Modulo di Matematica per il Corso di Laurea in Farmacia, cognomi M-Z

Soluzioni dello scritto dell'14 dicembre 2012

Esercizio 1.

Indichiamo con x_i le quantità di calcio (calcolato in milligrammi), in ordine crescente, e con f_i il numero di bottiglie con quantità di calcio x_i.

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 560, & x_2 = 750, & x_3 = 930, & x_4 = 1300, & x_5 = 1500, & x_6 = 1700, \\ x_7 = 1800, & x_8 = 2300, & x_9 = 2500, & x_{10} = 2600, & x_{11} = 3200, & \\ f_1 = 2, & f_2 = 1, & f_3 = 1, & f_4 = 1, & f_5 = 1, & f_6 = 2, \\ f_7 = 2, & f_8 = 2, & f_9 = 1, & f_{10} = 1, & f_{11} = 1. & \end{array}$$

L'istogramma dei dati raccolti è rappresentato in figura 1.

Ci sono 4 **mode**: 560, 1700, 1800 e 2300 milligrammi, che sono i valori più frequenti.
La **media** è

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots f_{11}x_{11}}{f_1 + f_2 + \cdots + f_{11}} = \\ &= \frac{2 \cdot 560 + 750 + 930 + 1300 + 1500 + 2 \cdot 1700 + 2 \cdot 1800 + 2 \cdot 2300 + 2500 + 2600 + 3200}{15} = \\ &= \frac{25500}{15} = 1700 \text{ milligrammi.} \end{aligned}$$

Per ottenere lo stesso risultato si poteva ipotizzare che la media fosse vicina a 1700 e calcolare:

$$\begin{aligned} \mu &= 1700 + \frac{f_1(x_1 - 1700) + f_2(x_2 - 1700) + \cdots + f_{11}(x_{11} - 1700)}{f_1 + \cdots + f_{11}} = \\ &= 1700 + \frac{2 \cdot (-1140) - 950 - 770 - 400 - 200 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 600 + 800 + 900 + 1500}{15} = \\ &= 1700 + \frac{0}{15} = 1700 \text{ milligrammi.} \end{aligned}$$

Elencando tutti i 15 valori x_i secondo la loro frequenza, in ordine crescente:

$$560, 560, 750, 930, 1300, 1500, 1700, 1700, 1800, 1800, 2300, 2300, 2500, 2600, 3200,$$

al posto $(15 + 1)/2 = 8$ c'è 1700, quindi la **mediana** è 1700 milligrammi.

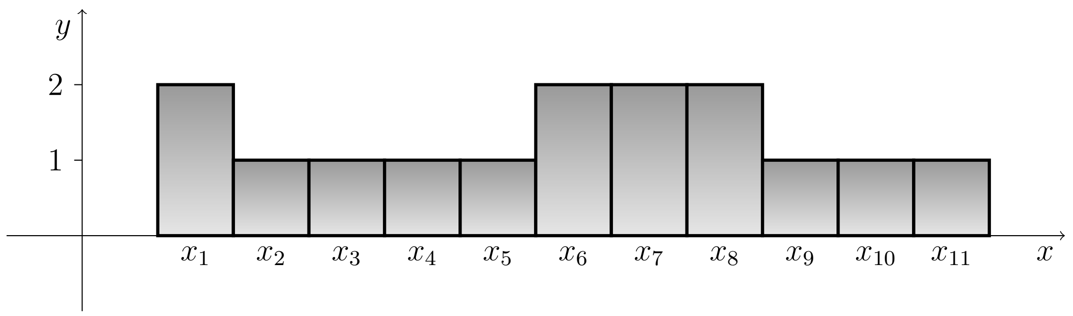

Figura 1. Istogramma dell'esercizio 2.

