Modulo di Matematica per il Corso di Laurea in Farmacia, cognomi M-Z
Soluzioni del TEMA 1 del 6 febbraio 2012

Esercizio 1.
Indichiamo con

Ω: lo spazio degli eventi, in questo caso la popolazione;
V: l'evento che una persona sia *vaccinata*;
N: l'evento che una persona *non sia vaccinata*;
M: l'evento che una persona sia *malata*.

Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$p(V) = 17\% = 0.17, \qquad p(M|N) = 12\% = 0.12, \qquad p(M|V) = 2\% = 0.02,$$

e al punto (a) ci chiede di calcolare $p(M)$, mentre al punto (b) di calcolare $p(V|M)$.
Si noti che $p(N) = 1 - p(V) = 1 - 0.17 = 0.83$.

La legge delle alternative ci dice che

$$p(M) = p(M|V)\,p(V) + p(M|N)\,p(N) = 0.02 \cdot 0.17 + 0.12 \cdot 0.83 = \\ = 0.0034 + 0.0996 = 0.103 = 10.3\%,$$

che risponde alla domanda (a). La formula di Bayes implica che

$$p(V|M) = \frac{p(M|V)\,p(V)}{p(M)} = \frac{0.02 \cdot 0.17}{0.103} = \frac{0.0034}{0.103} \simeq 0.033 = 3.3\%$$

dove $\simeq$ significa "circa" e abbiamo approssimato la percentuale alla prima cifra decimale.
In conclusione la risposta alla domanda (a) è 10.3%, mentre la risposta alla domanda (b) è circa 3.3%.

Esercizio 2.
Indichiamo con x_i il tempo di vita dei batteri (calcolato in ore) e con f_i, per $i = 1, \dots, 5$, il numero delle osservazioni. Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$x_1 = 110, \quad x_2 = 130, \quad x_3 = 150, \quad x_4 = 160, \quad x_5 = 180,$$
$$f_1 = 15, \quad f_2 = 30, \quad f_3 = 28, \quad f_4 = 14, \quad f_5 = 13.$$

L'istogramma dei dati raccolti è rappresentato in figura 1.

La **moda** è $x_2 = 130$ ore, perché è il valore più frequente.
La **media** è

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots f_5x_5}{f_1 + f_2 + \cdots + f_5} = \frac{15 \cdot 110 + 30 \cdot 130 + 28 \cdot 150 + 14 \cdot 160 + 13 \cdot 180}{100} = \\ = \frac{1650 + 3900 + 4200 + 2240 + 2340}{100} = \frac{14330}{100} = 143.3 \text{ ore.}$$

Per ottenere lo stesso risultato si poteva ipotizzare che la media fosse vicina a 140 e calcolare:

$$\mu = 140 + \frac{f_1(x_1 - 140) + f_2(x_2 - 140) + \cdots + f_5(x_5 - 140)}{f_1 + \cdots + f_5} = \\ = 140 + \frac{15(-30) + 30(-10) + 28 \cdot 10 + 14 \cdot 20 + 13 \cdot 40}{100} = \\ = 140 + \frac{-450 - 300 + 280 + 280 + 520}{100} = 140 + \frac{330}{100} = 143.3 \text{ ore.}$$

Elencando tutti i 100 valori x_i secondo la loro frequenza, in ordine crescente, ai posti 50 e 51 c'è x_3, quindi la **mediana** è $(x_3 + x_3)/2 = x_3 = 150$ ore.

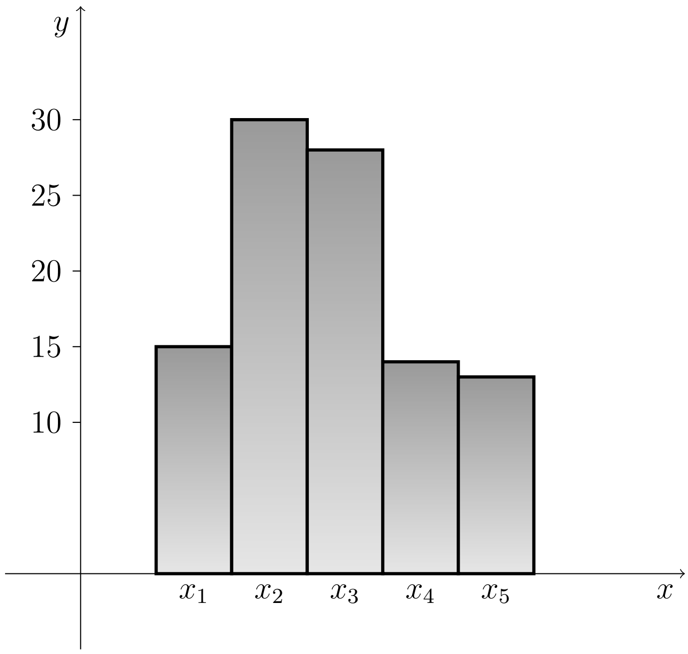

Figura 1. Istogramma dell'esercizio 2.

