Modulo di Matematica per il Corso di Laurea in Farmacia, cognomi M-Z
Soluzioni del TEMA 1 del 20 dicembre 2010

Esercizio 1.
Indichiamo con

Ω: lo spazio degli eventi, in questo caso tutte le scatole del farmaco;
G: l'evento che una scatola sia prodotta dallo stabilimento più *grande*;
P: l'evento che una scatola sia prodotta dallo stabilimento più *piccolo*;
S: l'evento che una scatola sia *senza difetti*;
D: l'evento che una scatola sia *difettosa*.

Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$p(G) = 80\% = 0.8, \qquad p(P) = 1 - p(G) = 0.2,$$
$$p(S|G) = 90\% = 0.9, \qquad p(S|P) = 97\% = 0.97,$$

e al punto (a) ci chiede di calcolare $p(S)$, mentre al punto (b) di calcolare $p(G|D)$ e $p(P|D)$.

La legge delle alternative ci dice che

$$p(S) = p(S|G)\,p(G) + p(S|P)\,p(P) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.97 \cdot 0.2 = 0.914 = 91.4\%,$$

che risponde alla domanda (a). Inoltre si ha

$$p(D) = 1 - p(S) = 0.086 = 8.6\%.$$

Dalle ipotesi segue che

$$p(D|G) = 1 - p(S|G) = 1 - 0.9 = 0.1, \qquad p(D|P) = 1 - p(S|P) = 1 - 0.97 = 0.03.$$

La formula di Bayes implica che

$$p(G|D) = \frac{p(D|G)\,p(G)}{p(D)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.086} = \frac{0.08}{0.086} \simeq 0.9302 = 93.02\%$$

dove $\simeq$ significa "circa" e abbiamo approssimato la percentuale alla seconda cifra decimale. Da ciò segue anche che

$$p(P|D) = 1 - p(G|D) \simeq 1 - 0.9302 = 0.0698 = 6.98\%.$$

In conclusione la risposta alla domanda (a) è 91.4%, mentre la risposta alle due domande (b) è rispettivamente circa 93.02% e circa 6.98%.

Esercizio 2.
Indichiamo con x_i il fatto di vivere in i persone, per $i = 1, 2, \dots, 5$, cioè x_1 è l'eventualità di vivere da soli, x_2 quella di vivere in due, ecc., fino a x_5 che è l'eventualità di vivere in cinque. Indichiamo con f_i, per $i = 1, \dots, 5$, il numero di adulti che ha scritto di vivere in i persone, cioè che verificano l'eventualità x_i. Il testo ci dice che:

$$f_1 = 2, \qquad f_2 = 4, \qquad f_3 = 5, \qquad f_4 = 6, \qquad f_5 = 3.$$

(a) L'istogramma dei dati raccolti è rappresentato in figura 1, dove in ordinata è indicato il numero di persone che vivono insieme nella stessa casa.

(b) Si ha $x_4 + x_5 = 6 + 3 = 9$, quindi la probabilità richiesta è $\dfrac{9}{20} = 0.45 = 45\%$.

(c) La **moda** è $x_4 = 4$, cioè vivere in quattro, perché è il valore più frequente.
La **media** è

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots f_5x_5}{f_1 + f_2 + \cdots + f_5} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{20} = \frac{64}{20} = 3.2.$$

