma$  fosse nullo il prezzo azionario sarebbe sicuro, ossia non stocastico.

La volatilità di un prezzo azionario si calcola con metodi statistici in base all'andamento storico dell'azione.

Sono comunque stati formulati altri modelli, oltre a quello di Samuelson, per descrivere il prezzo delle azioni.

Nel 1976 **R. C. Merton** ha criticato l'ipotesi di Samuelson secondo la quale i prezzi azionari seguono un processo continuo nel tempo ed ha proposto un modello misto in cui al processo geometrico viene aggiunto un processo di Poisson, che è un processo stocastico che presenta delle discontinuità di tipo salto.

In effetti il modello di Merton si considera atto a descrivere il prezzo delle azioni in un mercato finanziario in condizioni patologiche in cui, a causa di eventi improvvisi ed eccezionali, il prezzo delle azioni subisce delle fluttuazioni molto frequenti ed accentuate.

Nel 1995 **E. Eberlein** e **U. Keller** esaminando i prezzi della borsa di Francoforte hanno avanzato critiche al modello di Samuelson. I due autori sostengono che i rendimenti azionari non seguono una distribuzione gaussiana, bensì una distribuzione a “code più spesse”(o fat-tail).

Figura 7.1

Preso un valore estremo, molto lontano dalla media, esso è molto improbabile secondo la distribuzione gaussiana. Nella distribuzione fat-tail la sua probabilità è maggiore.

La distribuzione utilizzata da Eberlein e Keller è detta iperbolica perché, mentre il grafico del logaritmo della funzione di densità gaussiana è una parabola, quello della funzione di densità iperbolica è un'iperbole.

Nonostante le critiche, il modello più accreditato rimane quello di Samuelson. Se teniamo presente quanto stabilito nel capitolo precedente sui processi geometrici, in base al modello di Samuelson deduciamo che al tempo  $t$  il prezzo  $S_t$

di un'azione che ha prezzo  $S_0$  al tempo  $t_0 = 0$  è dato da:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

per cui

$$\log \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t.$$

A differenza del modello proposto da Bachelier per il quale  $S_t - S_0$  aveva dipendenza lineare da  $t$  e da  $W_t$ , nel modello di Samuelson è il logaritmo di  $\frac{S_t}{S_0}$  ad avere dipendenza lineare da  $t$  e da  $W_t$ .

Inoltre, avendo  $W_t$  distribuzione gaussiana, ne discende che gode di questa proprietà anche  $\log \frac{S_t}{S_0}$  e quindi  $\frac{S_t}{S_0}$  ha distribuzione log-normale.

In più per la **proprietà a martingala** del processo geometrico si ha

$$E(S_T | \mathcal{I}_t) = S_t e^{\mu(T-t)} \quad \text{con} \quad T > t,$$

da cui deriva che

$$S_t = e^{-\mu(T-t)} E(S_T | \mathcal{I}_t),$$

ossia il prezzo corrente di un'azione corrisponde al valore atteso di un prezzo futuro scontato ad un tasso d'interesse pari a  $\mu$  all'interno di un regime di capitalizzazione istantanea.

## 7.2 Determinazione del prezzo delle opzioni call europee: equazione di Black e Scholes.

La formula di Black e Scholes fu ottenuta da F. Black e M. Scholes nel 1973 e indipendentemente da R.C.Merton nello stesso anno che ne diede anche varie generalizzazioni.

Essa consente di trovare una soluzione al problema della valutazione del prezzo delle opzioni call europee.

Il modello poggia su alcune ipotesi, valide sia nel mercato delle opzioni sia in quello del titolo sottostante, che in questo caso è un'azione.

Le ipotesi sono le seguenti:

- Il tasso d'interesse  $r$  a breve termine è noto e costante nel tempo ed è possibile indebitarsi a tale tasso;

- il prezzo di esercizio  $X$  dell'opzione è noto e costante nel tempo;
- il prezzo del titolo sottostante segue un processo geometrico per cui

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

con  $\mu$  tasso di rendimento atteso,  $\sigma$  volatilità dell'azione e  $W_t$  processo di Wiener;

- il titolo sottostante non paga dividendi;
- c'è assenza di possibilità di arbitraggio;
- il mercato è privo di costi di transazione;
- non ci sono limitazioni alle vendite allo scoperto, ossia ci si può indebitare indefinitamente.

Notiamo che per descrivere l'andamento del prezzo dell'azione, titolo sottostante dell'opzione, si segue il modello di Samuelson.

Consideriamo il caso di un'opzione call europea.

In base alle ipotesi formulate, il valore dell'opzione dipende dal prezzo dell'azione sottostante e dal tempo, nonché da altre variabili, come il prezzo di esercizio, il tasso d'interesse, il tasso di rendimento atteso e la volatilità dell'azione, che però nell'analisi sono supposte note e costanti. Allora possiamo riguardare in prima istanza il valore di un'opzione dipendente solo dal prezzo del sottostante e dal tempo  $t$ .

Scriveremo dunque  $c = c(S, t)$  dove  $S$  è il prezzo azionario e  $t$  indica il tempo.

Supporremo  $t \in (0, T]$ , essendo  $T$  la data di scadenza della call.

Teniamo poi presente che al tempo  $T$ , cioè alla scadenza dell'opzione, si deve avere

$$c(S_T, T) = \max \{S_T - X, 0\},$$

con  $S_T$  prezzo azionario al tempo  $T$ .

L'idea alla base del modello di valutazione di Black e Scholes consiste nella creazione di un portafoglio coperto formato da una posizione lunga sull'azione e una posizione corta su un certo numero di opzioni in modo tale che, in equilibrio, il suo rendimento sia esattamente uguale a quello di un'attività priva di rischio. Il portafoglio coperto viene realizzato mediante un procedimento di delta-hedging: il portafoglio è formato da un'azione su cui si assume posizione lunga e da un

numero di call pari a  $\frac{1}{\Delta}$ , con  $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$ , su cui si assume posizione corta. Se la copertura viene realizzata con continuità il portafoglio diventa totalmente indipendente dalle fluttuazioni del prezzo dell'azione e il suo rendimento è certo. Indicato con  $V$  il valore del portafoglio, avremo:

$$V = S - \frac{1}{\Delta} c.$$

L'unico fattore di rischio per  $V$  è rappresentato dal prezzo  $S$  dell'azione da cui  $V$  dipende sia direttamente che indirettamente tramite  $c$ . Come sappiamo  $S$  ha carattere stocastico ed è descritto dal processo geometrico  $S_t$  soddisfacente all'equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Anche  $c$  ha carattere stocastico ed è descritto dal processo stocastico

$$c_t = c(S_t, t).$$

Se assumiamo che la funzione  $c(S, t)$  sia continua e siano continue  $\partial_t c$ ,  $\partial_S c$ ,  $\partial_{SS}^2 c$ , il differenziale stocastico di  $c_t$  è dato dalla formula di Ito. Tenendo presente che  $S = S_t$  per cui  $F = \mu S_t$  e  $G = \sigma S_t$ , otteniamo:

$$dc_t = \partial_t c(S_t, t) dt + \partial_S c(S_t, t) dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{SS}^2 c(S_t, t) dt.$$

Consideriamo ora l'evoluzione temporale di  $V$  nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  con  $\Delta t$  così piccolo da poter ritenere costante in tale intervallo il  $\Delta$  della call che perciò nelle successive argomentazioni considereremo dato da  $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}(S_t, t)$ . Nell'intervallo di tempo considerato, abbiamo che  $V$  è descritto dal processo stocastico:

$$V_t = S_t - \frac{c_t}{\Delta}$$

e quindi:

$$dV_t = dS_t - \frac{dc_t}{\Delta}. \quad (7.2.1)$$

Nel seguito, per non appesantire la scrittura, ometteremo il pedice  $t$ .

Se nella (7.2.1) andiamo a sostituire al differenziale stocastico del prezzo dell'azione la sua espressione e al differenziale stocastico di  $c$  la formula di Ito scritta sopra, deduciamo:

$$\begin{aligned} dV &= \mu S dt + \sigma S dW - \frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c dt + \mu S \partial_S c dt + \sigma S \partial_S c dW + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 c dt \right) \\ &= \left[ \mu S - \frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \mu S \partial_S c + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 c \right) \right] dt + \sigma S \left( 1 - \frac{1}{\Delta} \partial_S c \right) dW. \end{aligned}$$

D'altra parte, il coefficiente di  $dW$  è nullo poiché  $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$  e dunque con la strategia di delta-hedging viene eliminata l'influenza di eventi casuali sulla variazione del valore del portafoglio.

L'espressione di  $dV$  risulta perciò:

$$\begin{aligned} dV &= \left[ \mu S \left( 1 - \frac{1}{\Delta} \partial_S c \right) - \frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) \right] dt \\ &= -\frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) dt. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

A questo punto osserviamo che, avendo supposto l'assenza di possibilità di arbitraggio, poiché il portafoglio è privo di rischio, si comporta come un'obbligazione priva di rischio.

Adottando il regime di capitalizzazione istantanea, il valore  $B_t$  al tempo  $t$  di un'obbligazione che al tempo  $t = 0$  ha valore  $B_0$  sarà tale che:

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

con  $r$  tasso d'interesse di mercato.

$B_t$  è una funzione non stocastica e dunque il suo differenziale è dato da

$$dB_t = r B_0 e^{rt} dt = r B_t dt.$$

Allora avremo che per il portafoglio sussiste la relazione:

$$dV = r V dt = r \left( S - \frac{c}{\Delta} \right) dt. \quad (7.2.3)$$

Sostituendo nella (7.2.2), otteniamo

$$-\frac{1}{\Delta} \left( \partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c \right) dt = r \left( S - \frac{c}{\Delta} \right) dt$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per  $\Delta$  deduciamo:

$$-\partial_t c - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c = r \Delta S - r c.$$

Infine, tenendo presente che  $\Delta = \partial_S c$ , arriviamo alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c + r S \partial_S c - r c = 0. \quad (7.2.4)$$

L'equazione (7.2.4) è detta **equazione di Black e Scholes**.

L'incognita di tale equazione è la funzione di due variabili  $c(S, t)$  che rappresenta il prezzo di una call europea.

All'equazione, che deve essere soddisfatta per  $t \in (0, T)$ , dobbiamo associare la condizione finale:

$$c(S_T, T) = \max \{S_T - X, 0\}. \quad (7.2.5)$$

### 7.3 Brevi cenni sulle equazioni differenziali alle derivate parziali.

**Definizione 7.2.** *Un'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è una relazione tra tali variabili, una funzione incognita  $v$  di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ed una o più derivate parziali della funzione incognita. Diremo che un'equazione alle derivate parziali è di ordine  $m$  se  $m$  è l'ordine delle derivate di ordine massimo della funzione incognita che compaiono nell'equazione.*

Ad esempio, la più generale equazione alle derivate parziali del II ordine nelle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è della forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, v, \partial_{x_1} v, \dots, \partial_{x_n} v, \partial_{x_1 x_1}^2 v, \partial_{x_1 x_2}^2 v, \dots, \partial_{x_n x_n}^2 v) = 0,$$

dove  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è la funzione incognita.

