Olimpiadi di Matematica

Alberto Calabri

Università degli Studi di Ferrara

20 gennaio 2022

Definizione di polinomio

Un polinomio nella variabile, o indeterminata, x è una scrittura del tipo

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

Si dice che:

- il polinomio ha grado 5;
- -6 è il termine noto del polinomio;
- 3 è il coefficiente direttore del polinomio;
- $3, 0, -2, 4, 1, -6$ sono ordinatamente i coefficienti del polinomio dei termini di grado rispettivamente 5, 4, 3, 2, 1 e 0.

Attenzione!

I coefficienti dei polinomi possono essere numeri interi, razionali, reali oppure complessi. Conseguentemente, i polinomi possono avere proprietà differenti a seconda di dove vivono i coefficienti.

Funzioni polinomiali

Si dice che una funzione f è polinomiale se esiste un polinomio $p(x)$ tale che f associa ad ogni numero α il valore $p(\alpha)$, ottenuto sostituendo α al posto della variabile x e svolgendo le operazioni algebriche.

Polinomio monico

Un polinomio si dice monico se il suo coefficiente direttore, cioè il coefficiente di grado massimo, è 1.

Osservazione 1

Il termine noto di un polinomio $p(x)$ è uguale a $p(0)$.

Osservazione 2

Inoltre $p(1)$ è la somma algebrica di tutti i coefficienti (ognuno con il suo segno) del polinomio $p(x)$.

Esercizio

Il polinomio $ax^2 + bx + c$ assume valori interi per ogni valore intero della variabile x:

cioè se x è un intero n, allora $an^2 + bn + c$ è sempre un numero intero.

Domanda

Quale delle seguenti affermazioni non può essere dedotta dall'ipotesi?

- **A** c è intero;
- **B** $a + b + c$ è intero;
- **C** a, b, c sono interi;
- **D** se a è intero anche b è intero;
- **E** $2a$ è intero.

Esempio interessante

Il polinomio

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{x(x+1)}{2}$$

non ha coefficienti interi, ma tutte le volte che a x sostituiamo un numero intero n troviamo che

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

è un numero intero perché o n è pari, e quindi $n/2$ è un intero, oppure $n+1$ è pari, e quindi $(n+1)/2$ è un intero.

Gauss

Se n è un intero positivo, allora

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

è la somma di tutti i numeri interi positivi da 1 a n compresi.

Principio di identità dei polinomi

Due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se e solo se hanno ordinatamente gli stessi coefficienti, il che accade se e solo se sono uguali come funzioni polinomiali, cioè se $p(\alpha) = q(\alpha)$ per ogni numero α.

I polinomi si possono sommare o moltiplicare tra di loro: dati

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6, \qquad q(x) = 2x^3 - 1,$$

si trova che la loro somma è il polinomio

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 3x^5 + 4x^2 + x - 7$$

mentre il loro prodotto è

$$(p \cdot q)(x) = p(x)q(x) = 6x^8 - 4x^6 + 5x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 - x + 6.$$

Comportamento del grado di un polinomio

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi di grado rispettivamente n ed m. Allora il grado del polinomio prodotto $p(x)q(x)$ è

$$n + m,$$

mentre il grado del polinomio somma $p(x) + q(x)$ è minore o uguale al

$$\max\{n, m\}.$$

Il polinomio nullo è il polinomio con tutti i coefficienti zero: non si definisce il grado del polinomio nullo (alcuni lo pongono uguale a $-\infty$).

Polinomi costanti

Le costanti c possono essere considerate come polinomi di grado 0 (se $c \neq 0$).

Divisione (euclidea) con resto di polinomi

Dati due polinomi, per esempio

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6, \qquad q(x) = 2x^3 - 1,$$

possiamo fare la divisione (euclidea) con resto: si trova

$$p(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 1\right) q(x) + \left(\frac{11}{2}x^2 + x - 7\right)$$

dove

$$\frac{3}{2}x^2 - 1 \text{ è il quoziente}, \qquad \frac{11}{2}x^2 + x - 7 \text{ è il resto.}$$

Divisibilità

Se il resto della divisione di $p(x)$ per $q(x)$ è 0, si dice che $p(x)$ è divisibile per $q(x)$.

Divisione (euclidea) con resto di polinomi

In generale si può sempre fare la divisione con resto del polinomio $p(x)$ per il polinomio $q(x)$ se $q(x)$ ha grado positivo.

