Esercizi di Algebra commutativa e omologica

Esercizio 1.
Sia A un anello non nullo. Dimostrare che A è un campo se e solo se ogni omomorfismo di A in un anello non nullo B è iniettivo.

Esercizio 2.
Sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di B, allora $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo di A.
È vero che, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A, allora l'estensione di $\mathfrak{p}$ in B mediante ϕ è un ideale primo di B? In caso affermativo, dimostrarlo; altrimenti, esibire un controesempio.

Esercizio 3.
Dimostrare che ogni anello non nullo possiede ideali massimali. (Suggerimento: usare il lemma di Zorn).

Esercizio 4.
Determinare tutti gli ideali dell'anello $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Dire quali ideali di A sono primi e quali sono massimali.
Dire se A è locale.

Esercizio 5.
Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di un anello A. Se ogni elemento di $1 + \mathfrak{m} = \{1 + x \mid x \in \mathfrak{m}\}$ è invertibile in A, allora A è locale.

Esercizio 6.
Sia $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo k. Dimostrare che l'ideale $\mathfrak{m}$ formato da tutti i polinomi in A con termine costante 0 è massimale.

Esercizio 7.
Dimostrare che il nilradicale di un anello A, cioè l'insieme di tutti gli elementi nilpotenti di A, è un ideale di A.

Esercizio 8.
Sia $\mathcal{N}$ il nilradicale di un anello A. Dimostrare che $A/\mathcal{N}$ non possiede elementi nilpotenti non nulli.

Esercizio 9.
Dimostrare che il nilradicale di un anello A è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A. (Suggerimento: usare il lemma di Zorn per trovare un ideale primo che non contiene un dato elemento non nilpotente).

Esercizio 10.
Enunciare la definizione di radicale di Jacobson $\mathcal{R}$ di un anello A. Dimostrare che $x \in \mathcal{R}$ se e solo se $1 - xy$ è invertibile per ogni $y \in A$.

Esercizio 11.
Determinare il nilradicale e il radicale di Jacobson dell'anello $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Trovare i divisori dello zero di A.
L'insieme dei divisori dello zero di A è un ideale di A?

Esercizio 12.
Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ due ideali di un anello A. Dimostrare che, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono coprimi, cioè se $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Esercizio 13.
Siano $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali di un anello A. Dimostrare che, se $\mathfrak{a}_i$ e $\mathfrak{a}_j$ sono *coprimi* per ogni $i \neq j$, allora
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$
(Suggerimento: procedere per induzione su n).

Esercizio 14.
Siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali di un anello A e sia $\phi\colon A \to \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$ l'omomorfismo $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$. Dimostrare che ϕ è suriettivo se e solo se $\mathfrak{a}_i$ ed $\mathfrak{a}_j$ sono coprimi per ogni $i \neq j$.

Esercizio 15.
Siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali di un anello A e sia $\phi\colon A \to \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$ l'omomorfismo $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$. Dimostrare che ϕ è iniettivo se e solo se $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = 0$.

Esercizio 16.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A e siano $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ ideali primi di A. Dimostrare che, se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$, allora esiste i tale che $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

Esercizio 17.
Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di un anello A e siano $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali qualsiasi di A. Dimostrare che, se $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, allora esiste i tale che $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$.

Esercizio 18.
Nell'anello $A = \mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $\mathfrak{a} = \langle 40 \rangle$ e $\mathfrak{b} = \langle 24 \rangle$. Determinare $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.
Più in generale, determinare $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ quando $\mathfrak{a} = \langle m \rangle$ e $\mathfrak{b} = \langle n \rangle$ con m, n interi positivi.

Esercizio 19.
Siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ideali di un anello. Dimostrare che $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c})$.

Esercizio 20.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A. Dimostrare che il radicale $\sqrt{\mathfrak{a}}$ di $\mathfrak{a}$ è un ideale di A.