Se  $F$  è lineare rispetto alla funzione incognita e a tutte le sue derivate, l'equazione si dice **lineare**.

La più generale equazione lineare alle derivate parziali del II ordine nelle 2 variabili indipendenti  $x, y$  è del tipo:

$$A(x, y) \partial_{xx}^2 v + 2B(x, y) \partial_{xy}^2 v + C(x, y) \partial_{yy}^2 v + a(x, y) \partial_x v + b(x, y) \partial_y v + c(x, y) v = f(x, y),$$

con  $A, B, C, a, b, c, f$  funzioni note.

Se  $f \equiv 0$ , l'equazione si dice **omogenea**.

Particolarmente importanti per i numerosi fenomeni fisici da esse governati sono le tre seguenti equazioni alle derivate parziali del II ordine:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(x_1, x_2, x_3, t),$$

( $V =$  costante positiva), detta **equazione delle onde o di D'Alembert**;

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - (\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v) = f(x_1, x_2, x_3, t),$$

( $a =$  costante positiva), detta **equazione del calore o di Fourier**;

$$\partial_{x_1 x_1}^2 v + \partial_{x_2 x_2}^2 v + \partial_{x_3 x_3}^2 v = f(x_1, x_2, x_3),$$

detta **equazione di Poisson**.

L'ultima equazione prende il nome di **equazione di Laplace** se  $f \equiv 0$ .

Queste tre equazioni sono dette **equazioni principali della Fisica Matematica**.

Le prime due sono equazioni alle derivate parziali nelle 4 variabili indipendenti  $(x_1, x_2, x_3, t)$  lineari e a coefficienti costanti. Tali equazioni governano fenomeni evolutivi che avvengono in regioni dello spazio geometrico in un dato intervallo di tempo e che sono descritti da grandezze dipendenti non solo dal tempo ma anche dalle coordinate spaziali del punto dello spazio geometrico nel quale si considerano.

La terza equazione, che è un'equazione alle derivate parziali nelle tre variabili indipendenti  $(x_1, x_2, x_3)$ , del II ordine, lineare, a coefficienti costanti, in genere governa fenomeni stazionari, cioè indipendenti dal tempo e dunque individuati mediante grandezze che dipendono solo dalle coordinate spaziali del punto dello spazio geometrico nel quale si considerano.

**Definizione 7.3.** *Data un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $m$  in  $n$  variabili indipendenti, diremo che la funzione  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è **soluzione classica o forte** dell'equazione nel dominio (insieme aperto connesso)  $D \in \mathbb{R}^n$  se  $v \in C^m(D)$  e, sostituita al posto della funzione incognita, riduce l'equazione ad un'identità rispetto alle variabili indipendenti.*

### Esempio 7.1.

Consideriamo l'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^3$  e mostriamo che una soluzione classica di tale equazione in  $\mathbb{R}^3$  è la funzione:

$$v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2.$$

Tale funzione  $\in C^2(\mathbb{R}^3)$ , anzi è di classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Per quanto riguarda le derivate che compaiono nell'equazione abbiamo:

$$\partial_{x_i} v(x_1, x_2, x_3) = 2x_i \quad i = 1, 2, \quad \partial_{x_3} v(x_1, x_2, x_3) = -4x_3,$$

$$\partial_{x_i x_i}^2 v(x_1, x_2, x_3) = 2 \quad i = 1, 2, \quad \partial_{x_3 x_3}^2 v(x_1, x_2, x_3) = -4.$$

Sostituendo nell'equazione al posto della funzione incognita otteniamo:

$$2 + 2 - 4 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Accanto alla definizione di soluzione classica di un'equazione alle derivate parziali si possono dare definizioni meno restrittive indebolendo le condizioni di regolarità. Si parla allora di soluzioni **generalizzate** o **deboli**, ma non insistiamo su tale punto.

Diremo che un'equazione alle derivate parziali è **semilineare** se è lineare rispetto alle derivate di ordine massimo della funzione incognita e i coefficienti di queste sono funzioni solo delle variabili indipendenti.

La più generale equazione alle derivate parziali del II ordine semilineare nelle 2 variabili indipendenti  $x, y$  si presenta nella forma:

$$A(x, y) \partial_{xx}^2 v + 2B(x, y) \partial_{xy}^2 v + C(x, y) \partial_{yy}^2 v = \Phi(x, y, v, \partial_x v, \partial_y v). \quad (7.3.1)$$

Nel seguito del paragrafo ci occuperemo prevalentemente di equazioni alle derivate parziali del II ordine in 2 variabili indipendenti, visto che l'equazione di Black e Scholes è di tale tipo.

**Definizione 7.4.** *Data l'equazione alle derivate parziali semilineare (7.3.1), con  $(x, y)$  variabile in un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , si definisce discriminante dell'equazione la seguente funzione:*

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

**Definizione 7.5.** *(Classificazione in un punto per un'equazione alle derivate parziali del II ordine in due variabili indipendenti semilineare). Considerato  $(x, y) \in D$ , nell'ipotesi che i coefficienti  $A, B, C$  non si annullino simultaneamente, diciamo che in  $(x, y)$  l'equazione (7.3.1) è*

- di tipo **iperbolico** se  $\delta(x, y) > 0$ ;
- di tipo **parabolico** se  $\delta(x, y) = 0$ ;
- di tipo **ellittico** se  $\delta(x, y) < 0$ .

### Esempi 7.2.

1. Equazione delle onde in due variabili, detta anche equazione delle corde vibranti:

$$\frac{1}{V^2} \partial_{tt}^2 v - \partial_{xx}^2 v = f(x, t).$$

Abbiamo:

$$A = -1, B = 0, C = \frac{1}{V^2} \implies \delta = \frac{1}{V^2} > 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo iperbolico in  $\mathbb{R}^2$ .

2. Equazione del calore in due variabili

$$\frac{1}{a^2} \partial_t v - \partial_{xx}^2 v = f(x, t).$$

Abbiamo:

$$A = -1, B = 0, C = 0 \implies \delta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo parabolico in  $\mathbb{R}^2$ .

3. Equazione di Poisson in due variabili:

$$\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v = f(x, y).$$

Abbiamo:

$$A = 1, B = 0, C = 1 \implies \delta = -1 < 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

L'equazione è di tipo ellittico in  $\mathbb{R}^2$ .

La classificazione in un punto si può generalizzare anche ad equazioni alle derivate parziali semilineari del II ordine in più di due variabili indipendenti.

**Definizione 7.6.** *L'applicazione*

$$\begin{aligned} H : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\xi, \eta) \end{aligned}$$

( $D = \text{dominio di } \mathbb{R}^2$ ) tale che :

1)  $\xi, \eta \in \mathcal{C}^2(D)$ ;

2)  $\det \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} \neq 0$  in  $D$

è detta trasformazione regolare delle variabili indipendenti  $(x, y)$ .

Si potrebbero dimostrare le seguenti proposizioni.

**Proposizione 7.1.** *In seguito ad una trasformazione regolare  $H$  delle variabili indipendenti la trasformata dell'equazione differenziale del II ordine in due variabili indipendenti semilineare (7.3.1) è ancora semilineare ed in ogni punto di  $H(D)$  è dello stesso tipo dell'equazione di partenza nel punto corrispondente di  $D$ .*

**Proposizione 7.2.** *Se l'equazione (7.3.1) è di tipo iperbolico o parabolico in  $D$  e  $A, B, C$  in  $\mathcal{C}^2(D)$  o l'equazione è di tipo ellittico in  $D$  e  $A, B, C$  sono funzioni analitiche in  $D$ , allora esiste una trasformazione regolare delle variabili indipendenti che consente di scrivere l'equazione trasformata, se non in tutto  $D$ , almeno in un suo sottodominio, nella forma seguente, detta II forma canonica:*

- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} - \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso iperbolico;
- $\partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso parabolico;
- $\partial_{\xi\xi}^2 \tilde{v} + \partial_{\eta\eta}^2 \tilde{v} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{v}, \partial_\xi \tilde{v}, \partial_\eta \tilde{v})$  nel caso ellittico,

dove con  $\tilde{v}$  denotiamo la trasformata di  $v$ .

Ricordiamo che una funzione si dice analitica in un dominio se in un intorno di ogni punto del dominio è sviluppabile in serie di Taylor e questa risulta uniformemente convergente.

Si noti che l'equazione delle onde in due variabili non è ridotta alla II forma canonica, mentre lo sono l'equazione del calore e l'equazione di Poisson.

Come per le equazioni differenziali ordinarie, anche un'equazione alle derivate parziali ammette infinite soluzioni e dunque, come per determinare una soluzione di un'equazione differenziale ordinaria si associano a questa le condizioni iniziali o di Cauchy, analogamente per determinare una soluzione di un'equazione alle derivate parziali si associano all'equazione stessa delle opportune condizioni, dette condizioni ai limiti.

Se abbiamo un'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili indipendenti di ordine  $m$  le condizioni ai limiti consistono nell'assegnare su una determinata varietà di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n - 1$  i valori della funzione incognita o di alcune sue derivate, al massimo sino all'ordine  $m - 1$ .

Per problema ai limiti relativo ad una data equazione differenziale alle derivate parziali si intende il problema che consiste nel trovare una soluzione dell'equazione soddisfacente ad opportune condizioni ai limiti.

Come già abbiamo osservato, vi sono equazioni alle derivate parziali che descrivono fenomeni fisici di evoluzione. In tali equazioni dunque una delle variabili indipendenti è la variabile temporale  $t$ , mentre le altre variabili sono coordinate spaziali. In tal caso, se le condizioni associate all'equazione si riferiscono all'iperpiano  $t = t_0$  ( $t_0 =$  istante iniziale), vengono dette condizioni iniziali; se si riferiscono alla frontiera del dominio  $D$  in cui variano le coordinate spaziali sono dette condizioni al contorno.

I principali problemi ai limiti relativi alle equazioni alle derivate parziali del II ordine che descrivono fenomeni fisici si possono raggruppare in tre classi:

- **Problemi di Cauchy o problemi ai valori iniziali** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico che governano fenomeni di evoluzione. La soluzione si cerca in  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  e sono assegnate solo condizioni iniziali.  $[0, +\infty)$  è un intervallo di tempo illimitato e in  $\mathbb{R}^n$  assumono i loro valori le coordinate spaziali.
- **Problemi ai valori al contorno** per equazioni di tipo ellittico nelle quali non compare la variabile temporale. La soluzione si cerca in  $\overline{D}$  con  $D$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Sono assegnate solo condizioni al contorno riferentesi a  $\partial D$ ;
- **Problemi di tipo misto** per equazioni di tipo iperbolico o parabolico. La soluzione si cerca in  $\overline{D} \times [0, T]$ , dove  $D$  è un dominio di  $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^n$  e  $[0, T]$  è un intervallo di tempo. Sono assegnate condizioni iniziali e condizioni al contorno relative a  $\partial D$ .