La **varianza** è

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{f_1(x_1-\mu)^2+f_2(x_2-\mu)^2+\cdots+f_{11}(x_{11}-\mu)^2}{f_1+f_2+\cdots+f_{11}} = \\ &= \frac{2(-1140)^2+(-950)^2+(-770)^2+(-400)^2+(-200)^2+2(100)^2}{15}+ \\ &+ \frac{2(600)^2+800^2+900^2+1500^2}{15} = \\ &= \frac{8734600}{15} \simeq 582306\end{aligned}$$

da cui segue che lo **scarto quadratico medio** è $\sigma = \sqrt{582306.\overline{6}} \simeq 763$ milligrammi.

Esercizio 2.
Indichiamo con

Ω: lo spazio degli eventi, in questo caso la popolazione;
M: l'evento che un individuo scelto a caso sia *malato*;
P: l'evento che il test diagnostico dia esito *positivo*;
N: l'evento che il test diagnostico dia esito *negativo*.

Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$p(P|M) = 90\% = 0.9, \qquad p(P|\Omega \setminus M) = 5\% = 0.05.$$

Al punto (a) l'esercizio ci chiede di calcolare la probabilità condizionata $p(M|P)$, sapendo che $p(M) = 1/200 = 0.005 = 0.5\%$, mentre al punto (b) ci chiede di calcolare $p(M)$ sapendo che $p(P) = 20\% = 0.2$.

(a) Si noti che $p(\Omega \setminus M) = 1 - p(M) = 99.5\% = 0.995$. La formula di Bayes ci dice che

$$\begin{aligned}p(M|P) &= \frac{p(P|M)\,p(M)}{p(P)} = \frac{p(P|M)\,p(M)}{p(P|M)\,p(M)+p(P|\Omega\setminus M)\,p(\Omega\setminus M)} = \\ &= \frac{0.9\cdot 0.005}{0.9\cdot 0.005+0.05\cdot 0.995} = \frac{0.0045}{0.0045+0.04975} = \frac{0.0045}{0.05425} \simeq 0.0829 = 8.29\%.\end{aligned}$$

(b) La legge delle alternative ci dice che deve essere

$$\begin{aligned}0.2 = p(P) &= p(P|M)\,p(M)+p(P|\Omega\setminus M)\,p(\Omega\setminus M) = 0.9p(M)+0.05(1-p(M)) = \\ &= 0.05+0.85p(M)\end{aligned}$$

da cui si ricava che $0.15 = 0.85p(M)$ e quindi

$$p(M) = \frac{0.15}{0.85} \simeq 0.1765 = 17.65\%.$$

In conclusione la risposta alla domanda (a) è circa 8.29%, mentre la risposta alla domanda (b) è circa 17.65%.

Esercizio 3.
L'esponenziale è definito per qualsiasi numero reale quindi il **dominio** della funzione f è $\mathbb{R}$.

La funzione $f(x)$ non è pari, per esempio perché $f(-1) = e \neq 1/e = f(1)$, né dispari, ancora perché $f(-1) = e \neq -1/e = -f(1)$.

Si ha $f(0) = 0^2e^{-0} = 0$. Siccome $e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 0$, cioè $x = 0$. Quindi il grafico di f interseca gli assi nell'origine $(0,0)$.

Ricordando ancora che e^{-x} è sempre positivo, si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 \geq 0$, che è sempre verificato per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ non è mai negativa.

Studiamo gli eventuali asintoti della funzione $f(x)$. La mancanza di valori critici nel dominio ci assicura che non esistono asintoti verticali. Riguardo agli altri asintoti, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

quindi non esiste asintoto orizzontale *sinistro*, cioè per $x \to -\infty$. Per verificare se ci sia l'asintoto obliquo calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty,$$

perciò non esiste asintoto obliquo per $x \to -infty$. Per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \infty e^{-\infty} = \infty \cdot 0,$$

che è forma indeterminata. Portando e^{-x} al denominatore si trova:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0,$$

per le gerarchie di infinito (oppure applicando due volte il teorema di De l'Hôpital). Quindi esiste l'**asintoto orizzontale** $y = 0$ per $x \to \infty$.

