Modulo di Matematica per il Corso di Laurea in Farmacia, cognomi M-Z
Soluzioni dello scritto dell'1 giugno 2012

Esercizio 1.
Indichiamo con

Ω: lo spazio degli eventi, in questo caso la produzione dei farmaci;
A: l'evento che un farmaco sia prodotto dal *primo* ciclo produttivo;
B: l'evento che un farmaco sia prodotto dal *secondo* ciclo produttivo;
C: l'evento che un farmaco sia prodotto dal *terzo* ciclo produttivo;
D: l'evento che un farmaco sia *difettoso*.

Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$p(A) = 45\% = 0.45, \qquad p(B) = 25\% = 0.25, \qquad p(C) = 30\% = 0.3,$$
$$p(D|A) = 3\% = 0.03, \qquad p(D|B) = 5\% = 0.05, \qquad p(D|C) = 2\% = 0.02,$$

e al punto (a) ci chiede di calcolare $p(D)$, mentre al punto (b) di calcolare $p(B|D)$.

La legge delle alternative ci dice che

$$p(D) = p(D|A)\,p(A) + p(D|B)\,p(B) + p(D|C)\,p(C) = 0.03 \cdot 0.45 + 0.05 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.3 =$$
$$= 0.0135 + 0.0125 + 0.006 = 0.032 = 3.2\%,$$

che risponde alla domanda (a). La formula di Bayes implica che

$$p(B|D) = \frac{p(D|B)\,p(B)}{p(D)} = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.032} = \frac{0.0125}{0.032} = 0.390625 = 39.0625\%.$$

In conclusione la risposta alla domanda (a) è 3.2%, mentre la risposta alla domanda (b) è circa 39.06%.

Esercizio 2.
Indichiamo con x_i il peso delle scatole del farmaco (calcolato in grammi) e con f_i, per $i = 1, \dots, 6$, il numero delle scatole. Il testo dell'esercizio ci dice che:

$$x_1 = 40, \quad x_2 = 41, \quad x_3 = 42, \quad x_4 = 43, \quad x_5 = 44, \quad x_6 = 45,$$
$$f_1 = 8, \quad f_2 = 5, \quad f_3 = 25, \quad f_4 = 32, \quad f_5 = 21, \quad f_6 = 9.$$

L'istogramma dei dati raccolti è rappresentato in figura 1.

La **moda** è $x_4 = 43$ grammi, perché è il valore più frequente.
La **media** è

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots f_6x_6}{f_1 + f_2 + \cdots + f_6} = \frac{8 \cdot 40 + 5 \cdot 41 + 25 \cdot 42 + 32 \cdot 43 + 21 \cdot 44 + 9 \cdot 45}{100} =$$
$$= \frac{320 + 205 + 1050 + 1376 + 924 + 405}{100} = \frac{4280}{100} = 42.8 \text{ grammi}.$$

Per ottenere lo stesso risultato si poteva ipotizzare che la media fosse vicina a 43 e calcolare:

$$\mu = 43 + \frac{f_1(x_1 - 43) + f_2(x_2 - 43) + \cdots + f_6(x_6 - 43)}{f_1 + \cdots + f_6} =$$
$$= 43 + \frac{8(-3) + 5(-2) + 25(-1) + 21 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{100} =$$
$$= 43 + \frac{-24 - 10 - 25 + 21 + 18}{100} = 43 - \frac{20}{100} = 42.8 \text{ grammi}.$$

Elencando tutti i 100 valori x_i secondo la loro frequenza, in ordine crescente, ai posti 50 e 51 c'è x_4, quindi la **mediana** è $(x_4 + x_4)/2 = x_4 = 43$ grammi.

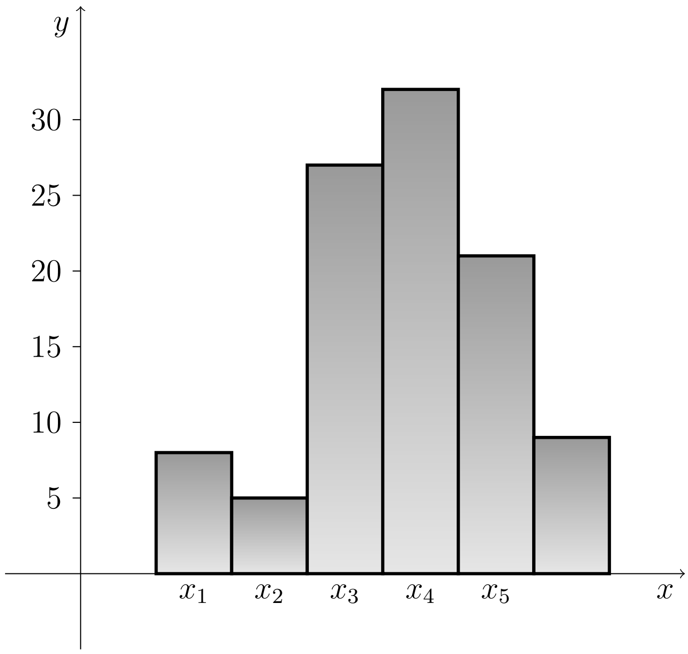

FIGURA 1. Istogramma dell'esercizio 2.