Esercizio 21.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A. Dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{a}}/\mathfrak{a}$ è il nilradicale dell'anello $A/\mathfrak{a}$.

Esercizio 22.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello. Dimostrare che il radicale $\sqrt{\mathfrak{a}}$ di $\mathfrak{a}$ è l'intersezione di tuttli gli ideali primi di A che contengono $\mathfrak{a}$.

Esercizio 23.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di un anello. Dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ se e solo se $\mathfrak{a}$ è intersezione di ideali primi.

Esercizio 24.
Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di un anello A. Dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

Esercizio 25.
Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di un anello. Dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ per ogni intero positivo n.

Esercizio 26.
Sia $A = \mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi e sia $\mathfrak{a} = \langle 360 \rangle$. Determinare $\sqrt{\mathfrak{a}}$.
Più in generale, determinare $\sqrt{\mathfrak{a}}$ quando $\mathfrak{a} = \langle m \rangle$ con m intero positivo.

Esercizio 27.
Siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di un anello A. Dimostrare che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono *coprimi*, cioè $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, se e solo se $\sqrt{\mathfrak{a}}$ e $\sqrt{\mathfrak{b}}$ sono coprimi.

Esercizio 28.
Sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anello. Enunciare la definizione di ideale *contratto* in A e di ideale *esteso* in B. Caratterizzare l'insieme $\mathcal{C}$ degli ideali contratti in A e l'insieme $\mathcal{E}$ degli ideali estesi in B.

Esercizio 29.
Siano $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ ideali di un anello A e sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Indicando con $\mathfrak{a}^e$ l'*estensione* in B di un ideale $\mathfrak{a}$ di A, dimostrare che $\mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e$.

Esercizio 30.
Siano $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ ideali di un anello B e sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Indicando con $\mathfrak{b}^c$ la *contrazione* in A di un ideale $\mathfrak{b}$ di C, dimostrare che $\mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c = (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c$.

Esercizio 31.
Siano $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ ideali di un anello A e sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Indicando con $\mathfrak{a}^e$ l'*estensione* in B di un ideale $\mathfrak{a}$ di A, dimostrare che $\mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e$.

Esercizio 32.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A e sia $\phi\colon A \to A[x]$ l'inclusione naturale di A nell'anello $A[x]$ dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti in A. Dimostrare che l'estensione di $\mathfrak{a}$ in $A[x]$, mediante ϕ, è $\mathfrak{a}[x]$, cioè l'insieme dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti nell'ideale $\mathfrak{a}$.

Esercizio 33.
Sia $\mathfrak{b}$ un ideale di un anello B e sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Indicando con $\mathfrak{b}^c$ la *contrazione* in A di $\mathfrak{b}$, dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{b}^c} = (\sqrt{\mathfrak{b}})^c$.

Esercizio 34.
Sia x un elemento nilpotente di un anello A. Dimostrare che $x + 1$ è invertibile in A. Dedurre che la somma di un elemento nilpotente e di un elemento invertibile è invertibile.

Esercizio 35.
Sia $A[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello A. Sia $f = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in A[x]$. Dimostrare che

(i) f è invertibile in $A[x]$ se e solo se a_0 è invertibile in A e $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.
(ii) f è nilpotente se e solo se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.
(iii) f è un divisore dello zero se e solo se esiste un elemento non nullo $a \in A$ tale che $af = 0$.

(Suggerimento per il punto (i): se l'inverso di f è $b_m x_m + \cdots + b_1 x + b_0$, dimostrare per induzione su r che $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. Dedurre da ciò che a_n è nilpotente.)
(Suggerimento per il punto (iii): sia $g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ un polinomio di grado minimo m tale che $fg = 0$. Allora $a_n b_m = 0$, da cui $a_n g = 0$ perché $a_n g$ annulla f ed ha grado minore di m. Dimostrare per induzione che $a_{n-r} g = 0$ per $0 \leq r \leq n$.)