La **varianza** è

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{f_1(x_1-\mu)^2 + f_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + f_5(x_5-\mu)^2}{f_1+f_2+\cdots+f_5} = \\ &= \frac{15(-33.3)^2 + 30(-13.3)^2 + 28(6.7)^2 + 14(16.7)^2 + 13(36.7)^2}{100} = \\ &= \frac{16633.35 + 5306.7 + 1256.92 + 3904,46 + 17509.57}{100} = \frac{44611}{100} = 446.11\end{aligned}$$

da cui segue che lo **scarto quadratico medio** è $\sigma = \sqrt{446.11} \simeq 21.12$ ore.

Esercizio 3.
La frazione non è definita quando il denominatore x^2-2 è 0, cioè quando $x = \pm\sqrt{2}$. Quindi il **dominio** della funzione f è

$$\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

La funzione $f(x)$ non è pari, per esempio perché $f(-1) = 2 \neq 0 = f(1)$, né dispari, ancora perché $f(-1) = 2 \neq 0 = -f(1)$.
Si ha $f(0) = 1$, quindi il grafico di f interseca l'asse y nel punto $(0,1)$. Inoltre si ha $f(x) = 0$ quando $x^2 + x - 2 = 0$, cioè

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

quindi il grafico di f interseca l'asse x nei punti $(-2,0)$ e $(1,0)$.
Il numeratore x^2+x-2 è positivo per valori esterni, cioè per $x < -2$ e $x > 1$. Il denominatore x^2-2 è positivo pure per valori esterni, cioè per $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$. Mettendoli insieme, la funzione $f(x)$ è positiva per $x < -2$, per $-\sqrt{2} < x < 1$ e per $x > \sqrt{2}$, mentre $f(x)$ è negativa per $-2 < x < \sqrt{2}$ e per $1 < x < \sqrt{2}$.

Studiamo gli eventuali asintoti della funzione $f(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^\pm} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \pm\infty$$

quindi le rette $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ sono **asintoti verticali** di $f(x)$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}} = 1,$$

quindi la retta $y = 1$ è **asintoto orizzontale** di $f(x)$, sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Calcoliamo la **derivata** di $f(x)$. A questo scopo, ricordiamo che la derivata di una frazione

$$\frac{g(x)}{h(x)} \qquad \text{è} \qquad \frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{h(x)^2}\,.$$

Nel nostro caso si ha

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-2)-2x(x^2+x-2)}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^3+x^2-4x-2-2x^3-2x^2+4x}{(x^2-2)^2} =$$
$$= \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2} = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}\,.$$

Sia il numeratore che il denominatore della frazione sono sempre positivi, nei punti in cui $f(x)$ è definita, quindi $f'(x)$ è sempre negativa, quando è definita. Ne segue che $f(x)$ è sempre **decrescente** e non ha né massimi né minimi.

Calcoliamo la **derivata seconda** di $f(x)$. Si ha

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-2)^2-4x(x^2-2)(x^2+2)}{(x^2-2)^4} = -\frac{2x(x^2-2)-4x(x^2+2)}{(x^2-2)^3} =$$
$$= -\frac{2x^3-4x-4x^3-8x}{(x^2-2)^3} = \frac{2x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}\,.$$

Siccome x^2+6 è sempre positivo, il numeratore è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$, mentre il denominatore è positivo per $x < -\sqrt{2}$ e per $x > \sqrt{2}$ ed è negativo per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Mettendoli insieme, $f''(x)$ è positiva, e $f(x)$ è **convessa**, per $-\sqrt{2} < x < 0$ e per $x > \sqrt{2}$ e $f''(x)$ è negativa, e $f(x)$ **concava**, per $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Non ci sono flessi in $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ perché fuori dal dominio di $f(x)$ e di $f''(x)$, mentre $f(x)$ ha un **punto di flesso** in $x = 0$ dove $f(0) = 1$.

Si può allora tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ come nella figura 2.

Esercizio 4.