Polinomi quoziente e resto

Il polinomio quoziente e il polinomio resto della divisione di $p(x)$ per $q(x)$ sono univocamente determinati se richiediamo che li resto sia il polinomio nullo oppure abbia grado strettamente minore del grado di $q(x)$.

L'esempio della pagina precedente mostra che se dividiamo due polinomi a coefficienti interi, non è detto che i polinomio quoziente e resto abbiano coefficienti interi.

Si può dimostrare che se $p(x)$ e $q(x)$ hanno coefficienti interi e $q(x)$ è monico, allora anche i polinomi quoziente e resto hanno coefficienti interi.

Massimo comun divisore di due polinomi

Si dice massimo comun divisore di due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ un polinomio di grado massimo che divide sia $p(x)$ che $q(x)$.

Nota Bene!

Non c'è un massimo comun divisore univocamente determinato: due polinomi con questa proprietà sono però uno multiplo dell'altro.

Teorema di Bézout

Se $d(x)$ è un massimo comun divisore di $p(x)$ e $q(x)$, allora esistono due polinomi $m(x)$ e $n(x)$ tali che

$$m(x)p(x) + n(x)q(x) = d(x).$$

Per trovare $m(x)$ ed $n(x)$ si percorre all'indietro l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, così come si fa per la divisione euclidea con resto fra i numeri interi.

Radici di un polinomio

Si dice che il numero α è radice del polinomio $p(x)$ se

$$p(\alpha) = 0.$$

Per esempio, 1 è radice del polinomio

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$$

perché $p(1) = 3 - 2 + 4 + 1 - 6 = 0$,
mentre -1 non è radice di $p(x)$ perché

$$p(-1) = -3 + 2 + 4 - 1 - 6 = -4 \neq 0.$$

Si dice che α è una radice intera, razionale, reale, complessa a seconda che α sia un numero intero, razionale, reale, complesso.

Se α è radice di $p(x)$, allora $p(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - \alpha)$, e viceversa.

Teorema del resto

I calcoli della pagina precedente ci dicono anche che

$$p(-1) = -4$$

è il resto della divisione di

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$$

per il polinomio $(x + 1)$ perché

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + p(\alpha),$$

cioè $p(\alpha)$ è il resto della divisione di $p(x)$ per il polinomio $(x - \alpha)$.

Osservazione importante

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi e siano m, n interi. Allora

$(m - n)$ divide il numero intero $p(m) - p(n)$.

Radici razionali di polinomi a coefficienti interi

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, come per esempio

$$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$$

e $\alpha = \dfrac{m}{n}$ è una radice razionale (ridotta ai minimi termini), allora

m è un divisore del termine noto,

n è un divisore del coefficiente direttore.

Nell'esempio le possibili radici razionali di $p(x)$ sono

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}.$$

Facendo le sostituzioni al posto della x, si trova che l'unica radice razionale di $p(x)$ dell'esempio è $\alpha = 1$.

Molteplicità di una radice di un polinomio

Sia α una radice di un polinomio $p(x)$, quindi $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$.

Molteplicità di una radice

Per esempio, si dice che α ha molteplicità 3 se $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^3$ ma non per $(x-\alpha)^4$.
Si dice che α ha molteplicità m se

- $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^m$ ma
- $p(x)$ non è divisibile per $(x-\alpha)^{m+1}$.

La molteplicità m di una radice α di un polinomio $p(x)$ è sempre positiva e minore o uguale al grado del polinomio $p(x)$.

Si dice che una radice α di un polinomio $p(x)$ è semplice se ha molteplicità $m=1$.

Radici dei polinomi di secondo grado

Consideriamo un polinomio di secondo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, a coefficienti reali.

Discriminante

Il discriminante di $p(x)$ è $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta > 0$, allora $p(x)$ ha due radici reali distinte:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Se $\Delta = 0$, allora $p(x)$ ha una radice doppia $-\dfrac{b}{2a}$.
- Se $\Delta < 0$, allora $p(x)$ non ha radici reali ma ha due radici complesse coniugate.

Esempi di molteplicità di radici

Attenzione!

Il polinomio $x^2 - 1$ ha due radici 1 e -1 semplici, cioè di molteplicità 1, perché
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Il polinomio $p(x) = x^3 - 1$ ha la radice 1 semplice, cioè di molteplicità 1, perché
$$p(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
e 1 non è radice di $x^2 + x + 1$.