Esercizio 36.
Sia $\mathcal{N}$ il nilradicale di un anello A. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) A possiede un unico ideale primo;
(ii) ogni elemento di A è invertibile oppure è nilpotente;
(iii) $A/\mathcal{N}$ è un campo.

Esercizio 37.
Si dice un che anello A è *booleano* se $x^2 = x$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che $2x = 0$ per ogni $x \in A$. Provare inoltre che ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ in A è massimale e che $A/\mathfrak{p}$ è un campo con due elementi. Dimostrare infine che ogni ideale finitamente generato di A è principale.

Esercizio 38.
Sia X l'insieme degli ideali primi di un anello A e denotiamo $V(E) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supseteq E\}$. Dimostrare che, se $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da E, allora $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Provare inoltre che $V(0) = X$ e $V(1) = \emptyset$. Dimostrare che, se $\{E_i\}_{i\in I}$ è una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi di A, allora

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i).$$

Provare infine che che, se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali di A, allora $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Esercizio 39.
Sia $X = \mathrm{Spec}(A)$ l'insieme degli ideali primi di un anello A, munito della topologia di Zariski. Per ogni elemento $f \in A$, denotiamo $V(f)$ l'insieme degli ideali primi di A che contengono f e $X_f = X \setminus V(f)$. Dimostrare che gli insiemi X_f, al variare di $f \in A$, formano una base di aperti per la topologia di Zariski di X e che

(*i*) $X_f \cap X_g = X_{fg}$;
(*ii*) $X_f = \emptyset$ se e solo se f è nilpotente;
(*iii*) $X_f = X$ se e solo se f è invertibile;
(*iv*) $X_f = X_g$ se e solo se $\sqrt{\langle f\rangle} = \sqrt{\langle g\rangle}$;
(*v*) X è *quasi compatto*, cioè ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento finito.

(Suggerimento per il punto (*v*): basta considerare un ricoprimento di X formato da aperti X_{f_i}, $i \in I$. Mostrare che $\langle f_i \mid i \in I\rangle = \langle 1\rangle$ e quindi che esistono $g_i \in A$ tali che $1 = \sum_{i\in J} f_i g_i$, dove J è un sottoinsieme finito di I. Concludere che X_{f_i}, $i \in J$, ricoprono X.)

Esercizio 40.
Sia $X = \mathrm{Spec}(A)$ l'insieme degli ideali primi di un anello A, munito della topologia di Zariski. Indichiamo un ideale primo di A con x se pensiamo $x \in X$ o con $\mathfrak{p}_x$ se lo pensiamo come ideale primo di A.
Dimostrare che l'insieme $\{x\}$ è chiuso in X se e solo se l'ideale primo $\mathfrak{p}_x$ è massimale in A. Provare inoltre che la chiusura topologica $\overline{\{x\}}$ di $\{x\}$ in X coincide con $V(\mathfrak{p}_x)$.
Dimostrare che $y \in \overline{\{x\}}$ se e solo se $\mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}_x$. Provare infine X è uno spazio T_0, cioè per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, eisste un intorno di x che non contiene y oppure esiste un intorno di y che non contiene x.

Esercizio 41.
Dato un anello A, siano L, M, N degli A-moduli tali che $N \subseteq M \subseteq N$. Dimostrare che

$$\frac{L/N}{M/N} \cong \frac{L}{M}\,.$$

Esercizio 42.
Sia M un A-modulo, dove A è un anello, e siano M_1, M_2 sottomoduli di M. Dimostrare che

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}\,.$$

Esercizio 43.
Sia A un anello ed M un A-modulo. Dimostrare che si può considerare M come $A/\mathfrak{a}$-modulo, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di A, se $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ann}(M)$, dove $\operatorname{Ann}(M) = (0 : M)$ è l'*annullatore* di M. Dopo aver enunciato la definizione di modulo *fedele*, provare che M è fedele come $A/\operatorname{Ann}(M)$-modulo.

