

Modulo di Matematica per il Corso di Laurea in Farmacia, cognomi M-Z

Soluzioni del TEMA 1 del 18 gennaio 2011

ESERCIZIO 1.

Indichiamo con

Ω : lo spazio degli eventi, in questo caso 1200 pazienti;

F : l'evento che i pazienti siano *femmine*;

M : l'evento che i pazienti siano *maschi*;

E : l'evento che si verifichino *effetti collaterali*;

N : l'evento che *non* si verifichino *effetti collaterali*.

Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$p(F) = \frac{700}{1200} = \frac{7}{12}, \quad p(M) = \frac{500}{1200} = \frac{5}{12}, \quad p(E|F) = \frac{92}{700}, \quad p(E|M) = \frac{43}{500}, \quad (1)$$

La probabilità che si presentino effetti collaterali, sapendo che il paziente è maschio, è perciò

$$p(E|M) = \frac{43}{500} = 0.086 = 8.6\%.$$

Dal testo dell'esercizio segue che la probabilità che si verifichino effetti collaterali è

$$p(E) = \frac{92 + 43}{1200} = \frac{135}{1200} = 0.1125 = 11.25\%,$$

o equivalentemente, usando la legge delle alternative,

$$p(E) = p(E|F)p(F) + p(E|M)p(M) = \frac{92}{700} \cdot \frac{700}{1200} + \frac{43}{500} \cdot \frac{500}{1200} = \frac{92}{1200} + \frac{43}{1200} = \frac{135}{1200}.$$

Quindi la probabilità che non si verifichino effetti collaterali è

$$p(N) = 1 - p(E) = 1 - 0.1125 = 0.8875 = 88.75\%.$$

Infine la probabilità che il paziente sia femmina, sapendo che si sono manifestati effetti collaterali, è

$$p(F|E) = \frac{92}{92 + 43} = \frac{92}{135} \simeq 0.6815 = 68.15\%$$

(dove $\simeq$ significa "circa"), oppure equivalentemente, usando la formula di Bayes,

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E)} = \frac{92}{700} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{1200}{135} = \frac{92}{135} \simeq 0.6815.$$

In conclusione la risposta alla domanda (a) è 8.6%, la risposta alla domanda (b) è 88.75% e la risposta alla domanda (c) è circa 68.15%.

Un altro modo equivalente di risolvere l'esercizio è il seguente: invece delle ultime due uguaglianze della formula (1), si possono considerare le condizioni date del testo come

$$p(E \cap F) = \frac{92}{1200}, \quad p(E \cap M) = \frac{43}{1200},$$

da cui si deducono gli stessi risultati trovati prima:

$$p(E|M) = \frac{p(E \cap M)}{p(M)} = \frac{43}{1200} \cdot \frac{1200}{500} = \frac{43}{500} = 0.086 = 8.6\%,$$

$$p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap M) = \frac{92}{1200} + \frac{43}{1200} = \frac{135}{1200} = 0.1125 = 11.25\%,$$

$$p(N) = 1 - p(E) = 0.8875 = 88.75\%,$$

$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{92}{1200} \cdot \frac{1200}{135} = \frac{92}{135} \simeq 0.6815 = 68.15\%.$$