E' evidente che è molto importante provare per un dato problema ai limiti che la soluzione esiste ed è unica, almeno in una certa classe. Molti problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali soddisfano a tale importante proprietà sotto opportune condizioni di regolarità dei dati del problema stesso.

Si osservi che i fenomeni di evoluzione descritti mediante equazioni alle derivate parziali rientrano nei processi deterministici.

## 7.4 Risoluzione del problema di Black e Scholes data la condizione finale.

Riscriviamo l'equazione (7.2.4) di Black e Scholes:

$$\partial_t c + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{SS}^2 c + r S \partial_S c - r c = 0.$$

Come osservato, è un'equazione differenziale alle derivate parziali nelle due variabili indipendenti  $(S, t)$  con funzione incognita  $c(S, t)$ ; in particolare si tratta di un'equazione del second'ordine lineare omogenea.

Notiamo che l'equazione è **di tipo parabolico** in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Infatti,

in tale insieme i coefficienti delle derivate seconde non si annullano simultaneamente e il discriminante è nullo.

Possiamo inoltre notare che l'equazione non è ridotta alla II forma canonica perchè il coefficiente della derivata seconda rispetto a  $S$  non è uguale a 1. Osserviamo poi che all'equazione è associata la condizione (7.2.5) che non è una condizione iniziale, bensì una condizione finale e dunque non rientra tra le usuali condizioni ai limiti che vengono associate ad un'equazione alle derivate parziali nella quale compaia tra le variabili il tempo.

Ci proponiamo di mostrare che con una trasformazione regolare delle variabili indipendenti e con un cambiamento di funzione incognita è possibile ricondurre ad un'equazione di tipo parabolico ridotta alla seconda forma canonica e contemporaneamente trasformare la condizione finale in una usuale condizione iniziale o di Cauchy per un'equazione di tipo parabolico.

Esponiamo il procedimento "originale" seguito da Black e Scholes.

Teniamo presente che, essendo il prezzo di un'azione sempre positivo, noi consideriamo l'equazione (7.2.4) in  $(0, +\infty) \times (0, T)$ .

Introduciamo in luogo di  $(S, t)$  due nuove variabili  $(u, z)$  così definite:

$$u = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[ \log \frac{S}{X} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - T) \right]$$

$$z = -\frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t - T).$$

Ovviamente si assume:  $r \neq \frac{\sigma^2}{2}$ .

Tale trasformazione delle variabili indipendenti risulta regolare, come si può facilmente verificare.

Inoltre il trasformato del dominio  $(0, +\infty) \times (0, T)$  è  $\mathbb{R} \times (0, z_0)$  con  $z_0 = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T$ .

Facciamo poi un cambiamento di funzione incognita prendendo come nuova incognita la funzione  $Y(u, z)$  tale che

$$c(S, t) = e^{r(t-T)} Y(u, z).$$

Applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte e denotando per

semplicità con  $Y_u, Y_z, Y_{uu}$  la derivata prima rispetto a  $u$  e  $z$  e la derivata seconda rispetto a  $u$  della funzione  $Y$ , otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_t c &= re^{r(t-T)}Y(u, z) - e^{r(t-T)}[Y_u(u, z) + Y_z(u, z)] \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \\ \partial_S c &= e^{r(t-T)}Y_u(u, z) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{1}{S} \\ \partial_S^2 c &= e^{r(t-T)}Y_{uu}(u, z) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 \frac{1}{S^2} - e^{r(t-T)}Y_u(u, z) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{1}{S^2}.\end{aligned}$$

Se sostituiamo nell'equazione (7.2.4), dividendo entrambi i membri per  $e^{r(t-T)}$  e facendo qualche prima semplificazione, deduciamo:

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)^2 Y_{uu} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u \right\} + \\ + r \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_u = 0.\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

Dividendo entrambi i membri della (7.4.1) per  $\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$  e semplificando, otteniamo:

$$-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (Y_z + Y_u) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) Y_{uu} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_u = 0$$

da cui

$$-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_{uu} = 0.$$

Infine dividendo per  $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ , arriviamo alla seguente equazione:

$$Y_z = Y_{uu}\quad (7.4.2)$$

che ha la stessa forma dell'equazione del calore omogenea in due variabili in cui in luogo della variabile temporale  $t$  e della variabile spaziale  $x$  compaiono rispettivamente le variabili  $z$  e  $u$  definite in precedenza e  $a = 1$ . Ricordiamo infatti che quest'ultima equazione è usualmente scritta nella forma:

$$\frac{1}{a^2} v_t = v_{xx}$$

dove  $v$  è la funzione incognita e  $a$  è una costante positiva.

Mostriamo ora che con le nuove variabili indipendenti e con la nuova funzione incognita la condizione (7.3.1), che risultava finale per l'equazione (7.2.5), si trasforma in una condizione iniziale per l'equazione trasformata (7.4.2).

Infatti:

$$c(S_T, T) = e^{r(T-T)} Y \left( \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \log \frac{S_T}{X}, 0 \right) = Y(u_T, 0)$$

Dunque la (7.3.1) si riduce a:

$$Y(u_T, 0) = \max \{S_T - X, 0\}$$

poiché per  $t = T$  si ha  $z = 0$ .

Vediamo di esprimere anche il secondo membro mediante le nuove variabili.

Osserviamo in primo luogo che dalle equazioni della trasformazione delle variabili indipendenti si deduce

$$\log \frac{S}{X} = \frac{u - z}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}.$$

Allora per  $t = T$ , ossia per  $z = 0$ , abbiamo

$$\log \frac{S_T}{X} = \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \quad \Longrightarrow \quad S = X e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}}.$$

In conclusione la condizione (7.3.1) ora si scrive nella forma:

$$Y(u_T, 0) = \max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\}.$$

Tale condizione può essere ulteriormente precisata.

Consideriamo dapprima il caso in cui  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ .

Allora

$$e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_T \geq 0.$$

Dunque nel caso in cui  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$

$$\max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}} - 1 \right), 0 \right\} = 0 \quad \text{se} \quad u_T < 0$$

$$\max \left\{ X \left( e^{\frac{u_T}{\sigma^2} - 1} - 1 \right), 0 \right\} = X \left( e^{\frac{u_T}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) \quad \text{se} \quad u_T \geq 0$$

e la (7.2.5) diviene

$$\begin{aligned} Y(u_T, 0) &= 0 & \text{se} \quad u_T < 0 \\ Y(u_T, 0) &= X \left( e^{\frac{u_T}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) & \text{se} \quad u_T \geq 0. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

In maniera analoga si procede per il caso opposto:  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 < 0$ .

In conclusione la determinazione del prezzo di una call europea è basata sulla ricerca della soluzione in  $\mathbb{R} \times [0, z_0)$  del problema che si ottiene associando all'equazione (7.4.2) la condizione iniziale:

$$Y(u, 0) = g(u)$$

dove, se per il momento ci limitiamo a considerare il caso  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ ,  $g$  è così definita:

$$\begin{aligned} \text{se} \quad u &\geq 0 & g(u) &= X \left( e^{\frac{u}{\sigma^2} - 1} - 1 \right) \\ \text{se} \quad u &< 0 & g(u) &= 0. \end{aligned}$$

A questo punto è allora opportuno considerare il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in due variabili indipendenti (con  $a = 1$ ) e fornire alcuni risultati relativi a tale problema che ci saranno utili per risolvere il problema di Black e Scholes.

**Definizione 7.7.** *Dal punto di vista classico il problema di Cauchy per l'equazione del calore omogenea in due variabili indipendenti  $(x, t)$  con  $a = 1$  consiste nel trovare una funzione  $v(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  che sia soluzione in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  dell'equazione:*

$$\partial_t v(x, t) = \partial_{xx}^2 v(x, t) \quad (7.4.4)$$

e soddisfi la condizione iniziale:

$$v(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.4.5)$$

Si noti che condizione necessaria affinché il problema di Cauchy che abbiamo formulato ammetta soluzione è che  $g \in C(\mathbb{R})$ .

Si possono dimostrare diversi teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema (7.4.4), (7.4.5) a seconda delle proprietà di regolarità del dato iniziale  $g(x)$ .

Un teorema classico di esistenza della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore richiede che la funzione  $g$  sia continua e limitata in  $\mathbb{R}$ . Ma per il problema di Black e Scholes tale teorema non è applicabile perchè la funzione  $g(u)$  non è limitata.

Ai fini di ciò che vogliamo ottenere è per noi conveniente enunciare il seguente teorema che stabilisce l'esistenza della soluzione classica del problema di Cauchy (7.4.4), (7.4.5) in  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  con un dato iniziale non limitato.

**Teorema 7.1.** *Supponiamo che la funzione  $g$  sia continua in  $\mathbb{R}$  e tale che*

$$|g(x)| \leq C e^{d|x|^\gamma} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.4.6)$$

dove  $C, d, \gamma$  sono costanti positive con  $\gamma < 2$ .

Allora la funzione  $v(x, t)$  così definita:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \quad v(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) g(y) dy \quad (7.4.7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x, 0) = g(x), \quad (7.4.8)$$

con

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

è soluzione classica del problema di Cauchy (7.4.4), (7.4.5) in  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

#### Dimostrazione

In primo luogo osserviamo che la funzione

$$K_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

detta **nucleo di Gauss-Weierstrass**, definita in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ,  $\forall y$  fissato in  $\mathbb{R}$  gode delle seguenti proprietà, facilmente verificabili:

- 1)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} K_t(x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$ ;
- 2)  $K_t(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ ;

3)  $K_t(x, y)$  è soluzione dell'equazione del calore (7.4.4) in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ;

4)  $\forall t > 0$  fissato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) dx = 1.$$

La proprietà 4) si ottiene immediatamente osservando che per  $y$  fissato in  $\mathbb{R}$  e per  $t > 0$  fissato, il nucleo di Gauss-Weierstrass rappresenta la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale con distribuzione gaussiana avente media uguale a  $y$  e varianza uguale a  $2t$ .

Se si fissa  $x$  in  $\mathbb{R}$ , il nucleo di Gauss-Weierstrass, come funzione di  $(y, t)$ , gode di proprietà del tutto analoghe alle quattro sopra enunciate.

Mostriamo ora che  $v \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ , anzi che  $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ , ossia che la funzione  $v$  possiede continue le derivate di ogni ordine rispetto a  $x$  e a  $t$  in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  e che tali derivate si ottengono dalla (7.4.7) derivando il nucleo di Gauss-Weierstrass sotto il segno di integrale.