Esercizio 44.
Siano N, P sottomoduli di un A-modulo M. Dimostrare che $\operatorname{Ann}(N + P) = \operatorname{Ann}(N) \cap \operatorname{Ann}(P)$.

Esercizio 45.
Siano N, P sottomoduli di un A-modulo M. Provare che $(N : P) = \operatorname{Ann}((N + P)/N)$.

Esercizio 46.
Sia M un A-modulo, dove A è un anello. Dimostrare che M è finitamente generato se e solo se M è isomorfo ad un quoziente di A^n, per qualche intero positivo n.

Esercizio 47.
Sia M un A-modulo finitamente generato e sia $\mathfrak{a}$ ideale di A tale che $\mathfrak{a}M = M$. Dimostra che esiste $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ tale che $xM = 0$.

Esercizio 48.
Enunciare e dimostrare il lemma di Nakayama.

Esercizio 49.
Sia M un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che, se esiste un sottomodulo N di M e un ideale $\mathfrak{a}$ di A, incluso nel radicale di Jacobson di A, tali che $M = \mathfrak{a}M + N$, allora $M = N$.

Esercizio 50.
Sia M un A-modulo finitamente generato, dove A è un anello locale di massimale $\mathfrak{m}$. Dimostrare che, se $x_1, \ldots, x_n$ sono elementi di m tali che $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ sia una base di $M/\mathfrak{m}M$, allora $x_1, \ldots, x_n$ generano M.

Esercizio 51.
Enunciare la definizione di *funzione additiva* su una classe di A-moduli. Dimostrare che è additiva la funzione λ che associa ad uno k-spazio vettoriale di dimensione finita la sua dimensione. Data una successione esatta

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \to M_n \to 0$$

di k-spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} \lambda(M_i) = 0$.

Esercizio 52.
Siano m ed n due interi primi tra loro. Dimostrare che $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

Esercizio 53.
Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'anello di polinomi in una indeterminata x a coefficienti nell'anello dei numeri interi $\mathbb{Z}$. Dimostrare che $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x] = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$.

Esercizio 54.
Sia M un A-modulo. Dimostrare che esiste un isomorfismo $A \otimes_A M \cong M$.

Esercizio 55.
Siano M, N, P degli A-moduli. Dimostrare che esiste un isomorfismo $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.

Esercizio 56.
Sia k un campo e siano x, y indeterminate. Dimostrare che esiste un isomorfismo $k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x, y]$.

Esercizio 57.
Sia $f\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia finitamente generato come A-modulo. Dimostrare che, se M è un B-modulo finitamente generato, allora M è finitamente generato come A-modulo.

Esercizio 58.
Sia M un A-modulo finitamente generato e sia B un anello che è anche un A-modulo. Dimostrare che $B \otimes_A M$ è un B-modulo finitamente generato.

Esercizio 59.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A e sia M un A-modulo. Dimostrare che esiste un isomorfismo $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

Esercizio 60.
Siano M, N degli A-moduli finitamente generati, dove A è un anello locale. Dimostrare che, se $M \otimes_A N = 0$, allora $M = 0$ oppure $N = 0$.

Esercizio 61.
Dato un A-modulo M, indichiamo con $M[x]$ l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in M. Verificare che $M[x]$ è un $A[x]$-modulo e dimostrare che $M[x] \cong A[x] \otimes_A M$.

Esercizio 62.
Sia $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una successione esatta di A-moduli. Dimostrare che, se M' e M'' sono finitamente generati, allora anche M è finitamente generato.

Esercizio 63.
Sia A un anello non nullo. Dimostrare che, se $A^m \cong A^n$, allora $m = n$.

Esercizio 64.
Dimostrare che, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di un anello A, allora $\mathfrak{p}[x]$ è un ideale primo di $A[x]$. Se $\mathfrak{m}$ è massimale in A, è vero che $\mathfrak{m}[x]$ è un ideale massimale di $A[x]$?
In caso affermativo, dimostrarlo; altrimenti, esibire un controesempio.

