

ESERCIZI DI RIPASSO DI MATEMATICA

INSIEMISTICA

ESERCIZIO 1. È vero o falso che $\{7, 2, 3, 4, 1\} = \{2, 1, 4, 3, 7\}$?

ESERCIZIO 2. Che relazione insiemistica c'è fra gli insiemi

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\} \quad \text{e} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\} ?$$

ESERCIZIO 3. Che relazione insiemistica c'è fra gli insiemi

$$E = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 2\} \quad \text{e} \quad F = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\} ?$$

ESERCIZIO 4. Se A è l'insieme dei numeri naturali minori di 10 e B è l'insieme dei numeri naturali dispari, determina $A \cap B$, $A \setminus B$, $\mathbb{N} \setminus B$ e $\mathbb{N} \setminus (A \cap B)$.

ESERCIZIO 5. Se $A = \{1, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, determina $A \times B$ e $B \times A$.

ESERCIZIO 6. In un campione di 300 studenti universitari, tutti conoscono almeno una lingua straniera tra inglese, francese e tedesco. Inoltre 225 conoscono l'inglese, 80 il francese e 33 sia l'inglese che il francese. Infine 40 studenti conoscono il tedesco e nessuno di questi conosce il francese. Quanti studenti del campione conoscono sia l'inglese che il tedesco?

ESERCIZIO 7. Siano A e B sottoinsiemi di un insieme Ω . Verifica che $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, dove $\overline{B} = \Omega \setminus B$ è il complementare di B in Ω .

ESERCIZIO 8. Dimostra, partendo dalle definizioni, che $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ e che $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

LOGICA ELEMENTARE

ESERCIZIO 9. Sia $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è multiplo di } 6\}$. L'affermazione

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \text{esiste } h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 2h$$

è vera o falsa? Che cosa esprime?

ESERCIZIO 10. Sia $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è multiplo di } 2 \text{ e di } 5\}$. L'affermazione

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \text{esiste } h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 5h$$

è vera o falsa? Che cosa esprime?

ESERCIZIO 11. Scrivi la negazione della frase "Tutti i giovani amano le canzoni dei Beatles".

ESERCIZIO 12. Scrivi la negazione della frase "Alcuni bambini delle scuole materne credono a Babbo Natale".

ESERCIZIO 13. Scrivi la negazione della frase “Se domani piove, allora dormo fino a tardi”.

ESERCIZIO 14. Il tuo assistente asserisce che masticare una foglia di ananas due volte al giorno guarisce in un mese qualsiasi cancro alla prostata. Cosa devi fare per convincerlo senza ombra di dubbio che ha torto?

ESERCIZIO 15. Un tuo collega geloso tenta di convincere il tuo assistente ad andare a lavorare con lui dicendogli che certamente ha ragione in quanto lui stesso conosce decine di persone guarite dal cancro alla prostata dopo aver masticato foglie di ananas. Come controbatti?

ESERCIZIO 16. Il tuo assistente (di ritorno da un viaggio alle Maldive che gli avevi offerto per evitare che andasse a lavorare con il tuo collega dell’esercizio precedente) asserisce che masticare foglie di betel riduce gli stimoli della fame. Cosa devi fare per verificare senza ombra di dubbio se ha ragione?

ESERCIZIO 17. Quale delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x^4$.
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \pi x < 7x$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{21}{5} < x + \pi$.
- (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow x^2 > x$.
- (e) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$.
- (f) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow x^{1/2} < x$.

dove \forall significa “per ogni”.

ESERCIZIO 18. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

- (a) $\frac{2}{x-2} < 3 \Rightarrow 2 < 3(x-2)$.
- (b) $\sqrt{2x+1} > x-1 \Rightarrow 2x+1 > (x-1)^2$.
- (c) $\sqrt{x} > x \Rightarrow x > x^2$.
- (d) $\frac{1}{x} \leq x \Rightarrow 1 \leq x^2$.

ESERCIZIO 19. Indichiamo con $P(x)$ la proprietà “ $x + 2 > 10$ ”.

- (a) È vero o falso che $\forall x \in \mathbb{N}$ vale $P(x)$?
- (b) È vero o falso che $\exists x \in \mathbb{N}$ per cui vale $P(x)$?
- (c) Determina (se possibile) un insieme $A \subset \mathbb{N}$ per cui risulti vera l’affermazione “ $\forall x \in A$ vale $P(x)$ ”.
- (d) Determina (se possibile) un insieme $B \subset \mathbb{N}$ per cui risulti vera l’affermazione “ $\exists x \in B$ per cui vale $P(x)$ ”.

ESERCIZIO 20. Determina quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- (a) x è pari $\Rightarrow x$ è divisibile per 4.
- (b) y è negativo $\Rightarrow -y$ è positivo.
- (c) z non è pari $\Rightarrow z$ non è divisibile per 10.

ESERCIZIO 21. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Determina quali delle seguenti implicazioni sono vere.