La **varianza** è

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{f_1(x_1-\mu)^2 + f_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + f_6(x_6-\mu)^2}{f_1+f_2+\cdots+f_6} = \\ &= \frac{8(-2.8)^2 + 5(-1.8)^2 + 25(-0.8)^2 + 32(0.2)^2 + 21(1.2)^2 + 9(2.2)^2}{100} = \\ &= \frac{62.72 + 16.2 + 16 + 1.28 + 30.24 + 43.56}{100} = \frac{170}{100} = 1.7\end{aligned}$$

da cui segue che lo **scarto quadratico medio** è $\sigma = \sqrt{1.7} \simeq 1.3038$ grammi.

ESERCIZIO 3.
La frazione non è definita quando il denominatore $2x$ è 0, cioè quando $x = 0$. Quindi il **dominio** della funzione f è

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

La funzione $f(x)$ non è pari, per esempio perché $f(-1) = -6 \neq 1 = f(1)$, né dispari, ancora perché $f(-1) = -6 \neq -1 = -f(1)$.
Si ha $f(x) = 0$ quando $x^2 - 5x + 6 = 0$, cioè

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

quindi il grafico di f interseca l'asse x nei punti $(2, 0)$ e $(3, 0)$.
Il numeratore $x^2 - 5x + 6$ è positivo per valori esterni, cioè per $x < 2$ e $x > 3$. Il denominatore $2x$ è positivo per $x > 0$. Mettendoli insieme, la funzione $f(x)$ è positiva per $0 < x < 2$ e per $x > 3$, mentre $f(x)$ è negativa per $x < 0$ e per $2 < x < 3$.

Studiamo gli eventuali asintoti della funzione $f(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(x-2)(x-3)}{2x} = \pm\infty$$

quindi la retta $x = 0$ è **asintoto verticale** di $f(x)$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{x} = \pm\infty,$$

quindi non esiste **nessun asintoto orizzontale**. D'altra parte

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2} - \frac{5}{2x} + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{5}{2} + \frac{3}{x} = -\frac{5}{2}$$

quindi la retta $y = -x/2 - 5/2$ è **asintoto obliquo** di $f(x)$, sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Calcoliamo la **derivata** di $f(x)$. Essendo $f(x) = x/2 - 5/2 + 3/x$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 6}{2x^2}.$$

Il denominatore della frazione è sempre positivo, nei punti in cui $f(x)$ è definita, mentre il numeratore è positivo per $x < -\sqrt{6}$ e per $x > \sqrt{6}$. Ne segue che $f(x)$ è **crescente** per $x < -\sqrt{6}$, ha un massimo in $x = -\sqrt{6}$, dove $f(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6} - 5/2$, è **decrescente** per $-\sqrt{6} < x < 0$ e per $0 < x < \sqrt{6}$, ha un minimo in $x = \sqrt{6}$, dove $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6} - 5/2$, e infine è **crescente** per $x > \sqrt{6}$.

Calcoliamo la **derivata seconda** di $f(x)$. Si ha

$$f''(x) = \frac{6}{x^3}$$

che è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Siccome $f(x)$ non è definita in $x = 0$, non esiste **nessun punto di flesso** di $f(x)$. Si ha che $f(x)$ è **convessa** per $x > 0$ e **concava** per $x < 0$.

Si può allora tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$ come nella figura 2.

Esercizio 4.

Per x che tende a 0, x^2 tende a 0 e $\log(3x)$ tende a $-\infty$, quindi il limite dato è la forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$. Riscrivendo x^2 come $1/x^{-2}$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(3x)}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}x^2 = 0,$$

dove la prima uguaglianza segue dal teorema di De l'Hôpital.

Esercizio 5.