Siccome $\cos(0) = 1$, il limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per $(1+\cos(x))$:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{3x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to0} \frac{1}{3(1+\cos(x))} = \frac{1}{6}\,,$$

dove la penultima uguaglianza segue dal limite notevole

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \text{che implica} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1.$$

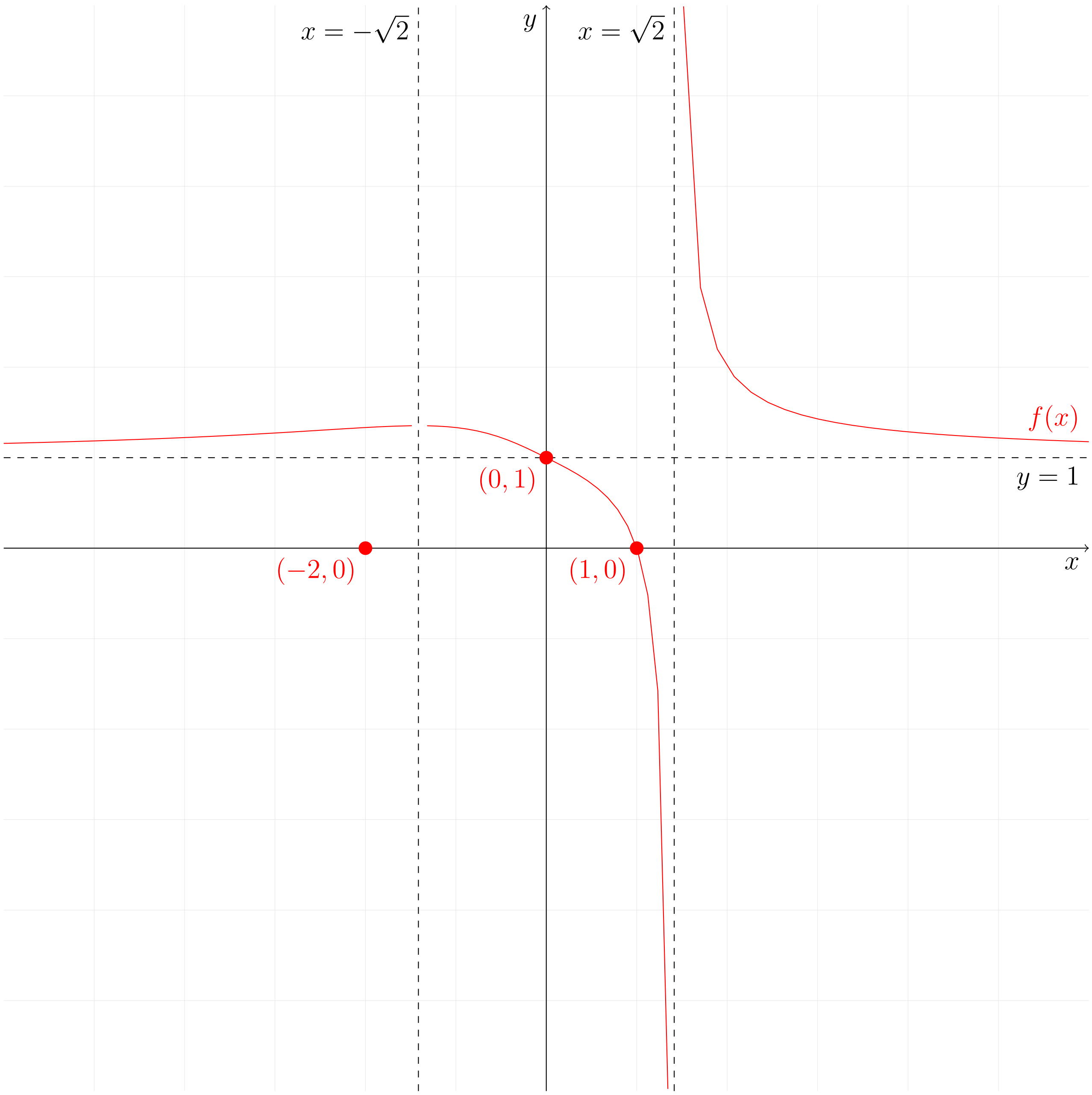

FIGURA 2. Grafico della funzione $f(x)$

Equivalentemente, si può usare il teorema di De l'Hôpital: derivando numeratore e denominatore due volte si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}\,.$$

ESERCIZIO 5.
Si noti che la derivata di e^{-x^2} è $-2xe^{-x^2}$, quindi

$$\int_0^2 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int_0^2 -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{3}{2}\left(e^{-4} - e^0\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2e^4}\,.$$

ESERCIZIO 6.
Due eventi A e B si dicono incompatibili se la loro intersezione è vuota, cioè se $A \cap B = \emptyset$. Due eventi si dicono indipendenti se $p(A|B) = p(A)$ o equivalentemente $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Per esempio, nel lancio di un dado non truccato, gli eventi $\{1\}$ e $\{3\}$ sono incompatibili, mentre gli eventi $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{3, 6\}$ sono indipendenti perché $A \cap B = \{3\}$ e $p(A \cap B) = 1/6 = p(A)p(B) = 1/2 \cdot 1/3$.

Non è vero che due eventi incompatibili sono indipendenti, per esempio gli eventi incompatibili $E = \{1\}$ e $F = \{3\}$ non sono indipendenti perché $p(E \cap F) = 0$ ma $p(E)p(F) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 \neq 0$.