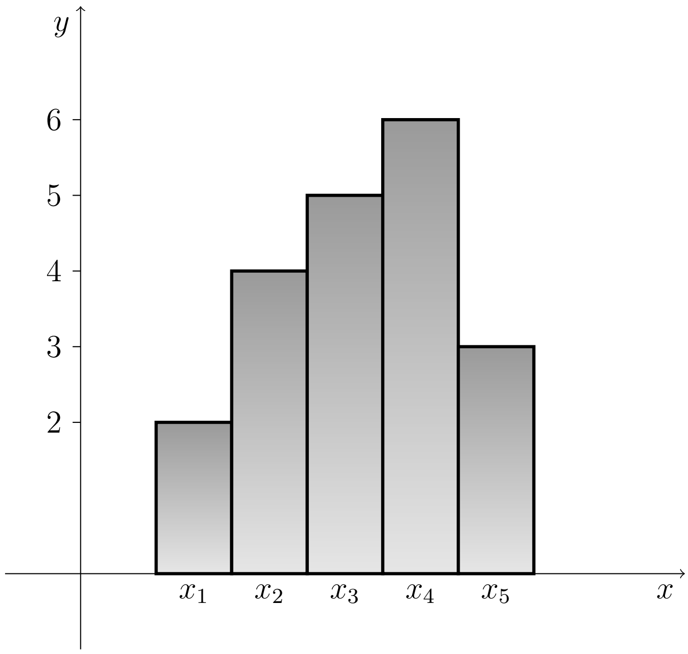

FIGURA 1. Istogramma dell'esercizio 2.

Per ottenere lo stesso risultato si poteva ipotizzare che la media fosse vicina a 3 e calcolare:

$$\mu = 3 + \frac{f_1(x_1-3)+\cdots+f_5(x_5-3)}{f_1+\cdots+f_5} = 3 + \frac{2(-2)+4(-1)+6\cdot 1+3\cdot 2}{20} = 3+\frac{4}{20} = 3.2.$$

Elencando tutti i 20 valori secondo la loro frequenza, in ordine crescente:

$$\underset{1}{x_1}, \underset{2}{x_1}, x_2, x_2, x_2, \underset{\cdots}{x_2}, x_3, x_3, x_3, \underset{10}{x_3}, \underset{11}{x_3}, x_4, x_4, x_4, \underset{\cdots}{x_4}, x_4, x_4, x_5, x_5, \underset{20}{x_5},$$

essendo 20 un numero pari, la **mediana** è $(x_3+x_3)/2 = x_3 = 3$.
La **varianza** è

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{f_1(x_1-\mu)^2+f_2(x_2-\mu)^2+\cdots f_5(x_5-\mu)^2}{f_1+f_2+\cdots+f_5} = \\ &= \frac{2(-2.2)^2+4(-1.2)^2+5(-0.2)^2+6(0.8)^2+3(1.8)^2}{20} = \\ &= \frac{9.68+5.76+0.2+3.84+9.72}{20} = \frac{29.2}{20} = 1.46\end{aligned}$$

da cui segue che lo **scarto quadratico medio** è $\sigma = \sqrt{1.46} \simeq 1.208$.

ESERCIZIO 3.
Calcoliamo la derivata prima e seconda di $g(x)$. Si ricordi la derivata della funzione composta che, nel caso della funzione esponenziale, implica che $D(e^{f(x)}) = e^{f(x)}f'(x)$. Si ha quindi:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x-1)^2} D(-(x-1)^2) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x-1)^2}(-2)(x-1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-1)e^{-(x-1)^2}.$$

Per calcolare la derivata seconda di $g(x)$, si usa anche la derivata del prodotto di due funzioni, cioè $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Allora:

$$\begin{aligned}g''(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-(x-1)^2} + (x-1)e^{-(x-1)^2}(-2)(x-1)\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-2(x-1)^2\right)e^{-(x-1)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-2x^2+4x-1\right)e^{-(x-1)^2} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(x-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-(x-1)^2},\end{aligned}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dall'aver calcolato le radici del polinomio di secondo grado $2x^2 - 4x + 1$, che sono $1 \pm 1/\sqrt{2}$.

Studiamo ora la funzione $g(x)$.

L'esponenziale in base e è definito per qualsiasi numero reale e il denominatore della frazione è un numero reale $\neq 0$, quindi g è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè il dominio di g è $\mathbb{R}$.

Allo stesso modo si verifica che $\mathbb{R}$ è il dominio anche di $g'(x)$ e di $g''(x)$. Se ne deduce che $g(x)$ è derivabile (su tutto $\mathbb{R}$), perciò continua (su tutto $\mathbb{R}$).