- (a) $x - 1 = 7 \Rightarrow (x - 1)^2 = 49$.
- (b) $(x + 2)^2 = 16 \Rightarrow x + 2 = 4$.

(c) $x > 4 \Rightarrow x^2 > 4x$.

ESERCIZIO 22. Posto $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è multiplo di } 6\}$, determina quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- (a) $x \in A \Rightarrow \forall h \in \mathbb{Z}, x = 6h$.
 (b) $x \in A \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : x = 3h$.
 (c) $x \in A \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : x = 6h$.
 (d) $x \in A \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : x = 12h$.
 (e) $\exists h \in \mathbb{Z} : x = 2h \Rightarrow x \in A$.
 (f) $\exists h \in \mathbb{Z} : x = 12h \Rightarrow x \in A$.

Fra le implicazioni (a)–(f), ce n'è una che esprime il fatto che

- condizione necessaria affinché un numero sia multiplo di 6 è che sia multiplo di 3?
- condizione sufficiente affinché un numero sia multiplo di 6 è che sia multiplo di 12?

NUMERI E OPERAZIONI

ESERCIZIO 23. Quali fra i seguenti numeri sono razionali?

- (a) 3,38.
 (b) 6^4 .
 (c) $6/7$.
 (d) $\sqrt{8}$.
 (e) $\sqrt{36}/4$.
 (f) $(1, 11)^7$.
 (g) $2 + \pi$.
 (h) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/3$.

ESERCIZIO 24. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \quad \frac{3}{5}, \quad -0,5, \quad \sqrt{2}, \quad (-2)^{-4}, \quad -\frac{7}{3}.$$

ESERCIZIO 25. Esprimi i seguenti numeri nella forma a^r per opportuni $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$:

- (a) $7^{-3}/7^{-5}$.
 (b) $1/\sqrt{3\sqrt{3}}$.
 (c) $5^{1/5}/\sqrt[5]{5}$.
 (d) $3^3 + 3^3 + 3^3$.
 (e) $1/\left(2^4\sqrt{2\sqrt{2}}\right)$.
 (f) $\sqrt[3]{6^2}\sqrt{6}/\sqrt{6^3}$.
 (g) $1/\left(4^2\sqrt{2\sqrt{2}}\right)$.

ESERCIZIO 26. Esprimi le seguenti espressioni sotto forma di un'unica frazione:

- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
 (b) $\frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}$.

$$(c) \frac{1}{a+b} - \frac{3}{a-b}.$$

$$(d) \frac{1}{a(a+b)} + \frac{2}{b(a+b)}.$$

ESERCIZIO 27. Sapendo che

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ricava l'espressione di R_1 in termini di R ed R_2 .

ESERCIZIO 28. Un cono di raggio di base r e altezza h ha volume V dato dalla formula

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Che altezza deve avere un secondo cono con raggio di base doppio ma volume un quinto del precedente?

UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

ESERCIZIO 29. Scrivi le equazioni descritte dalle frasi seguenti e, se possibile, risolvi.

- (a) Se al triplo del numero a si aggiunge 5, e si moltiplica per 2 il risultato, si ottiene la metà della somma di a e della sua metà.
- (b) Se al doppio del numero b si aggiunge 6, e si divide per 3 il risultato, si ottiene il doppio della somma del quadrato di b e di un terzo di b .
- (c) Se al quadruplo di c si toglie 3 e si divide il risultato per 2, si ottiene il doppio della somma di c e del suo terzo.
- (d) Se al quadruplo di d si aggiunge 3 e si divide il risultato per 3, si ottiene il triplo della somma di d e della sua metà.

ESERCIZIO 30. Risolvi le seguenti equazioni rispetto a x .

- (a) $x^2 = 4x$.
- (b) $x^6 = 5x^4$.
- (c) $c^2x = x^3$, con $c > 0$.

ESERCIZIO 31. Risolvi la disequazione $\sqrt{x-1} > x-3$.

ESERCIZIO 32. Trova il numero a tale che

$$\frac{a}{a+b} = 2, \quad a-b = 3.$$

ESERCIZIO 33. Se a è un numero reale negativo, trova per quali valori di x si ha

$$\frac{a}{4-x} > 0.$$

ESERCIZIO 34.

- (a) Se $a < b$, è vero che $a^2 < b^2$?
- (b) Se $a < b$, è vero che $a^{1/5} < b^{1/5}$?

ESERCIZIO 35. Supponi che a e b siano numeri uguali. Allora $a = b$ da cui, moltiplicando per b , ricaviamo $ab = b^2$; sottraendo a^2 ricaviamo $ab - a^2 = b^2 - a^2$. Raccogliendo $b - a$ si trova $a(b - a) = (b + a)(b - a)$ e, semplificando, $a = b + a$. Ma $a = b$; quindi otteniamo $a = a + a = 2a$ e, semplificando, $1 = 2$. Dov'è l'errore?