Esercizio 65.
Descrivere $\mathbb{Z}_{\langle 5\rangle} = S^{-1}\mathbb{Z}$, dove $S = \mathbb{Z} \setminus \langle 5\rangle$. Dare un esempio di ideale primo di $\mathbb{Z}_{\langle 5\rangle}$.

Esercizio 66.
Descrivere $\mathbb{Z}_5 = S^{-1}\mathbb{Z}$, dove $S = \{5^n \mid n \geq 0\}$. Dare un esempio di ideale primo di $\mathbb{Z}_5$.

Esercizio 67.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Dimostrare che l'operazione S^{-1} è *esatta*, cioè, se la successione $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ è esatta in M, allora la successione $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ è esatta in $S^{-1}M$.

Esercizio 68.
Sia M un A-modulo e sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A. Siano N, P sottomoduli di M. Dimostrare che $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$ e che $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$. Provare infine che esiste un isomorfismo di $S^{-1}A$-moduli $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$.

Esercizio 69.
Sia M un A-modulo e sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A. Dimostrare che esiste un isomorfismo di $S^{-1}A$-moduli $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$.

Esercizio 70.
Dimostrare che l'essere uguale a 0, per un modulo, è una proprietà locale.

Esercizio 71.
Dimostrare che l'iniettività di un omomorfismo di A-moduli è una proprietà locale.

Esercizio 72.
Dimostrare che la suriettività di un omomorfismo di A-moduli è una proprietà locale.

Esercizio 73.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Dimostrare che ogni ideale in $S^{-1}A$ è un ideale esteso.

Esercizio 74.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Dimostrare che un ideale $\mathfrak{a}$ di A è tale che $\mathfrak{a}^e = S^{-1}A$ se e solo se $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

Esercizio 75.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A e siano $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di A. Dimostrare che $S^{-1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$, $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$, $S^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}\mathfrak{b})$ e infine $S^{-1}(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$.

Esercizio 76.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Dimostrare che il nilradicale di $S^{-1}A$ è $S^{-1}\mathcal{N}$, dove $\mathcal{N}$ è il nilradicale di A.

Esercizio 77.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A e sia M un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che $S^{-1}(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Ann}(S^{-1}M)$.

Esercizio 78.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Dimostrare che $S^{-1}(A[x]) \cong (S^{-1}A)[x]$.

Esercizio 79.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A e sia M un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che $S^{-1}M = 0$ se e solo se esiste $s \in S$ tale che $sM = 0$.

Esercizio 80.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A e sia $S = 1 + \mathfrak{a}$. Dimostrare che $S^{-1}\mathfrak{a}$ è contenuto nel radicale di Jacobson di $S^{-1}A$.
Dedurre che, se M è un A-modulo finitamente generato tale che $\mathfrak{a}M = M$, allora esiste un elemento $s \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ tale che $sM = 0$.

Esercizio 81.
Siano S, T sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi di un anello A. Indicata con U l'immagine di T in $S^{-1}A$, dimostrare che gli anelli $(ST)^{-1}A$ e $U^{-1}(S^{-1}A)$ sono isomorfi.

Esercizio 82.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A e sia $\phi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Posto $T = \phi(S)$, dimostrare che gli $S^{-1}A$-moduli $S^{-1}B$ e $T^{-1}B$ sono isomorfi.

Esercizio 83.
Dimostrare che, se $A_\mathfrak{p}$ non ha elementi nilpotenti non nulli per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$, allora A non possiede elementi nilpotenti non nulli. Se ogni anello $A_\mathfrak{p}$ è un dominio di integrità, è vero che anche A deve necessariamente essere un dominio di integrità?

Esercizio 84.
Sia A un anello non nullo e sia Σ l'insieme di tutte le parti moltiplicative S di A tali che $0 \in S$. Dimostrare che Σ possiede elementi massimali e che $S \in \Sigma$ è massimale se e solo se $A \setminus S$ è un ideale primo minimale di A.