Il polinomio $q(x) = 2x^2 + 4x + 2$ ha radice -1 doppia perché
$$q(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2.$$

Radici complesse

Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse, se ogni radice viene contata tante volte quante è la sua molteplicità.

Esplicitamente, se $p(x)$ è un polinomio monico di grado n a coefficienti complessi, allora si può fattorizzare $p(x)$ come prodotto di n polinomi di grado 1, in modo unico a meno dell'ordine dei fattori:

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono le n radici di $p(x)$ in modo tale che ogni radice è stata ripetuta a seconda della sua molteplicità.

Per esempio il polinomio $x^2 + 1$ si può fattorizzare come

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria.

Numeri complessi

Per la stessa ragione, un polinomio a coefficienti interi, razionali o reali di grado n ha esattamente n radici complesse (sempre contate con la loro molteplicità) e quindi al massimo n radici intere, razionali o reali.

Numeri complessi

Un numero complesso è per esempio

$$\lambda = -\frac{2}{3} + 4i$$

dove $-2/3$ è la sua parte reale e 4 è la sua parte immaginaria.

Si dice che il coniugato $\bar{\lambda}$ del numero complesso precedente λ è

$$\bar{\lambda} = -\frac{2}{3} - 4i$$

Se un numero complesso $\lambda = a + bi$, con a, b numeri reali, è radice di un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali, allora anche il coniugato $\bar{\lambda} = a - bi$ è radice di $p(x)$, con la stessa molteplicità di λ.

Fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali

Un polinomio monico $p(x)$ a coefficienti reali si può scrivere in modo unico, a meno dell'ordine dei fattori, come prodotto di polinomi di grado 1 oppure 2 a coefficienti reali.

Tale fattorizzazione segue da quella complessa: i fattori di primo grado derivano dalle radici reali, mentre quelli di secondo grado si ottengono accoppiando le radici complesse coniugate non reali.

Il polinomio $x^4 + 1$ si fattorizza sui numeri reali così:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

mentre $x^4 + 1$ è irriducibile sui numeri razionali.

Un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali di grado dispari ha sempre almeno una radice reale. Se il grado è pari, può non avere nessuna radice reale.

Esempi di fattorizzazioni

Il polinomio $p(x) = x^4 - 1$ si fattorizza come prodotto di polinomi a coefficienti interi:

$$p(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Il polinomio $p(x) = x^n + 1$ non si può fattorizzare come prodotto di polinomi a coefficienti interi se n è pari, mentre se $n = 2m + 1$ è dispari:

$$p(x) = x^{2m+1} + 1 = (x + 1)(x^{2m} - x^{2m-1} + \cdots - x + 1).$$

Il polinomio $p(x) = x^n - 1$ ha sempre il polinomio $(x - 1)$ come fattore:

$$p(x) = x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$

Il polinomio $p(x) = x^{2n} - 1$ si può sempre scrivere come:

$$p(x) = x^{2n} - 1 = (x^n + 1)(x^n - 1)$$

dove $x^n - 1$ si può scrivere come sopra.

Esercizio

Francesco vuole scrivere il polinomio $x^{16} + x$ come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1.
Quanti fattori potrà ottenere al massimo?

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E 5

Relazioni tra radici e coefficienti di un polinomio

Se un polinomio $p(x)$ non è monico, dividendo per il suo coefficiente direttore si può ottenere un polinomio monico che ha le stesse radici.

Un polinomio $p(x)$ monico di grado 2 si può scrivere nella forma

$$p(x) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici (complesse) di $p(x)$, contate con molteplicità.

Un polinomio $p(x)$ monico di grado 3 si può scrivere nella forma

$$p(x) = x^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)x - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le radici (complesse) di $p(x)$, contate con molteplicità.

In generale $p(x) = x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0$ con radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ è tale che $c_{n-1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ e $c_0 = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Esercizio

Due interi hanno somma -4 e prodotto -21.
Quanto vale il maggiore di tali interi?