A tal fine osserviamo che se deriviamo rispetto a  $x$  e a  $t$  un certo numero di volte sotto il segno di integrale l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy,$$

otteniamo una combinazione lineare a coefficienti costanti di integrali del tipo:

$$I_{k,m}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{k+1/2}} (x - y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy, \quad (7.4.9)$$

dove  $k, m$  sono numeri interi non negativi.

In particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} I_{0,0}(x, t).$$

Per un teorema di analisi riguardante la derivazione sotto il segno di integrale, il risultato che ci proponiamo di ottenere risulta provato se mostriamo che l'integrale (7.4.9) è uniformemente convergente rispetto a  $(x, t)$  su ogni rettangolo  $R := [-l, l] \times [t_0, T] \in \mathbb{R}^2$  con  $l, t_0$  numeri positivi arbitrari, qualunque siano  $k, m$ .

Ricordiamo che l'integrale (7.4.9) converge uniformemente rispetto a  $(x, t)$  su ogni rettangolo  $[-l, l] \times [t_0, T]$  se in corrispondenza di ognuno di tali rettangoli esiste una funzione  $\varphi(y)$  non negativa e sommabile in  $\mathbb{R}$  tale che

$$\forall (x, t) \in R, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{1}{t^{k+1/2}} (x - y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \leq \varphi(y). \quad (7.4.10)$$

D'altra parte,  $\forall (x, t) \in \mathcal{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , abbiamo

$$\left| \frac{1}{t^{k+1/2}} (x - y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \leq \frac{1}{t_0^{k+1/2}} (l + |y|)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |g(y)|. \quad (7.4.11)$$

Inoltre, se  $(x, t) \in \mathcal{R}$ , possiamo scrivere:

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \leq e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}} = e^{-\frac{x^2+y^2-2xy}{4T}} = e^{-\frac{x^2}{4T}} e^{-\frac{-y^2+2xy}{4T}} \leq e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}}. \quad (7.4.12)$$

Tenendo presente (7.4.11) e (7.4.12), preso un numero  $\delta > 0$ , che per il momento supponiamo arbitrario, otteniamo:

$$\forall (x, t) \in \mathcal{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{1}{t^{k+1/2}} (x - y)^m e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) \right| \leq \frac{1}{t_0^{k+1/2}} (l + |y|)^m e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} |g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}}. \quad (7.4.13)$$

Per la (7.4.6) abbiamo:

$$|g(y)| e^{-\frac{y^2}{\delta}} \leq C e^{-\frac{y^2}{\delta}} (1 - d\delta |y|^{\gamma-2}). \quad (7.4.14)$$

Poiché  $\gamma < 2$ , deduciamo che la funzione

$$C(l + |y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}} (1 - d\delta |y|^{\gamma-2})$$

è sommabile su  $\mathbb{R}$ .

Allora per concludere che ogni integrale  $I_{k,m}(x, t)$  è uniformemente convergente rispetto a  $(x, t)$  su ogni rettangolo  $\mathcal{R}$  è sufficiente provare che, scegliendo in maniera opportuna il numero  $\delta$ , la funzione

$$e^{-\frac{-y^2+2l|y|}{4T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} = e^{-\frac{(4T-\delta)y^2+2l\delta|y|}{4\delta T}}$$

è limitata in  $\mathbb{R}$ .

A tal fine poniamo:

$$f(y) = (4T - \delta)y^2 + 2l\delta |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

ed assumiamo  $\delta > 4T$ .

Come si verifica facilmente, il grafico della funzione  $f(y)$  per  $y \geq 0$  è l'arco di parabola che parte dall'origine, ha la convessità rivolta verso il basso, ha il vertice nel punto di ascissa  $y_v = \frac{l\delta}{\delta - 4T}$  e di ordinata  $f(y_v) = \frac{l^2\delta^2}{\delta - 4T}$ ,

interseca nuovamente l'asse  $y$  nel punto di ascissa  $\frac{2l\delta}{\delta - 4T}$  e dopo tale punto giace al di sotto dell'asse  $y$ .

Ovviamente, il grafico di  $f(y)$  per  $y \leq 0$  è l'arco di parabola simmetrico rispetto all'asse delle ordinate rispetto all'arco di parabola che rappresenta il grafico della funzione per  $y \geq 0$ .

Dunque

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(y) \leq f(y_v) = \frac{l^2 \delta^2}{\delta - 4T},$$

da cui deduciamo

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad e^{\frac{-y^2 + 2l|y|}{4\delta T}} e^{\frac{y^2}{\delta}} \leq e^{\frac{l^2 \delta}{4T(\delta - 4T)}}.$$

In conclusione, posto

$$M = \frac{C}{t_0^{k+1/2}} e^{\frac{l^2 \delta}{4T(\delta - 4T)}},$$

otteniamo la (7.4.10) con  $\varphi(y)$  data da

$$\varphi(y) = M (l + |y|)^m e^{-\frac{y^2}{\delta}} (1 - d\delta |y|^{\gamma-2}).$$

Perciò  $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ , ossia la funzione  $v$  possiede continue le derivate di ogni ordine rispetto a  $x$  e a  $t$  in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  e tali derivate si ottengono dalla (7.4.7) derivando il nucleo di Gauss-Weierstrass sotto il segno di integrale.

Da tale risultato deduciamo immediatamente che  $v$  è soluzione dell'equazione (7.4.4) in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , poiché lo è il nucleo di Gauss-Weierstrass come funzione di  $(x, t)$  per ogni  $y$  fissato in  $\mathbb{R}$ .

Infatti  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  si ha

$$\partial_t v - \partial_{xx}^2 v = \int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_t K_t(x, y) - \partial_{xx}^2 K_t(x, y)] g(y) dy = 0.$$

Perché il teorema sia dimostrato in maniera completa occorre infine provare che la funzione  $v$ , che è continua in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , è continua anche fin per  $t = 0$ .

Tenendo presente come  $v$  è definita per  $t = 0$ , è sufficiente dimostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t) = g(x).$$

Fissiamo allora  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  e consideriamo la differenza:

$$\begin{aligned} v(x, t) - g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) K_t(x, y) dy - g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(y) - g(x)] K_t(x, y) dy, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà 4) di  $K_t$ .  
Per il valore assoluto si deduce:

$$|v(x, t) - g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y) - g(x)| K_t(x, y) dy.$$

Se ora facciamo il cambiamento di variabile d'integrazione

$$\frac{x - y}{2\sqrt{t}} = q,$$

da cui deduciamo

$$y = x - 2\sqrt{t}q,$$

otteniamo:

$$|v(x, t) - g(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq. \quad (7.4.15)$$

L'integrale al secondo membro della relazione scritta sopra è sicuramente convergente  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Infatti

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - 2\sqrt{t}q)| e^{-q^2} dq + |g(x)| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq. \end{aligned}$$

Il primo integrale converge per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, mentre

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = 1.$$

Allora, grazie alla convergenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq,$$

fissato ad arbitrio un numero  $\epsilon > 0$ , possiamo trovare un numero  $N > 0$  tale che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq < \frac{\epsilon}{3}, \\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{+N}^{+\infty} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq < \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Se spezziamo l'integrale a secondo membro della (7.4.15) nella somma di tre integrali, di cui il I esteso da  $-\infty$  a  $-N$ , il II da  $-N$  a  $+N$  e il III da  $+N$  a  $+\infty$ , deduciamo:

$$|v(x, t) - g(x)| < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| e^{-q^2} dq. \quad (7.4.16)$$

A questo punto sfruttiamo la continuità della funzione  $g$ ; grazie a tale proprietà, in corrispondenza del numero  $\epsilon$  prefissato esiste un numero  $t_0 > 0$  tale che:

$$\forall t \text{ per cui } 0 < t < t_0 \text{ si ha } |g(x - 2\sqrt{t}q) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall q \in [-N, +N].$$

Allora

$$|v(x, t) - g(x)| < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-q^2} dq = 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \epsilon.$$

In conclusione deduciamo che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists t_0 > 0 \text{ tale che } \forall t \text{ per cui } 0 < t < t_0 \text{ si ha}$$

$$|v(x, t) - g(x)| < \epsilon,$$

da cui per definizione di limite segue

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t) = g(x).$$

Il teorema è così dimostrato in maniera completa.

Ritorniamo ora al problema di Cauchy di Black e Scholes:

$$Y_z = Y_{uu} \quad (7.4.17)$$

$$Y(u, 0) = g(u) \quad (7.4.18)$$

dove  $g$  è così definita:

$$\text{se } u \geq 0 \quad g(u) = X \left( e^{\frac{2u}{\sigma^2} - 1} - 1 \right)$$

$$\text{se } u < 0 \quad g(u) = 0.$$

Poiché il problema di partenza era considerato in  $(0, +\infty) \times (0, T]$ , per la relazione che sussiste tra le vecchie variabili  $(S, t)$  e le nuove  $(u, z)$ , il problema

(7.4.17), (7.4.18), cui siamo pervenuti deve essere risolto in  $\mathbb{R} \times [0, z_0)$  dove  $z_0$  è il valore che assume  $z$  per  $t = 0$  dato da

$$z_0 = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T.$$

La funzione  $g$ , come abbiamo osservato in precedenza, soddisfa alle ipotesi del teorema ?? e dunque:

$$Y(u, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} g(\xi) d\xi \quad \forall z \in (0, z_0)$$

ossia per come è definita  $g$

$$Y(u, z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4z}} X \left( e^{\frac{\xi}{\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)}} - 1 \right) d\xi \quad \forall z \in (0, z_0). \quad (7.4.19)$$

Dunque la funzione data dalla (7.4.19) per  $z \in (0, z_0)$  e coincidente con  $g(u)$  per  $z = 0$  è la soluzione del problema di Cauchy (7.4.17), (7.4.18) in  $\mathbb{R} \times [0, z_0)$  o anche più in generale in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

Effettuiamo un cambiamento della variabile d'integrazione nella (7.4.19), ponendo  $q = -\frac{u-\xi}{\sqrt{2z}}$ .

Tenendo presente che se  $\xi = 0$  allora  $q = -\frac{u}{\sqrt{2z}}$ , che se  $\xi \rightarrow +\infty$  allora  $q \rightarrow +\infty$  e che inoltre  $dq = -\frac{\xi}{\sqrt{2z}}$ , la (7.4.19) si scrive nella forma

$$Y(u, z) = \int_{-\frac{u}{\sqrt{2z}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left( e^{\frac{q\sqrt{2z}+u}{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} - 1 \right) dq. \quad (7.4.20)$$

A questo punto poniamo:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Allora per  $t < T$ :

$$\frac{u}{\sqrt{2z}} = \frac{\frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \ln \frac{S}{X} - \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t-T)}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \sqrt{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (T-t)}} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2, \\ \frac{q\sqrt{2z} + u}{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} &= \sigma q\sqrt{T-t} + \ln \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t). \end{aligned}$$

La (7.4.20) si può perciò scrivere nella forma

$$\begin{aligned} Y(u, z) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \left( e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \ln \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - 1 \right) dq = \\ &= - \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X dq + \\ &+ \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} X \frac{S}{X} e^{\sigma q\sqrt{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} dq = \\ &= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - 2\sigma q\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t))} e^{r(T-t)} dq \\ &= -XN(d_2) + \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq \end{aligned}$$

dove abbiamo posto:

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

che è la funzione di distribuzione per una distribuzione gaussiana standard (media 0 e varianza 1) e nel I integrale a secondo membro (nella seconda riga) abbiamo fatto il cambiamento di variabile d'integrazione  $q = -s$ .