La funzione $g(x)$ non è pari e nemmeno dispari. Non è pari per esempio perché

$$g(-1) = -2 - e^{-4}/\sqrt{\pi} \neq -2 - e^{-1}/\sqrt{\pi} = g(1)$$

e non è dispari per esempio perché $g(-1) \neq -g(1) = 2 + e^{-1}/\sqrt{\pi}$.

Riguardo al segno di $g(x)$, la funzione esponenziale e^x è sempre positiva, quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $-e^{-(x-1)^2} < 0$ da cui segue che $g(x) < -2 < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare il grafico di $g(x)$ non interseca l'asse x.

Per $x = 0$, si ha

$$g(0) = -2 - \frac{1}{e\sqrt{\pi}} \simeq -2.21,$$

cioè il grafico di $g(x)$ interseca l'asse y nel punto $(0, -2 - e^{-1}/\sqrt{\pi})$.

Per $x \to \infty$, si ha $(x-1)^2 \to \infty$ e $-(x-1)^2 \to -\infty$, da cui segue che $e^{-(x-1)^2} \to 0$, perché $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. Si conclude che

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -2.$$

Allo stesso modo si verifica che $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$. Si conclude che la retta $y = -2$ è *asintoto orizzontale* del grafico di $g(x)$ sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$.

Riguardo al segno di $g'(x)$, si ha $g'(x) \geqslant 0$ se e solo se $x - 1 \geqslant 0$.
Quindi $g'(x) < 0$ per $x < 1$, $g'(x) = 0$ per $x = 1$ e $g'(x) > 0$ per $x > 1$, cioè

- $g(x)$ ha un punto di *minimo* (per ora relativo) in $x = 1$,
- $g(x)$ è decrescente per $x < 1$,
- $g(x)$ è crescente per $x > 1$.

Ne segue che $x = 1$ è punto di *minimo assoluto* di $g(x)$ e si ha $g(1) = -2 - 1/\sqrt{\pi} \simeq -2.56$.

Riguardo al segno di $g''(x)$, si ha $g''(x) \geqslant 0$ se e solo se $2x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$, che accade se e solo se $1 - 1/\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1 + 1/\sqrt{2}$, quindi

- $g(x)$ ha due punti di *flesso* in $x = 1 - 1/\sqrt{2} \simeq 0.293$ e in $x = 1 + 1/\sqrt{2} \simeq 1.707$, dove la funzione vale $g(1 \pm 1/\sqrt{2}) = -2 - 1/\sqrt{e\pi} \simeq -2.34$;
- $g(x)$ ha concavità verso il basso per $x < 1 - 1/\sqrt{2}$ e per $x > 1 + 1/\sqrt{2}$;
- $g(x)$ ha concavità verso l'alto per $1 - 1/\sqrt{2} < x < 1 + 1/\sqrt{2}$.

Si può allora tracciare un grafico approssimativo della funzione $g(x)$ come nella figura 2.

Riguardo alla funzione $f(x)$, si ha che

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x-1)^2}$$

è una *gaussiana di media* 1 *e varianza* $1/\sqrt{2}$, che è la funzione di densità di una variabile aleatoria continua. Si può verificare direttamente che $f(x)$ soddisfa la definizione di funzione di densità di una V.A.C., per esempio si può verificare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ così:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1,$$

dove la seconda uguaglianza segue dal cambio di variabile $y = x - 1$ e la penultima eguaglianza segue dall'integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Un modo alternativo per studiare il grafico di $g(x)$ è il seguente.