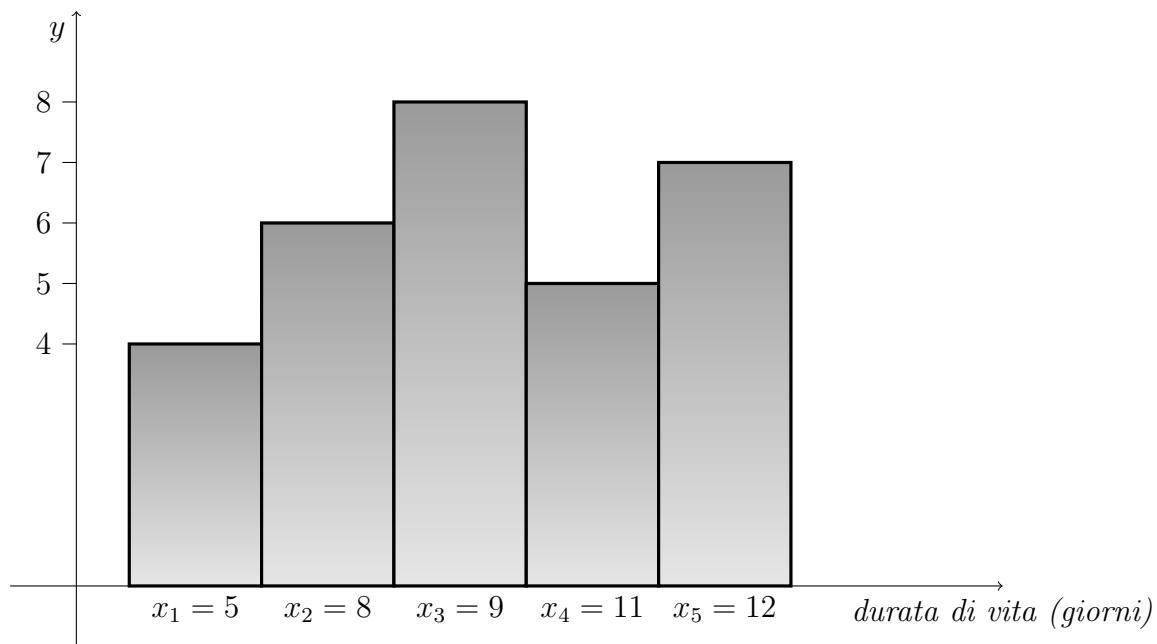


FIGURA 1. Istogramma dell'esercizio 2.

ESERCIZIO 2.

I valori della durata di vita dei virus devono essere ordinati in modo crescente: poniamo quindi $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$ e infine $x_5 = 12$. Indichiamo con f_i , per $i = 1, \dots, 5$, il numero di virus che muoiono dopo x_i giorni. Il testo ci dice che:

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 6, \quad f_3 = 8, \quad f_4 = 5, \quad f_5 = 7.$$

(a) L'istogramma dei dati raccolti è rappresentato in figura 1.

(b) Si ha $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 6 + 8 = 18$, quindi la probabilità richiesta è $\frac{18}{30} = 0.6 = 60\%$.

(c) La **moda** è $x_3 = 9$ giorni, perché è il valore più frequente.

La **media** è

$$\mu = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_5 x_5}{f_1 + f_2 + \dots + f_5} = \frac{4 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 7 \cdot 12}{30} = \frac{279}{30} = 9.3.$$

Per ottenere lo stesso risultato si poteva ipotizzare che la media fosse vicina a 9 e calcolare:

$$\mu = 9 + \frac{f_1(x_1 - 9) + \dots + f_5(x_5 - 9)}{f_1 + \dots + f_5} = 9 + \frac{4(-4) + 6(-1) + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{30} = 9 + \frac{9}{30} = 9.3.$$

Elencando tutti i 30 valori in ordine crescente secondo la loro frequenza, si trova che al posto 15 c'è x_3 e anche al posto 16 c'è x_3 , quindi la **mediana** è $(x_3 + x_3)/2 = x_3 = 9$.

La **varianza** è

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{f_1(x_1 - \mu)^2 + f_2(x_2 - \mu)^2 + \dots + f_5(x_5 - \mu)^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_5} = \\ &= \frac{4(-4.3)^2 + 6(-1.3)^2 + 8(-0.3)^2 + 5(1.7)^2 + 7(2.7)^2}{30} = \\ &= \frac{73.96 + 10.14 + 0.72 + 14.45 + 51.03}{30} = \frac{150.3}{30} = 5.01 \end{aligned}$$

da cui segue che lo **scarto quadratico medio** è $\sigma = \sqrt{5.01} \simeq 2.238$.