Riguardo al secondo integrale, cambiamo variabile d'integrazione ponendo  $y = q - \sigma\sqrt{T-t}$  per cui  $q = -d_2 \implies y = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1$ . Perciò l'integrale si scrive come

$$\begin{aligned} S \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{r(T-t)} dq &= S e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= S e^{r(T-t)} N(d_1). \end{aligned}$$

In conclusione per  $Y(u, z)$  troviamo la seguente espressione:

$$Y(u, z) = S e^{r(T-t)} N(d_1) - XN(d_2).$$

Per la relazione tra  $c(S, t)$  e  $Y(u, z)$  infine deduciamo:

$$c(S, t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (7.4.21)$$

che è la **formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo di una call europea**.

Alla formula (7.4.21) siamo pervenuti supponendo  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 > 0$ . Alla medesima formula si arriva nell'ipotesi opposta  $\frac{2r}{\sigma^2} - 1 < 0$ .

Possiamo riassumere i risultati trovati nel seguente teorema

**Teorema 7.2.** *Se sono soddisfatte le ipotesi enunciate all'inizio del paragrafo 2.2, il prezzo  $c = c(S, t)$  di un'opzione call europea per  $t < T$  è dato dalla formula di Black e Scholes (7.4.21).*

Notiamo che nell'espressione di  $c(S, t)$  compaiono  $S$  e  $Xe^{-r(T-t)}$  che rappresenta il prezzo di esercizio scontato al tempo attuale e che questi sono ponderati con  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ . Come vedremo nel paragrafo seguente  $N(d_1)$  risulta uguale a  $\Delta$ , mentre  $N(d_2)$  può essere interpretata come la probabilità che l'opzione venga esercitata.

### Osservazione 2.

Dalla formula di Black e Scholes, tenendo presente le espressioni di  $d_1$  e  $d_2$ , vediamo che per stabilire il prezzo di una call europea al tempo attuale bisogna conoscere i seguenti dati:

- il prezzo di esercizio  $X$  e la data di esercizio  $T$  stabiliti nel contratto
- il tasso d'interesse di mercato  $r$
- il prezzo  $S$  e la volatilità  $\sigma$  dell'azione sottostante.

### Esempio

Ci proponiamo di determinare il prezzo di una call europea al tempo attuale  $t$  conoscendo i seguenti dati:

$$S_t = 100 \quad X = 105 \quad r = 20\% \quad \sigma = 30\% \quad T - t = 0,5.$$

In primo luogo calcoliamo  $d_1$  e  $d_2$  che risultano dati da

$$d_1 \simeq 0,35, \quad d_2 \simeq 0,14.$$

In secondo luogo si determinano i valori approssimati di  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ :

$$N(d_1) \simeq 0,6368, \quad N(d_2) \simeq 0,5557.$$

Infine sostituendo nella formula di Black e Scholes i valori trovati e i rimanenti dati si ottiene

$$c \simeq 10,89.$$

## 7.5 Calcolo delle derivate della funzione $c$ .

Ci proponiamo ora di calcolare in base alla formula di Black e Scholes le cosiddette greche, ossia le derivate del prezzo di una call europea rispetto ad alcuni dei parametri da cui dipende.

Dimostriamo dapprima il seguente

**Lemma 7.1.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\frac{\partial c}{\partial d_1} = 0.$$

Dimostrazione

Per la formula di Black e Scholes abbiamo:

$$c(S, t) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}),$$

da cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial d_1} &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial d_1} \left( \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) - \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial d_1} \left( \int_{-\infty}^{d_1 - \sigma \sqrt{T-t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( S e^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t)} e^{-\frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Il lemma è provato se dimostriamo che

$$S e^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} = 0.$$

Ricordando che

$$\forall a, b > 0 \quad a - b = 0 \iff \ln a - \ln b = 0,$$

consideriamo la differenza dei logaritmi di  $S e^{-\frac{d_1^2}{2}}$  e  $X e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}}$ :

$$\begin{aligned} \ln S - \frac{d_1^2}{2} - \ln X + r(T-t) + \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2} \\ &= \ln \frac{S}{X} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - d_1 \sigma \sqrt{T-t} \\ &= \ln \frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - d_1 \sigma \sqrt{T-t} = 0, \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione di  $d_1$ .  
Dunque il lemma è provato.

**Proposizione 7.3.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\Delta = N(d_1).$$

Dimostrazione

Dalla formula di Black e Scholes scritta nella forma

$$c(S, t) = S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}),$$

vediamo che  $c$  dipende da  $S$  sia direttamente sia indirettamente tramite  $d_1$ .  
Otteniamo dunque:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} = N(d_1),$$

dove abbiamo sfruttato il lemma 7.1.

Osserviamo che  $N(d_1) \in (0, 1)$  e dunque  $c$  è funzione crescente di  $S$ .

**Proposizione 7.4.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\rho := \frac{\partial c}{\partial r} > 0.$$

Dimostrazione

Considerando la formula di Black e Scholes ed applicando il lemma 7.1, otteniamo:

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial r} + X e^{-r(T-t)} (T-t) N(d_2) = X e^{-r(T-t)} (T-t) N(d_2) > 0.$$

Rileviamo che  $c$  è funzione crescente del tasso di interesse.

**Proposizione 7.5.** *Dalla formula di Black e Scholes si ottiene:*

$$\Theta := \frac{\partial c}{\partial t} < 0.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial t} - X r e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \\ &- X e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Ma la prima derivata è nulla per il lemma 7.1, mentre

$$N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}}.$$

Dunque

$$\Theta = -X r e^{-r(T-t)} N(d_2) - \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} < 0.$$

Si ha perciò che  $c$  è decrescente rispetto al tempo, ossia, tenendo presente che  $T - t > 0$ , più la scadenza è lontana più vale la call, più siamo vicini alla scadenza meno vale la call.

Una conferma di tale affermazione si ha dalla seguente

**Proposizione 7.6.** *Dalla formula di Black e Scholes discende:*

$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial T} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial T} + X r e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \\ &\quad + X r e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \\ &= X r e^{-r(T-t)} N(d_2 + \frac{X}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t) - \frac{(d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}) > 0. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza ci dice che al crescere di  $T$ , ossia a data di scadenza più lontana, la call aumenta di valore.

**Proposizione 7.7.** *Dalla formula di Black e Scholes si deduce:*

$$\text{Vega} := \frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0.$$

Dimostrazione

Dalla formula di Black e Scholes ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - X r e^{-r(T-t)} N'(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) (-\sqrt{T-t}) \\ &= X e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t} > 0. \end{aligned}$$

All'aumentare della volatilità del titolo sottostante aumenta il prezzo della call europea.

**Proposizione 7.8.** *Data una call europea, si ottiene:*

$$\Gamma := \frac{\partial^2 c}{\partial^2 S} > 0.$$

Dimostrazione

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial^2 S} = \frac{\partial N}{\partial S}(d_1) = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} > 0.$$

Osserviamo che  $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$  per cui  $\Delta$  è una funzione crescente di  $S$ .

Se  $\Gamma$  è molto grande, in una strategia di delta-hedging bisogna continuamente aggiustare il  $\Delta$ , mentre se  $\Gamma$  è piccolo, il portafoglio può essere mantenuto per un certo periodo senza eccessivi rischi.

**Proposizione 7.9.** *Dalla formula di Black e Scholes si ottiene:*

$$\frac{\partial c}{\partial X} < 0.$$

Dimostrazione

$$\frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial c}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial X} - e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) = -e^{-r(T-t)} N(d_2) < 0.$$

Dunque al crescere di  $X$  cala il valore della call. Questo perché il pagamento di una call europea alla scadenza è pari a  $\max\{S - X, 0\}$ . Al crescere di  $X$  cala il pagamento che ci dà la call e quindi la call vale di meno.

Si osservi che quest'ultima derivata non è una greca.



# Capitolo 8

## Estensioni della formula di Black e Scholes e sue applicazioni

### 8.1 Formula di Black e Scholes per call americane e put europee.

La formula che abbiamo stabilito per la valutazione del prezzo delle call europee si può estendere anche alle call americane aventi come sottostante un'azione, poiché siamo nelle ipotesi di assenza di arbitraggio e di assenza di dividendi. Infatti, come abbiamo visto nel Capitolo 2, in tali ipotesi, il valore di una call americana è esattamente uguale a quello di una call europea.

Il modello di Black e Scholes può essere applicato, con opportune modifiche, anche alle opzioni put europee, tenendo presente che per tali opzioni  $\Delta$  è negativo.

In questo caso, facendo le stesse ipotesi e sfruttando gli stessi argomenti visti per le call, si compone un portafoglio coperto costituito da una posizione lunga su un'azione e una posizione lunga su  $\frac{1}{|\Delta|}$  opzioni put. La copertura perfetta è mantenuta modificando con continuità l'ammontare di put in portafoglio.

Seguendo lo stesso ragionamento svolto per le call, troviamo che il valore  $p(S, t)$  di una put è soluzione di un'equazione differenziale analoga alla (7.2.4):

$$\partial_t p + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 p + r S \partial_S p - r p = 0. \quad (8.1.1)$$

cui si associa la condizione alla scadenza  $T$ :

$$p(S_T, T) = \max\{X - S_T, 0\}.$$

Si ottiene pertanto una soluzione analoga alla (7.4.21), data da

$$p(S, t) = -S N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(-d_2). \quad (8.1.2)$$

Si può pervenire alla (8.1.2) anche più velocemente utilizzando la formula di Black e Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni call e la relazione di parità put-call ottenuta nel Capitolo 2.

Precisamente, se indichiamo con  $p(S, t)$  il prezzo di una put europea, avente come sottostante un'azione avente valore  $S$ , con prezzo di esercizio  $X$  e data di esercizio  $T$ , abbiamo:

$$p(S, t) = c(S, t) - S + X B(T - t) \quad (8.1.3)$$

dove  $c(s, t)$  è il prezzo di una call europea con uguale prezzo di esercizio, uguale data di esercizio e uguale azione sottostante, mentre  $B(\tau)$  è il prezzo di un'obbligazione priva di rischio che paga 1 unità di conto dopo un tempo pari a  $\tau$ .