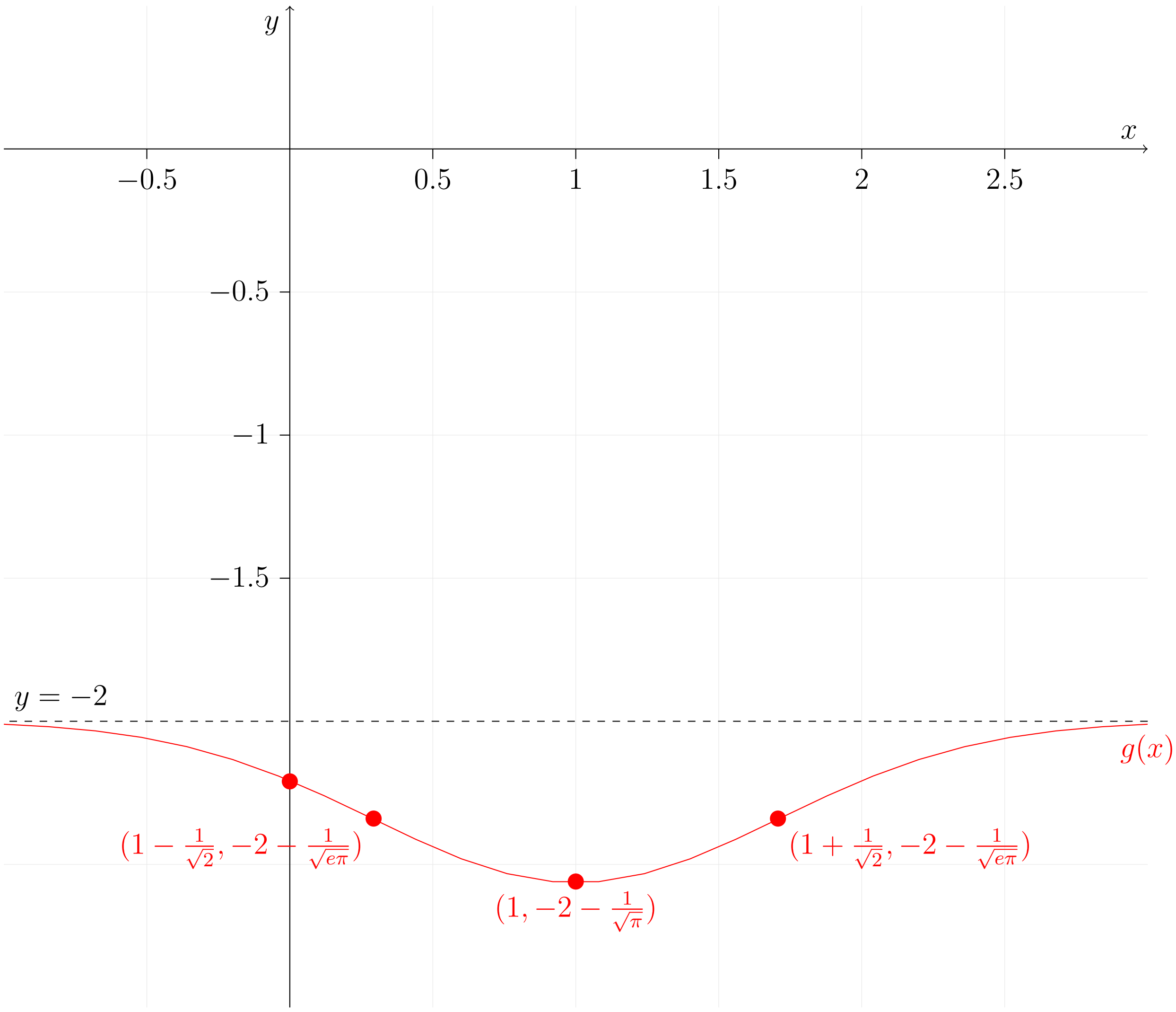

FIGURA 2. Grafico della funzione $g(x)$

Si ricordi che la *gaussiana di media 0 e varianza 1* è $g_0(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. La funzione $g_0(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$, è pari, è sempre positiva, ha un massimo assoluto in $x = 0$, dove $g_0(0) = 1/\sqrt{2\pi} \simeq 0.399$, è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$, ha flessi in $x = \pm 1$, in cui g_0 vale $1/\sqrt{2e\pi} \simeq 0.242$, è convessa per $x < -1$ e $x > 1$, è concava per $-1 < x < 1$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Con queste informazioni si può disegnare un grafico di g_0 (cfr. libro).