Esercizio 85.
Enunciare la definizione di ideale *primario* e dare un esempio in $\mathbb{Z}$ di ideale primario che non sia primo.

Esercizio 86.
Enunciare la definizione di ideale *primario* e dare un esempio in $k[x]$ di ideale primario che non sia primo.

Esercizio 87.
Enunciare la definizione di ideale *primario* e dare un esempio in $k[x, y]$ di ideale primario che non sia primo.

Esercizio 88.
Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario di un anello A. Dimostrare che $\sqrt{\mathfrak{q}}$ è un ideale primo.

Esercizio 89.
Dare un esempio di una potenza di un ideale primo in un anello che non è un ideale primario.

Esercizio 90.
Dare un esempio di ideale primario che non è la potenza di un ideale primo.

Esercizio 91.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A. Dimostrare che, se $\sqrt{\mathfrak{a}}$ è massimale, allora $\mathfrak{a}$ è primario.

Esercizio 92.
Enunciare la definizione di decomposizione primaria minimale di un ideale in un anello. Determinare una decomposizione primaria minimale di $\langle 120 \rangle$ in $\mathbb{Z}$. Più in generale, determinare una decomposizione primaria minimale di $\langle m \rangle$ in $\mathbb{Z}$, dove $m \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 93.
Nell'anello $\mathbb{Z}[t]$ dei polinomi in una indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{Z}$, dimostrare che l'ideale $\langle 2, t \rangle$ è massimale e che l'ideale $\mathfrak{q} = \langle 4, t \rangle$ è $\mathfrak{m}$-primario, ma non è una potenza di $\mathfrak{m}$.

Esercizio 94.
Nell'anello $k[x, y, z]$ dei polinomi nelle indeterminate x, y, z a coefficienti in un campo k, siano $\mathfrak{p}_1 = \langle x, y \rangle$, $\mathfrak{p}_2 = \langle x, z \rangle$ ed $\mathfrak{m} = \langle x, y, z \rangle$. Verificare che $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$ sono ideali primi e che $\mathfrak{m}$ è massimale. Posto $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, dimostrare che $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ è una decomposizione primaria minimale di $\mathfrak{a}$. Quali componenti sono isolate e quali sono immerse?

Esercizio 95.
Sia $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{p}$-primario di un anello A. Dimostrare che $\mathfrak{q}[x]$ è un ideale $\mathfrak{p}[x]$-primario in $A[x]$, dove x è una indeterminata.

Esercizio 96.
Dimostrare che, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo minimale di un ideale $\mathfrak{a}$ in un anello A, allora $\mathfrak{p}[x]$ è un ideale primo minimale di $\mathfrak{a}[x]$ in $A[x]$, dove x è una indeterminata.

Esercizio 97.
Nell'anello $k[x_1, \ldots, x_n]$ dei polinomi nelle indeterminate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a coefficienti in un campo k, dimostrare che gli ideali $\mathfrak{p}_i = \langle x_1, ldots, x_i \rangle$, per $1 \leq i \leq n$, sono primi e che tutte le loro potenze sono ideali primari.

Esercizio 98.
Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello A. Per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A indichiamo con $S(\mathfrak{a})$ la contrazione di $S^{-1}\mathfrak{a}$ in A. Dimostrare che $S(\mathfrak{a}) \cap S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, che $S(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \sqrt{S(\mathfrak{a})}$ e che $S(\mathfrak{a}) = A$ se e solo se $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

Esercizio 99.
Dimostrare che un A-modulo M è noetheriano se e solo se ogni sottomoduli di M è finitamente generato.

Esercizio 100.
Sia $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una successione esatta di A-moduli. Dimostrare che M è noetheriano se e solo se M', M'' sono noetheriani.