Se si suppone costante il tasso annuo di interesse e che il regime di capitalizzazione sia quello di capitalizzazione istantanea, si ha

$$B(T - t) = e^{-r(T-t)},$$

per cui la (8.1.3) si scrive nella forma:

$$p(S, t) = c(S, t) - S + X e^{-r(T-t)}.$$

Se ora a  $c(S, t)$  sostituiamo l'espressione data dalla formula di Black e Scholes otteniamo:

$$\begin{aligned} p(S, t) &= S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) - S + X e^{-r(T-t)} \\ &= S(N(d_1) - 1) + X e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_d^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Se nell'ultimo integrale scritto sopra facciamo il cambiamento di variabile d'integrazione  $x = -y$ , deduciamo:

$$1 - N(d) = \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = N(-d).$$

In definitiva troviamo che la formula che consente di prevedere il prezzo di una put europea è la (8.1.2):

$$p(S, t) = -S N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(-d_2).$$

Vediamo di ricalcolare il  $\Delta$  per una put europea utilizzando non la (8.1.2) ma la relazione di parità put-call e il valore di  $\Delta$  trovato per una call:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(c - S + X e^{-r(T-t)}) = \frac{\partial c}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1 = -N(-d_1).$$

Perciò per una put europea si ha  $\Delta \in (-1, 0)$ , così come avevamo già trovato nel Capitolo 2. Questo ha delle conseguenze sulle strategie di delta-hedging che coinvolgono le opzioni put europee aventi un'azione come titolo sottostante. Infatti in tal caso, come abbiamo già osservato più volte, occorre tenere una posizione dello stesso segno sulla put e sull'azione.

Usando la relazione di parità put-call oppure derivando direttamente la (8.1.2) si possono calcolare tutte le derivate di  $p(S, t)$  corrispondenti a quelle di  $c(S, t)$  che abbiamo calcolato nel capitolo precedente.

Ad esempio si può provare che:

$$\frac{\partial p}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} > 0, \dots$$

Nel caso generale di opzioni put americane non è possibile determinare una formula esplicita per la valutazione del loro prezzo  $P(S, t)$  perché, essendo conveniente esercitarle prima della data di scadenza, è incerta la data in cui vengono esercitate.

Solo nel caso delle **put americane perpetue**, ossia senza data di scadenza, poiché il tempo è ininfluenza, è possibile determinare un'espressione esplicita per il loro prezzo.

In primo luogo, dimostriamo la seguente proprietà generale delle put americane

**Proposizione 8.1.** *In assenza di possibilità di arbitraggio, per una put americana si ha:*

$$P(S, t) \geq \max\{X - S, 0\}.$$

Dimostrazione.

Dapprima dimostriamo che  $P \geq 0$ .

Ragioniamo per assurdo supponendo  $P < 0$ .

Allora comprando la put si ha un costo negativo, mentre quando viene esercitata

il pagamento è in ogni caso non negativo. Avremmo così creato un portafoglio di arbitraggio contro l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio.

Dimostriamo ora che  $P \geq X - S$ .

Ragioniamo ancora per assurdo supponendo  $P < X - S$ .

Comprando la put ed esercitandola subito si ha un costo negativo e nei tempi futuri il portafoglio ha valore nullo. Siamo quindi in presenza di un portafoglio di arbitraggio contro l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio. La proposizione è così dimostrata.

Consideriamo ora una put americana perpetua ed osserviamo che, essendo il tempo ininfluenza sul suo prezzo, questo non dipende da  $t$ .

Il nostro scopo è di trovarne il prezzo  $P(S)$  prima che venga esercitata.

Osserviamo in primo luogo che se  $P(S) > \max\{X - S, 0\}$ , l'opzione non viene ancora esercitata perché esercitandola si otterrebbe meno del suo valore sul mercato. In questo caso vale perciò l'equazione differenziale di Black e Scholes con  $\partial_t P = 0$ :

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 P}{dS^2} + r S \frac{dP}{dS} - r P = 0. \quad (8.1.4)$$

La (8.1.4) è un'equazione differenziale ordinaria del II ordine, lineare, omogenea, a coefficienti non costanti.

Vediamo se tale equazione ammette soluzioni della forma  $S^\lambda$  con  $\lambda$  da determinarsi.

Sostituendo nell'equazione abbiamo:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \lambda(\lambda - 1) S^{\lambda-2} + r S \lambda S^{\lambda-1} - r S^\lambda = 0.$$

Dividendo entrambi i membri per  $S^\lambda$  e moltiplicandoli per 2 otteniamo:

$$\sigma^2 \lambda^2 - (\sigma^2 - 2r)\lambda - 2r = 0.$$

Il discriminante dell'equazione di II grado in  $\lambda$  scritta sopra è

$$\sigma^4 + 4r^2 - 4\sigma^2 r + 8\sigma^2 r = (\sigma^2 + 2r)^2,$$

cosicché l'equazione ammette due radici reali e distinte date da

$$\lambda_1 = \frac{\sigma^2 - 2r + (\sigma^2 + 2r)}{2\sigma^2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma^2 - 2r - (\sigma^2 + 2r)}{2\sigma^2} = -\frac{2r}{\sigma^2}.$$

Allora la (8.1.4) ammette le due soluzioni linearmente indipendenti  $S$  e  $S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$  e dunque la sua soluzione generale è data da :

$$C_1 S + C_2 S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie.

Per determinare le due costanti teniamo presente che  $P(S) \rightarrow 0$  per  $S \rightarrow +\infty$  cosicché deduciamo  $C_1 = 0$  e dunque sfruttando tale condizione  $P(S)$  si riduce a:

$$P(S) = C_2 S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}.$$

Se indichiamo con  $\tilde{S}$  il valore di  $S$  al quale la put viene esercitata, si deve avere ovviamente  $X - S > 0$  perchè sarebbe irrazionale esercitarla ed inoltre sussiste l'uguaglianza:

$$P(\tilde{S}) = X - \tilde{S}.$$

Infatti, se in luogo di  $=$  avessimo  $<$  ci sarebbero possibilità di arbitraggio, mentre se avessimo  $>$  la put non verrebbe esercitata.

Possiamo allora determinare  $C_2$  richiedendo che

$$C_2 \tilde{S}^{-\frac{2r}{\sigma^2}} = X - \tilde{S}$$

da cui

$$C_2 = (X - \tilde{S}) \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}}.$$

Perciò

$$P(S) = (X - \tilde{S}) \left( \frac{S}{\tilde{S}} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}. \quad (8.1.5)$$

Determiniamo ora il valore di  $\tilde{S}$  in corrispondenza del quale il valore dell'opzione è massimo.

Fissato  $S$ , la funzione al secondo membro della (8.1.5) risulta una funzione solo di  $\tilde{S}$  che denotiamo con  $f(\tilde{S})$ . Per determinare il valore di  $\tilde{S}$  che rende massimo  $P(S)$  con  $S$  fissato, si deve necessariamente avere

$$\frac{df}{d\tilde{S}}(\tilde{S}) = 0,$$

ossia

$$-\left(\frac{S}{\tilde{S}}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} + (X - \tilde{S}) S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{2r}{\sigma^2} \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} = 0.$$

Mettendo in evidenza  $S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$  risulta:

$$-S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \left[ \tilde{S} - \frac{2r}{\sigma^2} (X - \tilde{S}) \right] = 0$$

da cui

$$\tilde{S} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}}. \quad (8.1.6)$$

E' facile vedere che se  $\tilde{S}$  è dato dal secondo membro della (8.1.6), effettivamente  $P(S)$  presenta un massimo.

Infatti, per quanto ottenuto in precedenza:

$$\frac{dP}{d\tilde{S}}(S) = -S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \left[ \left(1 + \frac{2r}{\sigma^2}\right) \tilde{S} - \frac{2r}{\sigma^2} X \right] \quad (8.1.7)$$

da cui deduciamo che

$$\text{se } \tilde{S} < \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{allora } \frac{dP}{d\tilde{S}}(S) > 0,$$

mentre

$$\text{se } \tilde{S} > \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{allora } \frac{dP}{d\tilde{S}}(S) < 0.$$

A questo punto siamo in grado di esplicitare la funzione  $P(S)$ .

Se

$$S > \tilde{S} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}},$$

l'opzione non viene esercitata e il suo valore si ottiene sostituendo nella (8.1.5) la (8.1.6):

$$\begin{aligned} P(S) &= \left( X - \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \right) S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left( \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \\ &= \left( \frac{2r}{\sigma^2} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left( \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \right)^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Se

$$S \leq \tilde{S} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{X}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}},$$

la put viene esercitata e quindi

$$P(S) = X - S.$$

Facciamo alcune osservazioni.

**Osservazione 1**

La funzione  $P(S)$  è continua in  $(0, +\infty)$ .

La funzione  $P(S)$ , per come è definita, è continua per  $S > \tilde{S}$  e per  $S < \tilde{S}$ , ma potrebbe presentare una discontinuità per  $S = \tilde{S}$ .

In realtà è continua anche per tale valore di  $S$ . Infatti:

$$\lim_{S \rightarrow \tilde{S}^+} P(S) = \lim_{S \rightarrow \tilde{S}^+} \left[ (X - \tilde{S}) \left( \frac{S}{\tilde{S}} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \right] = X - \tilde{S} = P(\tilde{S}).$$

**Osservazione 2**

La funzione  $P(S)$  è derivabile rispetto a  $S$  in  $(0, +\infty)$ .

La funzione  $P(S)$ , per come è definita, è derivabile per  $S > \tilde{S}$  e per  $S < \tilde{S}$ , ma potrebbe non esserlo per  $S = \tilde{S}$ .

In realtà è derivabile anche per tale valore di  $S$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \tilde{S}^+} \frac{dP}{dS}(S) &= \lim_{S \rightarrow \tilde{S}^+} \left[ (X - \tilde{S}) \tilde{S}^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left( -\frac{2r}{\sigma^2} \right) S^{-\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \right] \\ &= -\frac{2r}{\sigma^2} \frac{X - \tilde{S}}{\tilde{S}} = -\frac{2r}{\sigma^2} \frac{X - \frac{2r}{2r + \sigma^2} X}{\frac{2r}{2r + \sigma^2} X} \\ &= -\frac{2r}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2r} = -1. \end{aligned}$$

$$\lim_{S \rightarrow \tilde{S}^-} \frac{dP}{dS}(S) = \lim_{S \rightarrow \tilde{S}^-} \frac{d(X - S)}{dS} = -1.$$

Figura 8.1

## 8.2 Estensioni del modello di Black e Scholes.

Il modello di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni è rilevante sotto le ipotesi fatte nel capitolo precedente ma, tuttavia, in molte applicazioni alcune di queste ipotesi vengono violate. In questi casi occorre verificare se è possibile formulare delle estensioni del modello, per tener conto delle restrizioni che caratterizzano sia il mercato delle opzioni sia quello del titolo sottostante.