La funzione $g_1(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi} = \sqrt{2}\, g_0(\sqrt{2}x)$ è la gaussiana di media 0 e varianza $1/\sqrt{2}$ e si ottiene da g_0 con una contrazione orizzontale e una dilatazione verticale, entrambe di fattore $\sqrt{2}$. Quindi g_1 ha dominio $\mathbb{R}$, è pari, è sempre positiva, ha un massimo assoluto in $x = 0$, dove $g_1(0) = 1/\sqrt{\pi} \simeq 0.564$, è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$, ha flessi in $x = \pm 1/\sqrt{2}$, in cui g_1 vale $1/\sqrt{e\pi} \simeq 0.342$, è convessa per $x < -1/\sqrt{2}$ e $x > 1/\sqrt{2}$, è concava per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

Il grafico della funzione $g_2(x) = e^{-(x-1)^2}/\sqrt{\pi}$ si ottiene traslando quello di g_1 orizzontalmente di 1 verso destra. Quindi g_2 ha dominio $\mathbb{R}$, è sempre positiva, ha un massimo assoluto in $x = 1$, dove $g_2(1) = g_1(0) = 1/\sqrt{\pi}$, è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$, ha flessi in $x = 1 \pm 1/\sqrt{2}$, in cui g_2 vale $1/\sqrt{e\pi}$, è convessa per $x < 1 - 1/\sqrt{2}$ e $x > 1 + 1/\sqrt{2}$, è concava per $1 - 1/\sqrt{2} < x < 1 + 1/\sqrt{2}$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

Ora il grafico di $g_3(x) = -g_2(x) = -e^{-(x-1)^2}/\sqrt{\pi}$ è il simmetrico di quello di g_2 rispetto all'asse x. Quindi g_3 ha dominio $\mathbb{R}$, è sempre negativa, ha un minimo assoluto in $x = 1$, dove $g_3(1) = -g_2(1) = -1/\sqrt{\pi}$, è decrescente per $x < 1$ e crescente per $x > 1$, ha flessi in