Calcoliamo la **derivata** di $f(x)$. Essendo $f(x)$ un prodotto delle funzioni x^2 ed e^{-x}, si ha

$$f'(x) = (2x)e^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}\,.$$

Ricordando sempre che $^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x(2-x) \geq 0$, cioè se e solo se $0 \leq x \leq 2$. Ne segue che $f(x)$ è **decrescente** per $x < 0$, ha un *minimo* in $x = 0$, dove $f(0) = 0$, è **crescente** per $0 < x < 2$, ha un *massimo* in $x = 2$, dove $f(2) = 4/e^2 \simeq 0.541$, e infine è **decrescente** per $x > 2$.

La **derivata seconda** di $f(x)$, sempre per la regola della derivata del prodotto, è

$$f''(x) = (2xe^{-x} - x^2e^{-x})' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Allora si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 4x + 2 \geq 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - 4x + 2 = 0$ si trovano le due radici $2\pm\sqrt{2}$ e quindi $f''(x) \geq 0$ se $x < 2-\sqrt{2}$ e se $x > 2+\sqrt{2}$. Ne segue che $f(x)$ è **convessa** per $x < 2 - \sqrt{2}$, ha un punto di flesso in $x = 2 - \sqrt{2} \simeq 0.588$ dove f vale $f(2-\sqrt{2}) = (6-2\sqrt{2})/e^{2-\sqrt{2}} \simeq 0.191$, è **concava** per $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$, ha un altro punto di flesso in $x = 2+\sqrt{2} \simeq 3,414$ dove f vale $f(2+\sqrt{2}) = (6+2\sqrt{2})/e^{2+\sqrt{2}} \simeq 0.384$, è **convessa** per $x > 2 + \sqrt{2}$.

Osserviamo che il punto di massimo è di massimo relativo mentre quello di minimo è di minimo assoluto.

Si può allora tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ come nella figura 2.

Esercizio 4.
Si ha

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 3x^3 + x + 3} = \lim_{x\to\infty} (x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{4}} - (x^4 + 3x^3 + x + 3)^{\frac{1}{4}} =$$

(raccogliendo x^4 da ogni termine e portandolo fuori dalla radice)

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} - x\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

(ricordando che per $y \to 0$ si ha $(1+y)^\alpha \sim 1 + \alpha y$)

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4}\right) - x\left(1 + \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{4x^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} - x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4x^3} = -\frac{3}{4}\,.$$