A partire dal contributo di **R.C. Merton** (1973) sono state elaborate numerose estensioni, volte a generalizzare le assunzioni fatte nel modello originario di Black e Scholes.

Tra esse ricordiamo le principali, che hanno avuto per oggetto le seguenti ipotesi:

- *Assenza di dividendi*
- *Prezzo d'esercizio*
- *Esercizio anticipato*
- *Tasso d'interesse*
- *Tasse e costi di transazione*
- *Processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante*
- *Volatilità*

Esaminiamo ora in dettaglio i singoli punti.

- **Assenza di dividendi.** Un'estensione del modello riguarda il venir meno dell'ipotesi di assenza di dividendi o altre forme di pagamenti fatte ai possessori dei titoli sottostanti.  
**R. Merton** (1973) generalizza il modello di Black e Scholes per includere il pagamento di dividendi costanti o proporzionali; **R. Geske** (1978) considera il caso di dividendi stocastici.
- **Prezzo d'esercizio.** Nel 1973 **R. Merton** considera il caso di un prezzo di esercizio funzione decrescente della vita residua:  $X = X(T - t)$ .  
**S. Fisher** (1978) e **W. Margrabe** (1978) hanno rimosso l'ipotesi di prezzo di esercizio noto e costante nel tempo ed hanno esaminato il caso di prezzo di esercizio incerto.
- **Esercizio anticipato.** Il modello di Black e Scholes vale per opzioni europee e per call americane scritte su azioni che non paghino dividendi, dato che in questo caso l'esercizio prematuro non è ottimale. La maggioranza

delle opzioni quotate, tuttavia, è del tipo americano; esse sono soggette a esercizio prima della scadenza.

**R. Roll** (1977) ha studiato il problema della valutazione del prezzo di una call che può essere esercitata prima della scadenza quando l'azione sottostante stacca dividendi certi prima della scadenza dell'opzione.

Il problema della valutazione del prezzo di una put americana è stato oggetto di numerosi lavori, tra cui quelli di **M. Brennan** ed **E. Schwartz** (1977), **R. Geske** e **H. Johnson** (1984), **I.J. Kim** (1990).

**P. Carr** (1998) utilizza una tecnica di randomizzazione per valutare put americane su azioni che pagano dividendi.

- **Tasso d'interesse.** L'assunzione di tasso d'interesse costante non è necessaria, ma è possibile trovare una soluzione del problema di Black e Scholes anche nel caso in cui il tasso d'interesse  $r(t)$  sia una funzione nota del tempo.

Nella realtà il tasso d'interesse non è noto in anticipo ma è stocastico, e i tassi d'interesse attivi e passivi sono diversi. **R. Merton** (1973) ha rimosso l'ipotesi di tasso d'interesse noto e costante nel tempo e ha esteso il modello nel caso di un tasso d'interesse stocastico.

- **Tasse e costi di transazione.** Molti autori si soffermano sulle ipotesi che riguardano le caratteristiche dei mercati: per esempio **M. Scholes** (1976) determina gli effetti della tassazione sul prezzo delle opzioni, **H.E. Leland** (1985) rimuove l'ipotesi di assenza di costi di transazione e, assumendo invece che la strategia di delta-hedging sia costosa, esamina l'impatto dei costi di transazione sulla performance del portafoglio coperto.

- **Processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante.** Un'ipotesi fondamentale e criticabile è quella relativa al processo stocastico seguito dal prezzo del titolo sottostante.

**R. Merton** (1976) ha criticato l'ipotesi secondo la quale gli scambi avvengono con continuità e ha proposto un modello misto, in cui il prezzo azionario segue un processo che è la somma di uno continuo ed uno discontinuo o a salti.

**J. Cox**, **S.A. Ross** e **M. Rubinstein** (1979) si sono basati sul modello binomiale, considerando un caso di processo stocastico che avviene in tempo discreto.

Lavori più recenti, come quello di **E. Eberlein** e **U. Keller** (1995), hanno analizzato l'ipotesi di una distribuzione dei rendimenti azionari con code più spesse di quella normale. Sulla base di analisi statistiche di dati finanziari si utilizza la distribuzione iperbolica in luogo di quella gaussiana.

- **Volatilità.** La formula di Black e Scholes è ottenuta supponendo che la varianza dei prezzi azionari sia costante. Molti lavori empirici hanno invece dimostrato che la volatilità cambia e c'è una dipendenza temporale. **H. Johnson** e **D. Shanno** (1987) e **J. Hull** e **A. White** (1987) hanno studiato il caso in cui la varianza si modifica. Infine **N. Hofmann**, **E. Platen** e **M. Schweizer** (1992) hanno studiato il caso di volatilità stocastica e dipendente dal passato.

### 8.3 Applicazioni della formula di Black e Scholes: valutazione dei titoli emessi da un'impresa.

In questo paragrafo e nel successivo vedremo due applicazioni della formula di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni. Esamineremo dapprima la valutazione dei titoli di un'impresa, che possono essere visti come opzioni sul valore dell'impresa stessa e quindi considereremo l'utilizzazione della formula di Black e Scholes sia per strategie di copertura.

Consideriamo un'impresa che si finanzia emettendo obbligazioni zero-coupon ed azioni, ossia titoli di debito e titoli di capitale. Alla scadenza  $T$  l'impresa è soggetta ad una promessa di pagamento pari a  $D$  (valore nominale del debito) agli obbligazionisti.

Al tempo  $T$  l'impresa liquida i beni e distribuisce i ricavi. Sia  $V$  il valore di liquidazione dell'impresa. In primo luogo al tempo  $T$  devono essere pagati i detentori delle obbligazioni e in un secondo tempo gli azionisti se vi è la possibilità di pagarli, ossia:

- se  $V > D$  gli obbligazionisti ricevono  $D$  e gli azionisti  $V - D$
- se  $V \leq D$  gli obbligazionisti ricevono  $V$  e gli azionisti 0.

Perciò al tempo  $T$  gli azionisti ricevono  $\max\{V - D, 0\}$  e dunque la valutazione delle azioni emesse dall'impresa è analoga a quella di un'opzione call europea avente come sottostante il valore  $V$  dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a  $D$  e scadenza uguale alla scadenza  $T$  del debito.

Se assumiamo che il valore  $V$  dell'impresa segua un processo geometrico, cioè che si abbia

$$dV = \mu V dt + \sigma V dW$$

con  $\mu$  e  $\sigma$  costanti e  $W$  processo di Wiener, la formula di valutazione delle azioni è ottenibile dalla formula di Black e Scholes sostituendo  $V$  al posto di  $S$ ,  $D$  al posto di  $X$ , interpretando  $T - t$  come la vita residua del debito e  $\sigma^2$  come il

tasso di varianza del rendimento dell'impresa.

Si ottiene:

$$c = V N(d'_1) - D e^{-r(T-t)} N(d'_2)$$

dove

$$d'_1 = \frac{\ln \frac{V}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d'_2 = \frac{\ln \frac{V}{D} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d'_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Dividendo il valore di  $c$  per il numero delle azioni emesse dall'impresa è possibile valutare il prezzo equo di un'azione.

Consideriamo ora quanto ricevono alla data  $T$  gli obbligazionisti.

Gli obbligazionisti ricevono  $\min\{V, D\} = D - \max\{D - V, 0\}$ .

Il termine  $\max\{D - V, 0\}$  viene a rappresentare il pagamento di un'opzione put europea avente come sottostante il valore  $V$  dell'impresa, prezzo di esercizio uguale a  $D$  e scadenza uguale alla scadenza  $T$  del debito. Il valore di tale put al tempo  $t$  è dato allora da

$$p = -V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} N(-d'_2)$$

dove  $d'_1, d'_2$  sono i parametri definiti in precedenza che compaiono in  $c$ .

Allora al tempo  $T$  il valore delle obbligazioni emesse dall'impresa è dato da

$$y_T = D - p_T$$

e dunque al tempo  $0 \leq t < T$  il valore delle obbligazioni è

$$\begin{aligned} y &= D e^{-r(T-t)} - p \\ &= D e^{-r(T-t)} + V N(-d'_1) - D e^{-r(T-t)} N(-d'_2) \\ &= V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} (1 - N(-d'_2)) \\ &= V N(-d'_1) + D e^{-r(T-t)} N(d'_2). \end{aligned}$$

Perciò in ogni istante possiamo valutare il valore complessivo delle obbligazioni emesse da un'impresa e dividendo per il numero delle obbligazioni possiamo dedurre il valore equo di ogni obbligazione.

### Esempio 8.1

Si considerino i seguenti dati relativi ad un'impresa:

$D = 80$ ,  $V = 70$ ,  $r = 1\%$  annuo, data di liquidazione  $T = 10$  anni,  $\sigma = 40\%$  annuo.

Se non ragioniamo in termini di formula di Black e Scholes ed andiamo a valutare la situazione dell'impresa al tempo  $t = 0$  facendo la differenza tra il valore dell'impresa e il valore scontato del debito si ottiene:

$$V - D e^{-rT} = 70 - 80 e^{-0,1} = -2,317.$$

L'impresa appare indebitata e un investitore su tale base non comprerebbe azioni dell'impresa stessa.

Se invece calcoliamo il valore dell'impresa distribuito in azioni utilizzando la formula di Black e Scholes, otteniamo:

$$c = V N(d'_1) - D e^{-rT} N(d'_2) = 32,485.$$

Dunque l'impresa, pur indebitata, può suscitare interesse negli investitori poiché ha ampi margini di miglioramento.

## 8.4 Applicazioni della formula di Black e Scholes: strategie di copertura di delta-hedging.

Vediamo di illustrare l'utilizzazione della formula di Black e Scholes di valutazione del prezzo delle opzioni per strategie di copertura delta-hedging. Si tratta di tecniche di copertura usate prevalentemente per la gestione del rischio nel caso di vendita di opzioni da parte di un'impresa o in generale da parte di un operatore finanziario. Per proteggere la posizione assunta in opzioni call o put dalla variabilità dell'andamento del prezzo del sottostante si assume una posizione di segno opposto (opzioni call) o dello stesso segno (opzioni put) sul titolo stesso.

### Esempio 8.2

Per meglio comprendere come si attuano tali tecniche di copertura, consideriamo le tabelle 8.1 e 8.2 che descrivono due simulazioni della strategia di delta-hedging messa in atto da una società a seguito dell'emissione sul mercato (posizione corta) di 10 contratti di opzioni call su azioni che chiameremo Zeus. Il numero di azioni sottostanti ad ogni contratto è 10.000. Il contratto di opzione ha scadenza tra 20 settimane, il prezzo di esercizio  $X$  è di 3,5 euro, il tasso annuo di interesse  $r$  è pari al 5% e la volatilità del prezzo dell'azione è pari al 20% annuo.