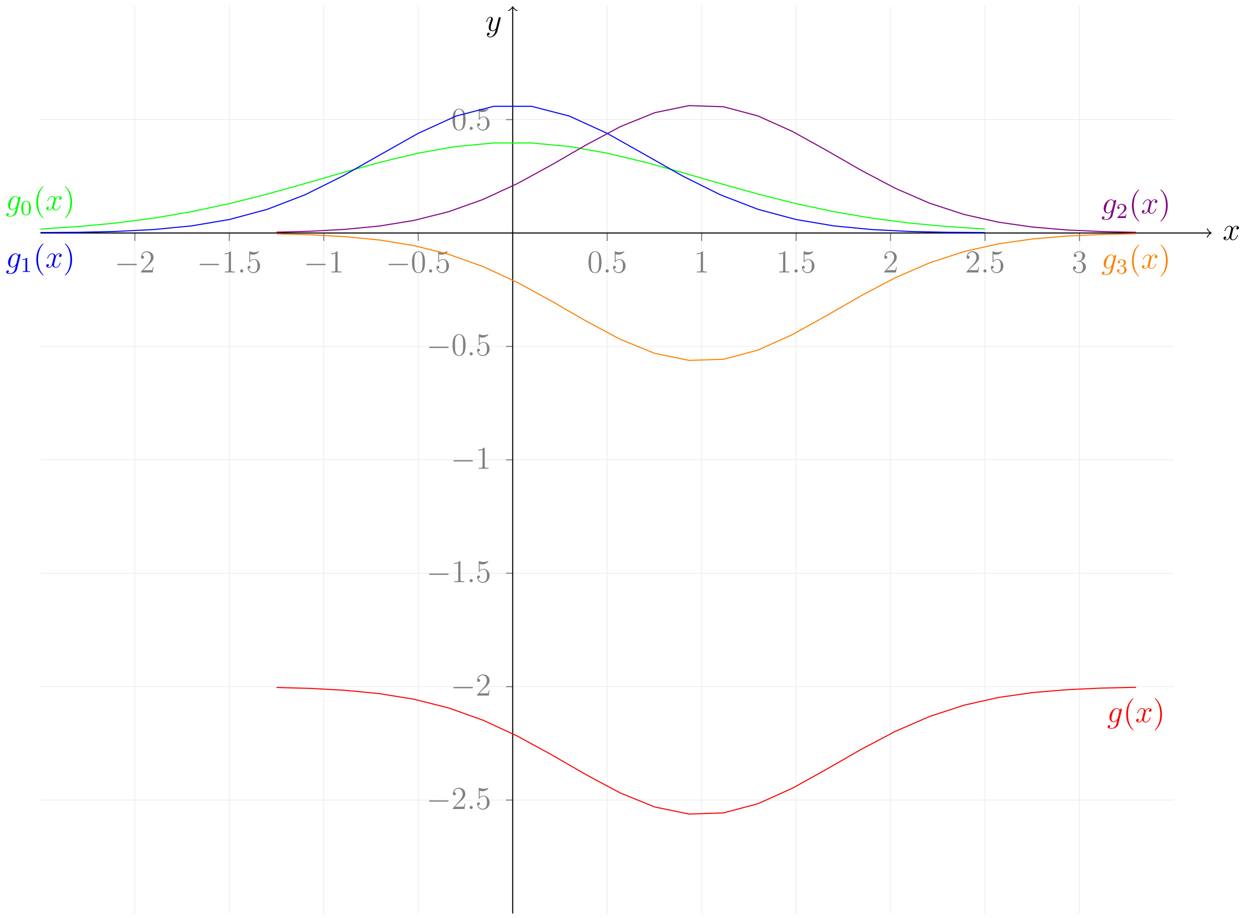

FIGURA 3. Grafici delle funzioni $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ e $g(x)$

$x = 1 \pm 1/\sqrt{2}$, in cui g_3 vale $-1/\sqrt{e\pi}$, è concava per $x < 1 - 1/\sqrt{2}$ e $x > 1 + 1/\sqrt{2}$, è convessa per $1 - 1/\sqrt{2} < x < 1 + 1/\sqrt{2}$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

Infine il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di g_3 traslando verticalmente di 2 verso il basso e così si possono ricavare le proprietà di $g(x)$ che non ripetiamo qui perché già elencate nella pagina precedente. Riassumiamo i grafici di $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ e $g(x)$ nella figura 3.

ESERCIZIO 4.
Si noti che $D(e^{3x}) = 3e^{3x}$, cioè una primitiva della funzione $f(x) = 3e^{3x}$ è $F(x) = e^{3x}$. Moltiplicando e dividendo per 3, si ha allora:

$$\int_{-\infty}^{-2} 2e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{-2} 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\lim_{t\to-\infty}\left[e^{3x}\right]_t^{-2} = \frac{2}{3}\left(e^{-6} + \lim_{t\to-\infty} e^{3t}\right) = \frac{2}{3}e^{-6} = \frac{2}{3e^6}\,.$$

dove, nella penultima eguaglianza, si usa il fatto che $\lim_{t\to-\infty} e^{3t} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

ESERCIZIO 5.
Indicato con A il dominio della funzione h, si dice che

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$$

se e solo se $\forall M < 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap (2, 2+\delta)$ si abbia $h(x) < M$. (Si suppone per ipotesi che sia $A \cap (2, 2+\delta) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$.)

Una funzione $h(x)$ che verifica tale limite è per esempio $h(x) = \dfrac{1}{2-x}$.