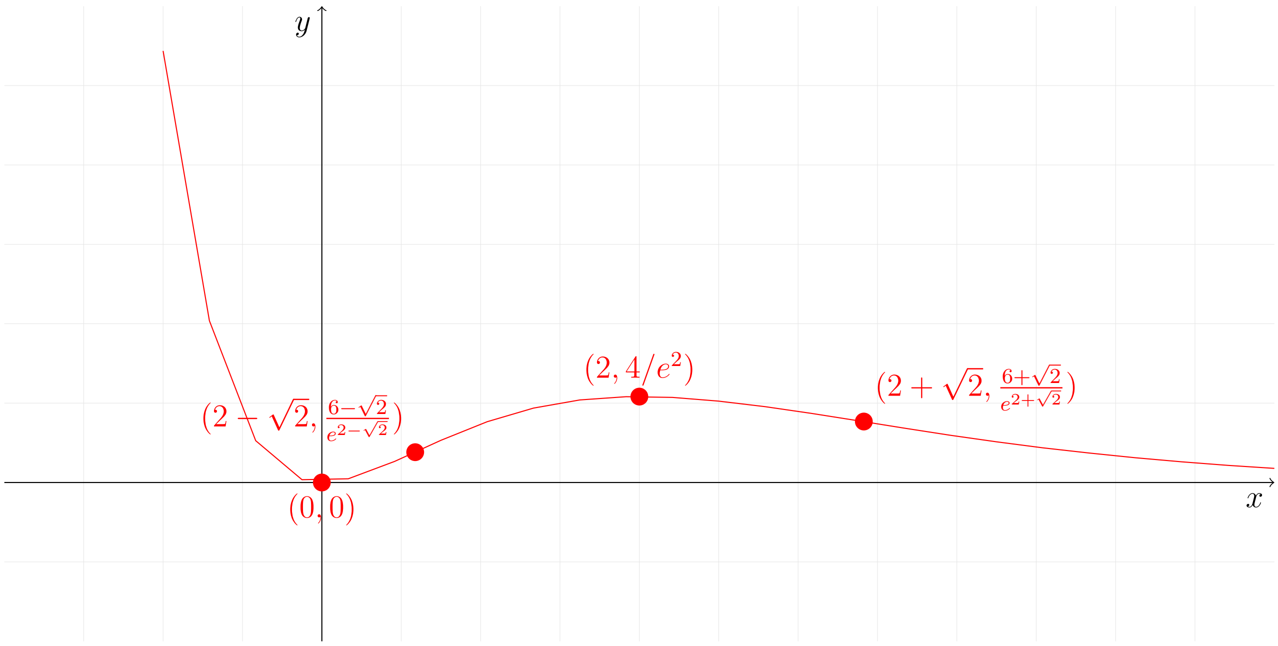

FIGURA 2. Grafico della funzione $f(x)$

Equivalentemente, si poteva procedere razionalizzando, ma facendo così molti più calcoli:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4-2x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{x^4-2x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3})(\sqrt[4]{x^4-2x^2+1} + \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3})}{\sqrt[4]{x^4-2x^2+1} + \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-2x^2+1} - \sqrt{x^4+3x^3+x+3}}{\sqrt[4]{x^4-2x^2+1} + \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^4-2x^2+1} - \sqrt{x^4+3x^3+x+3})(\sqrt{x^4-2x^2+1} + \sqrt{x^4+3x^3+x+3})}{(\sqrt[4]{x^4-2x^2+1} + \sqrt[4]{x^4+3x^3+x+3})(\sqrt{x^4-2x^2+1} + \sqrt{x^4+3x^3+x+3})} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^2+1-(x^4+3x^3+x+3)}{x((1-2/x^2+1/x^4)^{1/4} + (1+3/x+\cdots)^{1/4})x^2((1+\cdots)^{1/2}+(1+\cdots)^{1/2}))} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3-2x^2-x-2}{x^3(2+\cdots)(2+\cdots)} = -\frac{3}{4},
\end{aligned}$$

dove è stato indicato con "$\cdots$" una quantità che tende a 0.

ESERCIZIO 5.
L'integrale si può risolvere per parti oppure equivalentemente per sostituzione.
Integrando per parti, si pone $f(x) = x$ e $g'(x) = (1+x)^{1/2}$, da cui $f'(x) = 1$ e $g(x) = (1+x)^{3/2}/(3/2) = (2/3)\sqrt{(1+x)^3}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}\,x\sqrt{(1+x)^3}\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 (1+x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{2}{3}\,x\sqrt{(1+x)^3}\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right]_1^2 = \left[\frac{2}{3}\,x\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5}\right]_1^2 = \\
&= \frac{2}{3}\,2\sqrt{3^3} - \frac{4}{15}\sqrt{3^5} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} + \frac{4}{15}\sqrt{2^5} = \frac{8}{5}\sqrt{3} - \frac{4}{15}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, per sostituzione si può porre $t = \sqrt{1+x}$, da cui $1 + x = t^2$, cioè $x = t^2 - 1$. Derivando si ottiene $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ e quindi

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^2-1)t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{5}\,t^5 - \frac{1}{3}\,t^3\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{5}\,3^2\,\sqrt{3} - \frac{2}{3}\,3\,\sqrt{3} - \frac{2}{5}\,2^2\,\sqrt{2} + \frac{2}{3}\,2\,\sqrt{2} = \frac{8}{5}\sqrt{3} - \frac{4}{15}\sqrt{2}.$$