Allo scadere della ventesima settimana, se ogni call avente come sottostante un'azione di valore  $S$  viene esercitata, la società emittente riceve  $X$  dando in cambio un'azione di valore  $S$  e quindi per ogni call ha una perdita pari a  $S - X$ , mentre l'acquirente riceve simmetricamente un pagamento pari a  $S - X$ .

Nel caso in cui il prezzo dell'azione è diventato molto più alto di  $X$ , la società subisce una notevole perdita. Allora per tutelarsi opera una strategia di delta-hedging, comprando  $\Delta$  azioni per ogni call. Tale strategia dovrebbe comportare dei continui aggiustamenti poiché  $\Delta$  varia al trascorrere del tempo. Supponiamo che venga ribilanciato il portafoglio soltanto alla fine di ogni settimana.

All'inizio della I settimana il prezzo di ogni azione è pari a 3,301 euro. Possiamo calcolare il prezzo iniziale  $c(S, 0)$  di ogni opzione mediante la formula di Black

e Scholes sostituendo i dati (ovviamente con  $t = 0$ ). Il risultato è 0,1086 euro. Tenendo presente che ogni contratto ha come sottostante 10.000 azioni e che il numero dei contratti è 10, la società riceve inizialmente un premio totale per l'emissione delle call pari a

$$100.000 \cdot c(S, 0) = 100.000 \cdot 0,1086 = 10.860 \text{ euro.}$$

Prendiamo dapprima in esame la tabella 8.1.

Come già osservato, inizialmente il prezzo di ogni azione è 3,301 euro. Se calcoliamo  $\Delta = N(d_1)$  con  $S = 3,301$  e  $t = 0$ , troviamo

$$\Delta = 0,399.$$

Allora per attuare la strategia di delta-hedging la società deve comprare  $\Delta \cdot 10.000 \cdot 10 = 39.900$  azioni e dunque deve far fronte al costo di  $3,301 \cdot 39.900 = 131.709,9$  euro indebitandosi.

Alla fine della prima settimana si calcola nuovamente  $\Delta = N(d_1)$  tenendo presente che il prezzo delle azioni è passato a  $S = 3,281$ . Precisamente si ottiene:

$$\Delta = 0,373,$$

che è un valore inferiore a quello precedente. Per avere un portafoglio protetto la società deve avere 37.300 azioni e poiché ne possiede 39.900 ne deve vendere 2.600. In tal modo il debito contratto in precedenza si riduce.

Si procede poi in modo analogo sino alla fine della ventesima settimana. Quando il  $\Delta$  cresce la società deve comprare delle nuove azioni, mentre quando cala ne deve vendere.

Alla data di scadenza delle call il prezzo  $S$  delle azioni è salito a 3,928 euro ed è superiore al prezzo di esercizio  $X = 3,5$  euro. Dunque alla scadenza le call sono *in the money* e vengono esercitate.

Come si vede dalla tabella, alla fine della ventesima settimana il costo cumulato dalla società è di 361.788,7 euro, ma d'altra parte la società riceve, in seguito all'esercizio delle call,

$$X \cdot 100.000 = 350.000 \text{ euro.}$$

Il costo effettivo dell'operazione è dato da

$$361.788,7 - 350.000 = 11.788,7 \text{ euro.}$$

Se vogliamo attualizzare tale costo, otteniamo:

$$11.788,7 \cdot e^{-0,05 \frac{20}{52}} \simeq 11.504,16 \text{ euro.}$$

Tale cifra è leggermente superiore al premio ottenuto dalla vendita delle call pari a 10.860 euro. Dunque la società non ha perso quasi nulla dall'operazione.

Se lo schema di copertura fosse perfetto, il costo di copertura attualizzato dovrebbe essere esattamente uguale al premio ossia al prezzo iniziale delle call. Il motivo per cui questo non avviene è che il ribilanciamento viene effettuato solo una volta alla settimana e non in tempo continuo. All'aumentare della frequenza del ribilanciamento il costo della copertura si ridurrebbe.

Vediamo che cosa sarebbe successo se la società avesse mantenuto una posizione scoperta, ossia se non avesse attuato alcuna strategia di copertura a seguito delle vendite delle opzioni.

Alla scadenza dei contratti la società avrebbe dovuto sostenere un costo pari a 100.000 volte la differenza tra il prezzo di un'azione e il prezzo di esercizio, cioè:

$$100.000 \cdot (3,928 - 3,5) = 100.000 \cdot 0,483 = 43.800 \text{ euro},$$

costo che, anche se venisse attualizzato, sarebbe comunque molto più alto del costo sostenuto con la strategia di delta-hedging.

Si osservi che dalla tabella 8.1 emerge il fatto che per  $t \rightarrow T^-$  il  $\Delta$  tende a 1. Questo è un risultato generale che vale per ogni call europea che alla scadenza sia *in the money*, come nella tabella 8.1.

**Proposizione 8.2.** *Se una call europea alla scadenza  $T$  è in the money, allora*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = 1,$$

*mentre se è out of the money*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = 0.$$

#### Dimostrazione

Se la call al tempo  $T$  è in the money si ha  $S > X$ , se è out of the money si ha  $S < X$ .

Consideriamo  $d_1$  dato da

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln \frac{S}{X}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}.$$

Se ne effettuiamo il limite per  $t \rightarrow T^-$ , tenendo presente che il secondo termine tende a zero e che il limite di  $\ln \frac{S}{X}$  è positivo o negativo a seconda che la call sia in the money o out of the money, otteniamo:

$$\text{call in the money} \implies \lim_{t \rightarrow T^-} d_1 = +\infty$$

call out of the money  $\implies \lim_{t \rightarrow T^-} d_1 = -\infty$ .

Allora

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = \lim_{t \rightarrow T^-} N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad \text{se la call è in the money}$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \Delta = \lim_{t \rightarrow T^-} N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{se la call è out of the money.}$$

La proposizione è così dimostrata.

Passiamo ora a considerare la tabella 8.2.

Questa si differenzia dalla 8.1 essenzialmente perché prevede che alla fine della ventesima settimana il prezzo  $S$  delle azioni Zeus sia pari a 2,749 euro e dunque inferiore al prezzo di esercizio  $X$ . Le call alla scadenza sono perciò *out of the money*.

Se viene adottata una strategia di delta-hedging, si vede che avvicinandoci alla scadenza il  $\Delta$  tende a zero.

Il costo cumulato alla fine della ventesima settimana è pari a 10.320,78 euro e attualizzato ammonta a 10.124,2 euro.

D'altra parte, il premio ricevuto dalla vendita delle call era 10.860 euro per cui la società consegue un piccolo guadagno, poiché ovviamente le call non vengono esercitate.

In realtà nell'eventualità prevista dalla tabella 8.2 non converrebbe attuare una strategia di copertura, ma ovviamente non si può sapere in anticipo quale sarà il prezzo dell'azione sottostante alla scadenza della call e nell'eventualità opposta di notevole aumento del prezzo delle azioni si rischia di avere perdite molto pesanti.

Come si è visto nell'esempio esaminato, il ribilanciamento prodotto dal delta-hedging comporta che si compra il sottostante quando c'è un rialzo delle quotazioni e lo si vende in momenti di ribasso. E' evidente che questo tende ad enfatizzare le tendenze al rialzo o al ribasso. Se le strategie di copertura vengono operate su vasta scala possono avere effetti destabilizzanti sul mercato. Proprio a tali fatti sono stati imputati alcuni dei grossi crolli finanziari moderni.

Tabella 8.1: **Opzione in the money**

Settimane	Prezzo Azioni	$\Delta$ della call	Azioni comprate	Costo Azioni	Costo cumulato	Costo interessi
0	3,301	0,399	39.900	131.709,9	131.709,9	126,64
1	3,281	0,373	-2.600	-8.530,6	123.305,9	118,56
2	3,300	0,384	1.100	3.630,0	127.054,5	122,17
3	3,318	0,395	1.100	3.649,8	130.826,4	125,79
4	3,376	0,448	5.300	17.382,8	148.845,0	143,12
5	3,582	0,657	20.900	74.863,8	223.851,9	215,24
6	3,522	0,596	-6.100	-21.484,2	202.583,0	194,79
7	3,502	0,572	-2.400	-8.404,8	194.373,0	186,90
8	3,364	0,403	-16.900	-56.851,6	137.708,3	132,41
9	3,497	0,560	15.700	54.902,9	192.743,6	185,33
10	3,438	0,480	-8000	-27.504,0	165.424,9	159,06
11	3,380	0,392	-8.800	-29.744,0	135.840,0	130,62
12	3,513	0,573	18.100	63.585,3	199.555,9	191,88
13	3,612	0,711	13.800	49.845,6	249.593,4	239,99
14	3,551	0,630	-8.100	-28.763,1	221.070,3	212,57
15	3,491	0,537	-10.300	-35.957,3	185.325,5	178,20
16	3,629	0,773	24.600	89.273,4	274.777,1	264,21
17	3,649	0,829	5.600	20.434,4	295.475,7	284,11
18	3,635	0,849	2.000	7.270,0	303.029,8	291,37
19	3,849	1	15.100	58.119,9	361.441,1	347,54
20	3,938	1	0	0	361.788,7	347,87

Tabella 8.2: **Opzione out of the money**

Settimane	Prezzo Azioni	$\Delta$ della call	Azioni comprate	Costo Azioni	Costo cumulato	Costo interessi
0	3,301	0,399	39.900	131.709,9	131.709,9	126,64
1	3,440	0,527	12.800	44.032,0	175.868,50	169,10
2	3,437	0,521	-600	-2.062,2	173.975,40	167,28
3	3,468	0,548	2.700	9.363,6	183.506,30	176,45
4	3,435	0,510	-3.800	-13.053,0	170.629,70	164,07
5	3,382	0,448	-6.200	-20.968,4	149.825,40	144,06
6	3,470	0,539	9.100	31.577,0	181.546,50	174,56
7	3,524	0,596	5.700	20.086,8	201.807,80	194,05
8	3,396	0,442	-15.400	-52.298,4	149.703,50	143,95
9	3,343	0,368	-7.400	-24.738,2	125.109,20	120,30
10	3,200	0,193	-17.500	-56.000,0	69.229,56	66,57
11	3,214	0,190	-300	-964,2	68.331,93	65,70
12	3,150	0,114	-7.600	-23.940,0	44.457,63	42,75
13	3,002	0,025	-8.600	-26.717,8	17.782,58	17,10
14	2,993	0,014	-1.100	-3.292,3	14.507,38	13,95
15	3,019	0,011	-300	-905,7	13.615,63	13,09
16	3,076	0,013	200	615,2	14.243,92	13,70
17	3,060	0,003	-1.000	-3.060,0	11.197,62	10,77
18	3,081	0,001	-200	-616,2	10.592,19	10,18
19	2,915	0	-100	-291,5	10.310,87	9,91
20	2,749	0	0	0	10.320,78	9,92