Integriamo per parti, ponendo $g'(x) = e^{-x}$ e $f(x) = x + 2$, quindi $g(x) = -e^{-x}$, $f'(x) = 1$ e si ha

$$\int_0^\infty e^{-x}(x+2)\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}(x+2)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}(x+3)\right]_0^\infty =$$

$$= 3e^0 + \lim_{x\to\infty} -e^{-x}(x+3) = 3 + \lim_{x\to\infty} -\frac{x+3}{e^x} = 3 + 0 = 3$$

dove la penultima uguaglianza segue dalle gerarchie di infinito e si può dimostrare con il teorema di De l'Hôpital.

Esercizio 6.

Denotata la media con μ, la varianza della variabile aleatoria è

$$\int_{-\infty}^{3} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Un esempio di variabile aleatoria continua con media 1 e varianza 1 è la distribuizione di Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

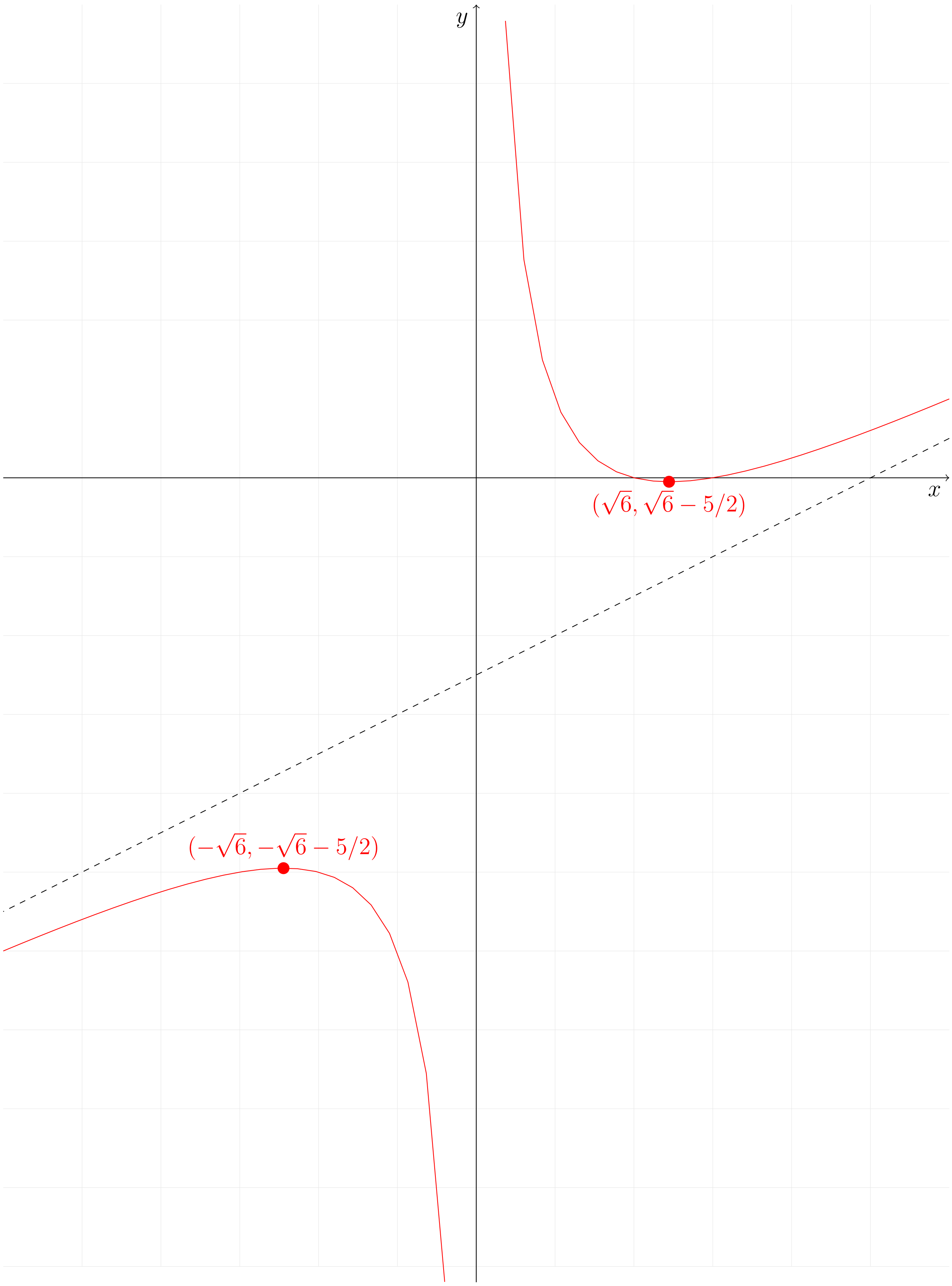

FIGURA 2. Grafico della funzione $f(x)$