Esercizio 101.
Sia $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una successione esatta di A-moduli. Dimostrare che M è artiniano se e solo se M', M'' sono artiniani.

Esercizio 102.
Sia M un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che, se A è noetheriano, allora anche M è noetheriano.

Esercizio 103.
Sia M un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che, se A è artiniano, allora anche M è artiniano.

Esercizio 104.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A. Dimostrare che, se A è noetheriano, allora anche $A/\mathfrak{a}$ è noetheriano.

Esercizio 105.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello A. Dimostrare che, se A è artiniano, allora anche $A/\mathfrak{a}$ è artiniano.

Esercizio 106.
Enunciare la definizione di *serie di composizione* di un A-modulo M. Dimostrare che M possiede una serie di composizione se e solo se M è noetheriano e artiniano.

Esercizio 107.
Dimostrare che la *lunghezza* di un A-modulo M, cioè la lunghezza delle serie di composizione di M, è una funzione additiva sulla classe di tutti gli A-moduli di lunghezza finita.

Esercizio 108.
Sia V un k-spazio vettoriale. Dimostrare che V soddisfa la a.c.c. (condizione sulle catene ascendenti) se e solo se V ha dimensione finita.

Esercizio 109.
Sia V un k-spazio vettoriale. Dimostrare che V soddisfa la d.c.c. (condizione sulle catene discendenti) se e solo se V ha dimensione finita.

Esercizio 110.
Sia A un anello in cui l'ideale 0 è il prodotto di ideali massimali, non necessariamente distinti. Allora A è noetheriano se e solo se A è artiniano.

Esercizio 111.
Sia M un A-modulo noetheriano. Dimostrare che se un endomorfismo di moduli $u\colon M \to M$ è suriettivo, allora u è un isomorfismo.

Esercizio 112.
Sia M un A-modulo artiniano. Dimostrare che se un endomorfismo di moduli $u\colon M \to M$ è iniettivo, allora u è un isomorfismo.

Esercizio 113.
Sia M un A-modulo. Se ogni insieme non vuoto di sottomoduli finitamente generati di M possiede un elemento massimale, allora M è noetheriano.

Esercizio 114.
Siano N, P sottomoduli di un A-modulo M. Dimostrare che, se M/N e M/P sono noetheriani, allora anche $M/(N \cap P)$ è noetheriano.

Esercizio 115.
Sia M un A-modulo noetheriano. Dimostrare che $A/\operatorname{Ann}(M)$ è un anello noetheriano.

Esercizio 116.
Enunciare la definizione di anello noetheriano e la sua caratterizzazione. Sia A un anello noetheriano. Dimostrare che, se $\phi\colon A \to B$ è un omomorfismo suriettivo di anelli, allora B è noetheriano.

Esercizio 117.
Sia A un sottoanello di B e sia B finitamente generato come A-modulo. Dimostrare che, se A è noetheriano, allora anche B è noetheriano.

Esercizio 118.
Dimostrare che, se S è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un anello noetheriano A, allora $S^{-1}A$ è noetheriano.

Esercizio 119.
Sia B una A-algebra finitamente generata. Dimostrare che, se A è noetheriano, allora anche B è noetheriano.

Esercizio 120.
Enunciare la definizione di ideale irriducibile di un anello A. Dimostrare che, se A è noetheriano, allora ogni ideale di A è intersezione finita di ideali irriducibili.

Esercizio 121.
Sia A un anello noetheriano. Dimostrare che ogni ideale irriducibile è primario.

Esercizio 122.
Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello noetheriano A. Dimostrare che esiste un numero intero positivo n tale che $\left(\sqrt{\mathfrak{a}}\right)^n \subseteq \mathfrak{a}$.

Esercizio 123.
Sia A un anello noetheriano. Dimostrare che il nilradicale di A è nilpotente.

Esercizio 124.
Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di un anello noetheriano A. Dimostrare che un ideale $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{m}$-primario se e solo se esiste un intero positivo n tale che $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$.