Dividendo x_i per 10, per ogni $i = 1, \dots, 5$, la media viene divisa per 10 e quindi la media corretta è 0.93. La varianza invece viene divisa per 10^2 , perciò la varianza corretta è 0.0501.

ESERCIZIO 3.

Il valore assoluto e l'esponenziale in base e sono definiti per qualsiasi numero reale, quindi la funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè il dominio di f è $\mathbb{R}$. Inoltre il valore assoluto e l'esponenziale sono funzioni continue, la somma e il prodotto di funzioni continue è ancora una funzione continua, perciò la funzione f è continua (su tutto il suo dominio).

Si noti che $f(0) = -1$.

La funzione f non è né pari né dispari, per esempio perché

$$f(-1) = -e \neq -3/e = f(1) \quad \text{e} \quad f(-1) = -e \neq 3/e = -f(1).$$

Spezziamo lo studio della funzione f in due parti, a seconda che sia $x \leq 0$ oppure $x \geq 0$.

Per $x \leq 0$, si ha $f(x) = -e^{-x}$, quindi il grafico di $f(x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse x , del grafico della funzione e^{-x} , che a sua volta è il simmetrico, rispetto all'asse y , del grafico della funzione e^x . In particolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -\infty$$

e si può disegnare il grafico di $f(x)$, per $x \leq 0$, come nella figura 2 (dove è stato tratteggiato anche il grafico di $-e^{-x}$ per $x > 0$).

Si noti che, per $x < 0$, la funzione $f(x)$ è sempre negativa, la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ è $f'(x) = -e^{-x}(-1) = e^{-x}$, che è sempre positiva, quindi $f(x)$ è sempre crescente, e la derivata seconda di $f(x)$ è $f''(x) = -e^{-x} = f(x)$, che è sempre negativa, perciò la concavità di $f(x)$ è rivolta verso il basso.

Studiamo ora la funzione $f(x)$ per $x \geq 0$.

Per $x \geq 0$, si ha che $2x + 1$ è sempre positivo, così come e^{-x} , quindi $f(x) = -e^{-x}(2x + 1)$ è sempre negativa. Per x che tende a ∞ , la funzione $f(x)$ tende al prodotto di 0 per ∞ , che è una forma indeterminata. Per calcolare il limite applichiamo il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x}(2x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{e^x} = 0.$$

Ne segue che la retta $y = 0$ è *asintoto orizzontale* del grafico di $f(x)$ per $x \rightarrow \infty$.

Per $x > 0$, la derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = -e^{-x}(-1)(2x + 1) - 2e^{-x} = e^{-x}(2x - 1),$$

dove abbiamo usato la formula della derivata per il prodotto di due funzioni. Si ha che $2x - 1 > 0$ se e solo se $x > 1/2$ ed e^{-x} è sempre positivo, quindi $f'(x) > 0$ per $x > 1/2$, $f'(x) = 0$ per $x = 1/2$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1/2$. Perciò $f(x)$ è decrescente per $0 < x < 1/2$, ha un minimo relativo in $x = 1/2$, in cui $f(1/2) = -2/\sqrt{e}$, ed è crescente per $x > 1/2$.

Per $x > 0$, la derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - 1) + 2e^{-x} = e^{-x}(3 - 2x).$$

Per $0 < x < 3/2$, si ha $f''(x) > 0$ e $f(x)$ è convessa, cioè la concavità di $f(x)$ è rivolta verso l'alto; per $x = 3/2$, si ha $f''(x) = 0$ e $f(x)$ ha un flesso, dove $f(3/2) = -4/\sqrt{e^3}$; infine per $x > 3/2$, si ha $f''(x) < 0$ e $f(x)$ è concava, cioè la concavità di $f(x)$ è rivolta verso il basso.