- A -7
- B -3
- C -1
- D 3
- E 7

Esercizio

La somma dei reciproci delle radici di $ax^2 + bx + c = 0$, dove $a, b, c \neq 0$, è

- **A** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$
- **B** $\dfrac{b}{c}$
- **C** $-\dfrac{c}{b}$
- **D** $-\dfrac{a}{b}$
- **E** $-\dfrac{b}{c}$

Esercizio

Il polinomio $p(x)$ ha grado maggiore o uguale a 2 ed i suoi coefficienti sono tutti numeri interi.
Quale dei seguenti numeri divide certamente $p(169) - p(1)$?

- A 25
- B 32
- C 36
- D 49
- E 56

Esercizio

Siano a, b, c le soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0.$$

Sapendo che $ab = 10$, calcolare $c(a + b)$.

- A -28
- B -18
- C 21
- D 22
- E non si può determinare

Esercizio

Il numero intero positivo n è tale che il polinomio

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots - 2014x^{2013} + nx^{2014}$$

abbia almeno una soluzione intera.
Quanto vale n?

- A 1
- B 2
- C 2014
- D 2015
- E nessuna delle precedenti

Esercizio

Il numero reale a è tale che l'equazione

$$x^2 + 2ax + 1 = 0$$

ha due soluzioni reali coincidenti.
Quanti sono i possibili valori di a?

- A nessuno
- B uno
- C due
- D tre
- E quattro

Esercizio

Per quanti valori distinti del numero reale b l'equazione

$$x^2 + bx - 16 = 0,$$

ha due soluzioni reali (eventualmente coincidenti)
e queste sono entrambe numeri interi?

- (A) due
- (B) tre
- (C) quattro
- (D) cinque
- (E) sei

Esercizio

Nell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ si sa che $c < 0$. Allora certamente:

A. l'equazione non ha radici reali,
B. l'equazione ha due radici reali coincidenti,
C. l'equazione ha una radice reale positiva e una radice reale negativa,
D. l'equazione ha due radici reali positive,
E. l'equazione ha due radici reali negative.

Esercizio

La soluzione della seguente equazione:

$$\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} + \cdots + \frac{x+2001}{2001} = 2001$$

è

- **A** Qualunque numero x
- **B** 1001
- **C** 10
- **D** 1
- **E** nessuna delle precedenti

Esercizio

Se vale l'identità

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax^3+bx^2+cx+d$$

quanto vale $a+b+c+d$?

A. $\dfrac{57}{4}$

B. 9

C. $\dfrac{289}{8}$

D. 35

E. nessuno dei valori precedenti

Esercizio

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due trinomi, dove per trinomio si intende la somma di tre monomi non nulli di gradi diversi tra loro (ad esempio

$$-x^5 + 3x^2 + 2x$$

è un trinomio). Facciamo il prodotto $p(x)q(x)$: da quanti monomi non nulli è composto, come minimo, tale prodotto?

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Esercizio

Il polinomio

$$x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 1$$

ha quattro radici reali a, b, c, d.
Quanto vale

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\ ?$$

- A -2
- B 0
- C -1
- D 2
- E nessuno dei valori precedenti

Esercizio

Sapendo che l'equazione

$$2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$$

ha quattro soluzioni reali a, b, c, d, quanto fa

$$a + b + c + d + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \ ?$$

- **A** -7
- **B** $\dfrac{21}{5}$
- **C** $\dfrac{10}{21}$
- **D** $\dfrac{5}{2}$
- **E** -5

Esercizio

Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera?

- **A** $abc = 0$
- **B** $c = ab$
- **C** $c = a + b$
- **D** $b^2 = ac$
- **E** nessuna delle risposte precedenti è corretta

Esercizio

Due polinomi monici a coefficienti interi $p(x)$ e $q(x)$ sono tali che il loro massimo comun divisore sia $(x-1)(x-2)$, il loro minimo comune multiplo sia

$$(x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x+1)$$

e il grado di $p(x)$ sia minore o uguale al grado di $q(x)$.
In quanti modi può essere scelto $p(x)$?

- A 4
- B 5
- C 8
- D 10
- E 12

Esercizio

Sapendo che k è un numero intero e che l'equazione

$$x^{10} + kx^2 + 4 = 0$$

ha almeno una soluzione data da un numero intero x, quanti valori distinti può assumere k?

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E infiniti

Esercizio

Sia $P(x)$ un polinomio i cui coefficienti sono o 0 o 1.
Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- A $P(2)$ non può valere 51
- B $P(3)$ non può valere 37
- C $P(3)$ non può valere 92
- D $P(4)$ non può valere 20
- E $P(5)$ non può valere 150