Esercizio 125.
Enunciare la definizione di anello *artiniano*. Dimostrare che in un anello artiniano A ogni ideale primo è massimale. Dedurre che il nilradicale di A coincide con il radicale di Jacobson di A.

Esercizio 126.
Dimostrare che un anello artiniano possiede un numero finito di ideali massimali.

Esercizio 127.
Dimostrare che in un anello locale artiniano ogni elemento è invertibile o nilpotente.

Esercizio 128.
Dimostrare che in un anello artiniano il nilradicale è nilpotente.

Esercizio 129.
Sia A un anello locale noetheriano. Dimostrare che l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è tale che $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ per ogni intero positivo n oppure $\mathfrak{m}$ è nilpotente. Provare che, nel secondo caso, A è artiniano.

Esercizio 130.
Dimostrare che l'anello $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ è noetheriano. Dire se A è artiniano.
Determinare la dimensione (di Krull) di A.

Esercizio 131.
Sia A un dominio di integrità con dimensione (di Krull) uguale a 0. Dimostrare che A è un campo.

Esercizio 132.
Sia A un dominio a ideali principali che non è un campo. Dimostrare che A ha dimensione (di Krull) uguale a 1.

Esercizio 133.
Sia A un anello di dimensione (di Krull) infinita. Dimostrare che anche $A[x]$ ha dimensione (di Krull) infinita.

Esercizio 134.
Dare un esempio di anello con un unico ideale primo che non è noetheriano.

Esercizio 135.
Siano A un anello locale artiniano, $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale e $k = A/\mathfrak{m}$ il campo dei residui. Dimostrare che ogni ideale di A è principale se e solo se la dimensione di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come k-spazio vettoriale è minore o uguale a 1.

Esercizio 136.
Enunciare la definizione di elemento *intero* di un anello B su un sottoanello A di B. Dimostrare che $x \in B$ è intero su A se e solo se $A[x]$ è un A-modulo finitamente generato.

Esercizio 137.
Sia C l'insieme degli elementi di un anello B interi su un sottoanello A di B. Dimostrare che C è un sottoanello di A.

Esercizio 138.
Enunciare la definizione di sottoanello *integralmente chiuso* in un anello. Dimostrare che $\mathbb{Z}$ è integralmente chiuso in $\mathbb{Q}$ ma non in $\mathbb{R}$.

Esercizio 139.
Sia B un anello intero su un sottoanello A. Se $\mathfrak{b}$ un ideale di B e $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap A$, allora $B/\mathfrak{b}$ è intero su $A/\mathfrak{a}$.

Esercizio 140.
Sia B un anello intero su un sottoanello A. Se S è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso in A, allora $S^{-1}B$ è intero su $S^{-1}A$.

Esercizio 141.
Siano A, B domini di integrità con $A \subset B$ e B intero su A. Dimostrare che A è un campo se e solo se B è un campo.

Esercizio 142.
Sia A un dominio di integrità. Dimostrare che essere integralmente chiuso è una proprietà locale.

Esercizio 143.
Enunciare la definizione di anello *graduato*. Dimostrare che un anello graduato $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ è noetheriano se e solo se A_0 è noetheriano ed A è una A_0-algebra finitamente generata.

Esercizio 144.
Sia $A = k[x,y]/\langle y - x^2 \rangle$, dove k è un campo e x, y sono indeterminate. Determinare l'anello *graduato* associato ad A rispetto all'ideale $\mathfrak{a} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ di A.

Esercizio 145.
Sia $A = k[x,y]/\langle xy \rangle$, dove k è un campo e x, y sono indeterminate. Determinare l'anello *graduato* associato ad A rispetto all'ideale $\mathfrak{a} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ di A.

Esercizio 146.
Sia $A = k[x,y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$, dove k è un campo e x, y sono indeterminate. Determinare l'anello *graduato* associato ad A rispetto all'ideale $\mathfrak{a} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ di A.