Si può allora tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$, per $x > 0$, come nella figura 2 (dove è stato tratteggiato anche il grafico di $-e^{-x}(2x + 1)$ per $x < 0$).

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}(2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

quindi la derivata $f'(x)$ non è definita in $x = 0$, cioè $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$, in cui il grafico di $f(x)$ ha un punto *angoloso*.

Mettendo insieme i grafici di $f(x)$ per $x \leq 0$ e per $x \geq 0$, osserviamo che la funzione $f(x)$ ha un punto di massimo relativo in $x = 0$, dove $f(0) = -1$.

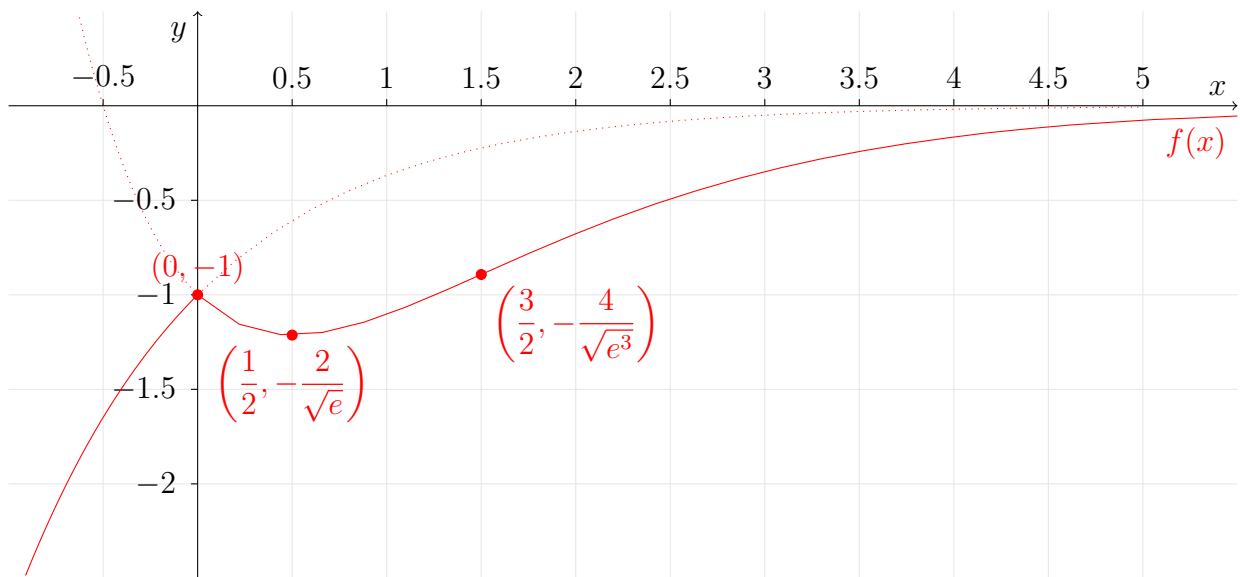


FIGURA 2. Grafico della funzione $f(x)$

ESERCIZIO 4.

Nell'esercizio 3 abbiamo visto che la derivata di $-e^{-x}(2x+1)$ è $e^{-x}(2x-1)$. Ciò significa che una primitiva di $e^{-x}(2x-1)$ è $-e^{-x}(2x+1)$ e quindi che

$$\int_1^\infty e^{-x}(2x+1) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}(2x+1)]_1^t = 3e^{-1} - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}(2t+1) = \frac{3}{e},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}(2t+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t+1}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = 0$$

per il teorema di de l'Hospital.

ESERCIZIO 5.

Indicata con μ la media della variabile aleatoria continua X definita dalla funzione di densità di probabilità $f(x)$, con dominio $[-2, \infty)$, si definisce la *varianza* di X come

$$\int_{-2}^\infty (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Un esempio di variabile aleatoria continua con media 2 e varianza 1 è quella con distribuzione normale, definita dalla funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/2}.$$